



L'ENSEIGNEMENT DE LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME. ÉTUDE DE PRATIQUES ORDINAIRES

Eric Roditi

► To cite this version:

Eric Roditi. L'ENSEIGNEMENT DE LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME. ÉTUDE DE PRATIQUES ORDINAIRES. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2001. Français. NNT : . tel-00364726

HAL Id: tel-00364726

<https://theses.hal.science/tel-00364726>

Submitted on 26 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR de MATHÉMATIQUES

Année 2001

THÈSE
pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité
DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue publiquement
le 23 novembre 2001
par

Éric RODITI

**L'ENSEIGNEMENT DE LA
MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME
ÉTUDE DE PRATIQUES ORDINAIRES**

Directeur de thèse
Madame Aline ROBERT

Membres du Jury

Mme Michèle ARTIGUE
M Yves CHEVALLARD
Mme Jacqueline MAC ALEESE
Mme Claire MARGOLINAS
Mme Aline ROBERT
Mme Janine ROGALSKI
M. Marc ROGALSKI

Université de Paris 7
IUFM de Marseille
Université de Paris 7
IUFM d'Auvergne
IUFM de Versailles
CNRS
Université de Lille 1

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur
Examineur
Rapporteur

Remerciements

Il m'est agréable de remercier ceux qui, par leurs entretiens ou leur correspondance, m'ont permis de préciser mes orientations de recherche ou la présentation de mes travaux. Je pense à Teresa Assude, à Denis Butlen, ainsi qu'à Marie-Jeanne Perrin qui m'ont aidé à aplanir les difficultés rencontrées au cours de cette recherche. Jacqueline Mac Aleese et Marc Rogalski ont accordé une attention particulière à la rédaction des analyses statistiques et des développements mathématiques relatifs aux ordres de grandeur ; ils m'ont donné de précieux conseils, et je leur en suis reconnaissant.

Je voudrais remercier mes proches pour leur lecture attentive et pour le souvenir des discussions enthousiastes concernant les pratiques enseignantes qui ont jalonné ces années. A Geneviève Châtelet, Fabienne Gourinchas, Vincent Lattuati et Bernard Malinaud, j'adresse mes sincères remerciements. Une pensée particulière pour Marie Lattuati qui accompagne mes réflexions sur l'enseignement des mathématiques depuis mes débuts de professeur. Et pour Françoise qui a partagé, à toute heure, mes interrogations de thésard ..

Je ne saurais être trop reconnaissant envers les professeurs qui m'ont généreusement accueilli parmi leurs élèves et qui se sont efforcés de répondre à mes questions sur les choix de programmation de leurs cours et de gestion de leur classe. Merci à Mesdames Agnesi, Germain et Theano ainsi qu'à Monsieur Bombelli, ils se reconnaîtront malgré leur pseudonyme.

Je voudrais encore remercier l'IREM de Paris 7 et le groupe DIDIREM pour toutes les facilités qu'ils accordent aux étudiants en doctorat. Je rends aussi hommage à l'APMEP qui, en réalisant des brochures de très grande qualité, met à notre disposition une mine d'informations précieuses qui nourrissent notre connaissance des élèves.

Ma profonde gratitude va enfin à Madame Aline Robert. Il y a six ans, elle acceptait la direction de mon mémoire de DEA. Elle n'a cessé depuis de guider mes recherches avec attention et aussi avec sympathie. Sa grande disponibilité, la confiance et le soutien qu'elle m'a témoigné durant ces années m'ont beaucoup aidé. Sa critique rigoureuse et toujours bienveillante ainsi que ses précieux conseils n'ont cessé de stimuler ma réflexion et de m'encourager à l'effort.

INTRODUCTION

Des questions de formateur sont à l'origine de cette recherche. Mieux comprendre l'enseignement effectif d'une notion donnée pour répondre à des besoins que les professeurs expriment en formation initiale ou continue, et finalement contribuer à améliorer les apprentissages mathématiques des élèves, tels sont les objectifs généraux que nous poursuivons.

Nous nous intéressons à l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième et nos questions portent sur les pratiques ordinaires des professeurs. Avant de définir le sujet de notre recherche, nous voudrions d'abord en présenter son histoire, puis nous proposerons le plan de notre travail.

Genèse de la recherche : des constats de formateur

Au moment de la publication des programmes de novembre 1995 pour la classe de sixième, nous avons animé des stages de formation continue axés sur la liaison entre l'école élémentaire et le collège¹ et regroupant des enseignants des classes de CM2 et de sixième. Ces stages ont porté sur la modification de la répartition de l'enseignement de la multiplication : il s'effectuait, auparavant, entièrement à l'école élémentaire alors que depuis, le cas où les deux facteurs sont décimaux n'est traité qu'au collège.

Les professeurs sont confrontés à des erreurs persistantes de leurs élèves

Comme formateur, nous avons constaté que la multiplication des nombres décimaux pose des problèmes aux enseignants. Les erreurs persistantes des élèves révèlent des difficultés d'apprentissage. Ces erreurs concernent, d'une part, la reconnaissance du modèle multiplicatif d'une situation dans laquelle les valeurs numériques ne sont pas entières, et d'autre part, la mise en œuvre de la technique opératoire. En outre, il subsiste des problèmes liés à la multiplication des entiers et à l'écriture des nombres décimaux.

Les professeurs que nous avons rencontrés dans les stages conçoivent assez mal les difficultés de leurs élèves. La technique opératoire, comparée à celle de la

¹ Plus précisément entre le Cycle 3 de l'Ecole élémentaire qui concerne les enfants de 8 à 10 ans scolarisés respectivement en CE2, CM1 et CM2 et le Cycle d'Adaptation du Collège qui concerne les enfants de 11 ans scolarisés en classe de sixième.

division, ne leur paraît pas difficile ; comme le modèle multiplicatif d'une situation est indépendant des valeurs numériques, le fait que les valeurs soient entières ou décimales ne leur semble pas modifier la difficulté de sa reconnaissance. Pourtant, la réaction de nombreux élèves montre le contraire, et les enseignants restent démunis devant ces difficultés.

Faire appel, en formation, à la recherche en didactique des mathématiques

Dans la mesure où les analyses des professeurs, issues de leurs connaissances mathématiques, ne permettent pas d'expliquer les difficultés constatées ni *a fortiori* de les résoudre, il nous a semblé légitime d'utiliser, en formation, les outils développés en didactique des mathématiques afin d'étudier les problèmes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage de la multiplication des nombres décimaux.

Plusieurs travaux de recherche sur la multiplication ou sur les nombres décimaux ont été menés². Compte tenu des récents changements de programmes, les professeurs de collège pourraient tirer parti de deux ingénieries pour enseigner la multiplication des nombres décimaux. Finalement, l'étude des travaux existant sur cette question pourrait laisser l'impression que des réponses ont été apportées qui permettraient d'enseigner de façon telle que les connaissances et les compétences visées soient acquises par un maximum d'élèves.

L'efficacité de tels stages dépend de la perméabilité des enseignants aux travaux des didacticiens

Les professeurs n'utilisent pas les résultats des recherches en didactique

Or différentes recherches ont montré le peu d'impact, en situation d'enseignement ordinaire, de la recherche en didactique des mathématiques. Récemment, la thèse de Jeanne Bolon a posé ce problème, précisément sur l'enseignement des nombres décimaux à l'école élémentaire et au collège. L'auteur conclut³ que les enseignants des classes ordinaires manquent de points d'ancrage pour utiliser les situations des ingénieries didactiques. En outre, les enseignants de collège, compte tenu des programmes officiels, seraient enclins à aboutir au plus vite à des algorithmes de calculs décontextualisés. Certains des professeurs qui ont contribué à sa recherche disposaient cependant de connaissances didactiques.

Les scénarios conçus lors des recherches en didactique sont-ils inadaptés à l'enseignement ordinaire ? Les enseignants sont-ils soumis à des contraintes, notamment institutionnelles, qui ne sont pas suffisamment prises en compte dans ces scénarios ? L'ensemble de ces considérations nous amenèrent à cette recherche sur l'enseignement ordinaire, et notamment sur l'activité du professeur

² Nous pensons notamment aux deux ingénieries didactiques d'enseignement des nombres décimaux, celle de Nadine Brousseau & Guy Brousseau (1987) et celle de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin (1986), aux articles de Guy Brousseau (1998) sur les décimaux, aux travaux de Gérard Vergnaud (1981 et 1983) sur la multiplication ainsi qu'à la thèse de Janine Rogalski (1985) qui traite de la bidimensionnalité (de la multiplication).

³ BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5 [pp. 321 à 328].

Une direction de recherche qui se heurte à deux obstacles

Une recherche qui porte sur le travail des professeurs nécessite d'observer des classes. En demandant à des collègues de nous ouvrir leur porte, nous avons constaté d'abord des réticences liées au fait que les expériences d'enseignement conçues par les chercheurs seraient trop éloignées du quotidien de la classe. Pourtant, quand nous avons précisé que nous ne souhaitions pas qu'ils expérimentent un scénario déjà élaboré mais bien que nous puissions observer, pour l'analyser, leur enseignement au quotidien, nous avons encore essuyé de nombreux refus. L'intérêt d'un chercheur, même collègue, pour l'enseignement ordinaire est suspect. Pour ces professeurs réticents, les conclusions des recherches de ce type sont connues d'avance : ils n'enseignent pas comme il le faudrait pour que les élèves apprennent. Quant aux propositions pour améliorer leur enseignement, ils estiment qu'elles sont vaines car elles idéalisent la classe du quotidien et conduisent à des projets irréalisables. Les professeurs se méfient des travaux menés par des chercheurs qui ignorent la spécificité de l'enseignement ordinaire. Mieux connaître cette spécificité est devenu l'un de nos objectifs, il demande d'explorer les pratiques enseignantes du point de vue des enseignants eux-mêmes.

En tant que chercheur en didactique des mathématiques, nous avons senti peser sur cette position un autre soupçon. Prendre le point de vue du professeur ne constitue-t-il pas un manquement au "pas de côté" par rapport à l'enseignement, nécessaire pour mener une recherche ? En didactique, l'acquisition des savoirs par les élèves est une préoccupation première, les cadres théoriques permettent-ils de considérer l'enseignant sans référence aux apprentissages ?

Une recherche qui imbrique deux approches, didactique et ergonomique

Comme le montrent certains travaux présentés à la X^e école d'été de didactique des mathématiques⁴, les recherches sur le pôle "professeur" se multiplient et s'organisent. Pour surmonter les deux obstacles rencontrés par notre recherche, un moyen consistait à répondre simultanément à deux exigences : prendre en compte, en tant que chercheur, à la fois le quotidien du professeur en situation d'enseignement et l'apprentissage des élèves.

Nous avons finalement envisagé de mener une recherche sur l'activité du professeur selon une approche double, dans la lignée des travaux d'Aline Robert⁵ :

- l'une où les activités du professeur sont analysées pour les apprentissages qu'elles permettent, et pour laquelle nous utiliserons le cadre de la didactique des mathématiques ;

- l'autre où le professeur est considéré comme un individu en situation de travail, et pour laquelle nous emprunterons à la psychologie ergonomique⁶.

⁴ Voir les articles du thème "Pratiques de l'enseignant de mathématiques" des actes de la X^e école d'été de didactique des mathématiques (1999) : Caen

⁵ Nous pensons à ses travaux sur la formation des enseignants et sur les pratiques depuis 1995.

Nous avons vu que l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux dans des classes de sixième ordinaires est une question qui mérite de conjuguer ces deux points de vue. Les résultats des recherches en didactique des mathématiques sur ce thème sont déjà nombreux, en outre des récents travaux montrent que les professeurs n'en tirent pas parti.

Ainsi, nous pouvions à la fois répondre aux questions que les réticences des professeurs posent aux chercheurs, et inscrire notre travail dans le cadre de la recherche en didactique des mathématiques. Il nous restait donc à transformer ces premières interrogations et ces premiers choix d'étude en un sujet de recherche.

Présentation du sujet

Nous nous proposons d'étudier l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux par des professeurs de collège. Cette notion est l'objet d'un véritable enjeu puisque les élèves commettent des erreurs persistantes qui démontrent à la fois leurs difficultés d'apprentissage et une certaine impuissance des professeurs qui restent désarmés. Il s'agit pour nous de mieux comprendre ce qui est fait en classe, par rapport à ce qui pourrait l'être, en tenant compte des prescriptions et des contraintes, et en prenant comme critère d'évaluation des pratiques enseignantes des catégories liées aux apprentissages potentiels des élèves.

Nous allons préciser ici le contexte général de la recherche, les limites du sujet, la problématique globale et quelques premiers éléments méthodologiques.

Le contexte de la recherche, des conséquences sur le sujet

Notre recherche se situe dans un contexte particulier. Deux ingénieries didactiques publiées depuis une quinzaine d'années proposent un enseignement des nombres décimaux. Ces ingénieries avaient été élaborées pour l'enseignement primaire mais elles pourraient être reprises en classe de sixième – le niveau que nous étudions – compte tenu du dernier changement de programme. Une recherche récente a défendu la thèse que les professeurs n'utilisent, ni à l'école élémentaire ni au collège, les résultats de ces ingénieries dans leur enseignement. Grâce à des entretiens avec les professeurs, l'auteur de cette recherche a proposé des pistes pour expliquer ce manque d'impact de la didactique.

A la suite de ces travaux, nous nous proposons de mieux comprendre l'enseignement ordinaire de la multiplication des nombres décimaux en sixième. La compréhension que nous recherchons est particulière. Nous nous centrons sur les contenus mathématiques et sur leur enseignement en classe, et nous comparons ce qui est fait (par le professeur et par les élèves), ce qui est prescrit (par l'institution scolaire au professeur, et par le professeur aux élèves), ce qui est contraint (par les horaires, les programmes, le manuel utilisé ...) et ce qui pourrait être fait. L'enseignement pourrait être abordé autrement : par les phénomènes

⁶ Nous nous référons aux travaux de Jaques Leplat (1997) et à ceux de Janine Rogalski (2000) pour son approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant.

affectifs, par le travail personnel des élèves à la maison. Restait à définir le nombre de séances auxquelles nous devions assister

Nous avons discuté avec les professeurs des modalités de notre accueil. L'observation de situations ordinaires d'enseignement se rencontre, en dehors de la recherche, dans le contexte de la formation ou de l'inspection. Certains professeurs rejettent les interprétations effectuées après ces visites dans leur classe, ils avancent souvent le peu de représentativité d'une séance isolée pour décrire et critiquer leur enseignement. Même si l'on peut entrevoir ici des mécanismes de défense mobilisés par ces personnes, il nous a semblé que la fréquence de l'argument qui vient d'être présenté indiquait qu'il méritait que nous le prenions en compte, quitte à le questionner dans notre recherche. Ainsi avons-nous choisi d'observer "tout l'enseignement", c'est-à-dire la séquence complète, de la multiplication des nombres décimaux de professeurs dans leur classe de sixième.

Finalement, pour analyser les pratiques, nous coordonnons deux approches validées par deux cadres théoriques. La première est celle de l'apprentissage des élèves pour laquelle nous retenons une dimension liée au contenu et à son organisation, une dimension liée aux activités des élèves et une dimension liée aux interactions entre le professeur et les élèves. La seconde approche est celle de l'exercice du métier pour laquelle nous retenons une dimension sociale, du fait de l'intégration de la profession dans un système comprenant plusieurs acteurs (la hiérarchie, les collègues, les élèves et leurs parents...), et une dimension personnelle où l'enseignant est un individu impliqué dans son activité professionnelle.

Quelques limitations du sujet

Nous avons conscience du fait que l'activité du professeur ne représente qu'une partie des facteurs qui déterminent l'apprentissage d'un élève. L'hétérogénéité d'une classe en témoigne. Le riche travail de Bernard Charlot, Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex⁷ contribue à expliquer, par une approche sociologique, que les élèves ne reçoivent pas de la même manière le même enseignement : non seulement ils ne rentrent pas en classe avec les mêmes attentes et les mêmes projets, mais encore ils ne donnent pas le même sens au discours de l'enseignant et à ses consignes ni même aux tâches qu'ils réalisent en classe ou à la maison. Néanmoins, nous faisons l'hypothèse que ce qui se passe dans une classe reste un facteur essentiel des apprentissages des élèves. De plus, nous fixons à notre recherche une première limite : nous ne prenons pas en compte la dimension sociale des élèves des classes observées. Pour cette raison, nous avons préféré restreindre notre étude à l'enseignement dans des classes ordinaires de sixième, du point de vue de leur composition sociale comme de leur niveau. Nous avons parallèlement mené des observations dans des classes dites difficiles d'un établissement situé en Zone d'Education Prioritaire, mais nous ne les avons pas intégrées au corpus de notre recherche car leur analyse aurait effectivement nécessité une méthodologie particulière.

⁷ CHARLOT B., BAUTIER E. & ROCHEX J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris.

Dans une situation d'enseignement, le professeur s'engage personnellement. Des logiques inconscientes s'y manifestent nécessairement. Nous avons pu percevoir quelques-unes de leurs manifestations lors de certaines observations, mais n'étant pas spécialiste des théories ni des analyses psychanalytiques, nous avons préféré ne pas en tenir compte dans le cadre de cette recherche. Cette limitation suppose, nous en faisons l'hypothèse, que la compréhension partielle à laquelle nous pourrions parvenir reste cependant pertinente pour expliquer, suffisamment même si ce n'est pas totalement, les activités du professeur en fonction de ce qu'elles induisent sur les apprentissages des élèves.

Dans une classe de sixième, les interactions entre le professeur et les élèves comportent nécessairement une dimension affective qui n'est pas négligeable. Nous avons remarqué, lors de nos observations, que le ton du professeur changeait suivant la situation ou suivant les élèves, que ses accompagnements du discours purement mathématique (verbaux ou non) étaient nombreux pour souligner son égard pour ses élèves, que sa position dans la salle comme ses déplacements témoignaient aussi de la dimension affective du jeu qui se déroule en classe. Pour des raisons d'ordre méthodologique, nous avons néanmoins décidé de ne pas aborder la dimension affective des situations d'enseignement observées. En effet, les exemples que nous venons de citer montrent que la prise en compte de cette dimension demande d'adopter un point de vue très local sur les situations, point de vue qui vient se heurter au choix de considérer l'ensemble complet de la séquence de chaque professeur. Malgré ces nouvelles limitations de notre étude, nous supposons encore qu'elle conserve sa pertinence.

Pour analyser les activités du professeur en fonction des apprentissages qu'elles permettent, nous retiendrons des outils d'ordre épistémologique et cognitif. Du point de vue méthodologique, le choix de ces outils nous permettra d'utiliser pleinement les recherches déjà menées sur l'enseignement de la multiplication et des nombres décimaux pour lesquelles les auteurs avaient déjà effectué ce choix.

La problématique générale

La question globale que nous nous posons en abordant cette recherche est donc celle de "l'enseignement ordinaire" de la multiplication des nombres décimaux dans des classes moyennes de sixième. Nous employons cette expression au singulier alors que vraisemblablement, la réalité recouvre une certaine diversité. Par des comparaisons, nous nous proposons justement de déceler et d'interpréter des similitudes et des divergences entre les séquences observées.

Plus précisément, parmi toutes les composantes d'une situation d'enseignement, celle qui retient ici notre attention est le professeur. Nous nous intéressons à ses activités en classe, ainsi qu'à ses activités en dehors de la classe si elles ont une incidence sur ce qu'il fera en présence de ses élèves. Nous utiliserons le terme de "pratiques enseignantes" pour désigner toutes ces activités⁸. Les pratiques enseignantes seront questionnées pour repérer, d'une part les objectifs

⁸ Nous utilisons ainsi la définition que propose Aline Robert (2000).

pédagogiques des professeurs, leurs activités... et d'autre part les contraintes professionnelles qui les déterminent et les caractérisent

En analysant les pratiques enseignantes avec ce double point de vue, nous contribuerons à préciser, dans le contexte de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, ce que recouvre l'expression " une pratique ordinaire "

Premiers éléments méthodologiques

Les pratiques enseignantes regroupent les activités du professeur en classe ainsi que celles qui lui permettent de préparer sa séquence. Notre recherche portera donc à la fois sur l'élaboration du projet par chaque professeur et sur son déroulement en présence des élèves. Pour répondre à notre problématique, la méthodologie doit permettre d'analyser ces deux activités, l'élaboration du projet et son animation, en conjuguant deux points de vue, l'apprentissage des élèves et l'exercice du métier.

D'une manière classique en didactique, nous avons déterminé *a priori* les contraintes et les possibles en tenant compte à la fois de considérations épistémologiques, des programmes et des acquis des élèves. Nous avons analysé aussi les manuels scolaires qui constituent les principales sources des professeurs pour préparer leurs cours. Nous avons rencontré des professeurs qui nous ont présenté leur projet et nous ont invité dans leur classe pour assister à leur enseignement de la notion choisie. Nous avons enfin mené une analyse *a posteriori* qui, d'une part permet de situer les séances observées par rapport à celles qui étaient envisageables et qui, d'autre part tient compte de l'activité en classe du professeur pour favoriser les apprentissages de ses élèves.

Notre objectif est l'étude du professeur et notre méthode générale est de procéder à des comparaisons. Pour cette raison, nous avons observé des séquences d'enseignement de plusieurs professeurs, toutes choses égales par ailleurs. C'est-à-dire que nous avons, autant que possible, fixé les variables des situations d'enseignement observées, sauf celles qui concernent personnellement le professeur. Ainsi avons-nous fixé la date des observations, la notion enseignée, le niveau global des élèves, les moyens d'enseignement disponibles (effectif des classes, horaire, manuel scolaire), une certaine expérience professionnelle des enseignants.

Nous avons observé les pratiques en classe en assistant, pour chaque professeur, à toutes les séances de son enseignement de la multiplication des nombres décimaux. Ces séances ont été enregistrées à l'aide d'un petit magnétophone portable qui permettait au professeur de conserver sa mobilité habituelle dans la salle. Nous avons pris des notes écrites concernant ses déplacements, l'utilisation du tableau, les énoncés d'exercices... L'observation des pratiques d'élaboration du projet s'est heurtée à un important problème méthodologique. L'accès direct à cette activité professionnelle est très difficile car, dans des conditions normales, elle est complètement privée. Or nous souhaitions précisément analyser des pratiques ordinaires. Nous avons donc opté pour une reconstitution du projet, à partir du déroulement observé et d'entretiens avec les professeurs.

Présentation des résultats de nos travaux

L'analyse des séquences des professeurs, en fonction des apprentissages des élèves se nourrit de la confrontation des observations et de l'analyse *a priori* qui repose sur l'utilisation d'outils développés en didactique des mathématiques.

Après avoir développé notre problématique, précisé les cadres théoriques que nous utilisons, et détaillé notre méthodologie (*chapitre 1*), nous avons choisi de présenter nos travaux en commençant par l'analyse *a priori*. L'enseignement de la multiplication des décimaux en classe de sixième repose sur deux notions étudiées antérieurement à l'école élémentaire, le nombre décimal et la multiplication. Nous commençons donc par un bilan des travaux des recherches en didactique concernant ces notions et nous précisons les choix de l'institution scolaire par une lecture des programmes et de leur évolution (*chapitre 2*). Nous étudions ensuite, en fonction des apprentissages potentiels des élèves, les diverses propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux qui figurent dans les publications et que les professeurs pourraient utiliser pour préparer leurs cours (*chapitre 3*). Nous proposons enfin de déterminer les projets possibles compte tenu des programmes et des connaissances des élèves quand ils entrent en sixième (*chapitre 4*).

Nous étudions ensuite les séquences observées, à la recherche de régularités et de variations dans les pratiques enseignantes. Nous analysons les pratiques en fonction des objectifs d'apprentissage des élèves et en replaçant, de façon permanente, le professeur dans la position d'un individu en situation de travail. Les régularités et les variations observées sont interprétées pour cerner les contraintes et les alternatives d'une situation d'enseignement ordinaire. L'examen des séquences observées commence alors par une étude comparée des projets des professeurs (*chapitre 5*). Puis nous examinons les déroulements de ces projets suivant deux aspects. D'abord nous analysons les activités des élèves c'est-à-dire, dans chaque classe, ce que font les élèves en fonction des demandes de leur professeur (*chapitre 6*). Nous terminons cette recherche en étudiant certains échanges entre le professeur et les élèves, ceux qui résultent de décalages entre des dynamiques d'apprentissage personnelles et celle que le professeur tente d'animer pour toute la classe (*chapitre 7*).

En conclusion, à propos d'une notion déjà explorée par les recherches en didactique des mathématiques et dans un contexte très particulier du système scolaire français, nous étudions les pratiques enseignantes dans des classes ordinaires. Nous souhaitons ainsi contribuer à la réflexion sur le pôle professeur du système didactique.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Sommaire du chapitre 1

1. Une entrée pragmatique dans l'étude des pratiques

Une analyse des pratiques qui commence par l'observation des classes

Une utilisation conjointe de deux cadres théoriques

2. Vers une problématique particulière d'analyse de pratiques

Des questions sur le savoir, nécessaires pour analyser les pratiques

Des questions sur l'ensemble des pratiques enseignantes observées

Des questions sur chaque pratique enseignante observée

3. Méthodologie générale

Les séquences observées, les professeurs et leurs classes

La constitution de données analysables à partir des séances enregistrées

Le matériel à utiliser : sources publiées et sources expérimentales

Quelles analyses des différentes sources utilisées ?

Dans ce premier chapitre, nous présentons notre questionnement et notre problématique sur les pratiques ordinaires d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième. Nous utilisons pour cette recherche deux cadres théoriques généraux issus de la didactique des mathématiques pour le premier et de la psychologie ergonomique pour le second. Ces cadres légitiment la méthodologie élaborée pour répondre à la problématique. Dans les chapitres suivants, nous présenterons ces analyses et nous exploiterons les résultats qu'elles permettent d'obtenir afin d'apporter des réponses à nos questions.

1. Une entrée pragmatique dans l'étude des pratiques

Cette recherche porte sur les pratiques de professeurs qui ont dû enseigner la multiplication des décimaux en sixième, en France, à ce moment très spécifique de la mise en application du programme de 1995. Pour la première fois, les professeurs de collège ont eu la charge de cet enseignement, jusqu'alors assumée par les enseignants de l'école primaire. Cette particularité du contexte explique que nous nous soyons limité presque exclusivement aux recherches françaises. Certains travaux étrangers, pourtant très riches, n'ont pas été cités parce qu'ils ne correspondaient pas précisément aux besoins spécifiques de cette recherche. D'autres, notamment menés en Italie, ont été pleinement utilisés.

En situant cette recherche parmi les travaux français actuels concernant les pratiques enseignantes, nous allons préciser les cadres théoriques utilisés, à la fois pour asseoir notre problématique et pour fonder la méthodologie mise en œuvre. Nous avons procédé de manière classique en didactique des mathématiques, en commençant par une analyse *a priori* de l'enseignement de la notion (des contenus et de la transposition didactique), puis en développant une analyse des projets élaborés par les professeurs. Nous en détaillerons ici la méthodologie. Enfin, nous avons utilisé les résultats obtenus pour préciser la problématique concernant les pratiques enseignantes en classe, et affiner la méthodologie. La partie méthodologique qui concerne l'analyse de la classe ne sera pas développée.

complètement ici mais dans les chapitres concernés par cette analyse⁹. Précisons quelles analyses des pratiques nous mettons en œuvre.

Une analyse des pratiques qui commence par l'observation des classes

Dans son cours pour la X^e école d'été de didactique des mathématiques qui a eu lieu à Houlgate en août 1999, Maria Luisa Schubauer-Leoni¹⁰ esquisse deux grands mouvements des travaux de recherche sur la profession enseignante. Les travaux du premier mouvement, qualifié de "descendant", découlent de l'analyse du système pour définir ensuite le professeur qui est alors pensé en terme d'assujettissements, en fonction des contraintes provenant de ce système. Les recherches du second mouvement, qualifié "d'ascendant", partent du professeur pour penser ensuite le système et les contraintes qu'il comporte.

Notre démarche s'inscrit plutôt dans ce dernier mouvement : nous observons les pratiques de professeurs de mathématiques et nous nous posons, à propos de ces observations, des questions relatives à l'enseignement ordinaire. La question des contraintes du système n'est pas écartée, elles sont recherchées dans les pratiques par leurs "empreintes" sur l'enseignement des professeurs, tant d'un point de vue global concernant le contenu et sa présentation aux élèves que d'un point de vue plus local concernant les activités effectives des élèves en classe et les échanges avec le professeur. Nous pensons trouver des traces des contraintes à tous ces niveaux des pratiques enseignantes parce que nous supposons que ces pratiques forment un système à la fois complexe et cohérent.

Cependant nous analysons le système afin de reconnaître ces empreintes parmi les caractéristiques des pratiques observées. En partant des observations des professeurs dans leur classe et en procédant par comparaison, nous cherchons des régularités et nous les interprétons comme des contraintes institutionnelles ou directement liées à l'exercice du métier. Nous cherchons aussi des singularités des pratiques qui montrent à la fois l'existence de marges de manœuvre et leur investissement par chaque professeur non seulement pour élaborer le scénario de son enseignement mais aussi pour animer, dans sa classe, le projet qu'il a conçu.

Notre étude des pratiques commence donc par l'observation du professeur. Mais l'intégralité de son activité est trop complexe pour que nous puissions jamais la décrire complètement. Il nous faut donc procéder à un découpage de la réalité qui nous permettra de retenir ce qui semble pertinent pour répondre aux questions de notre problématique. Ce découpage et sa pertinence reposent sur les cadres théoriques que nous utilisons et que nous allons préciser.

⁹ Cf chapitre 6, paragraphe 1 et chapitre 7, paragraphe 1.

¹⁰ SCHUBAUER-LEONI Maria Luisa (1999), Les pratiques de l'enseignant de mathématiques : modèles et dispositifs de recherche pour comprendre les pratiques in *Actes de la X^e école d'été de didactique des mathématiques – tome 1 –*, Houlgate : édition ARDM

Une utilisation conjointe de deux cadres théoriques ¹¹

Nous commençons donc par étudier les pratiques des professeurs pour leur contribution aux apprentissages des élèves. Dans son exposé à la X^e école d'été de didactique des mathématiques (1999), Marie-Jeanne Perrin ¹² retient, dans les recherches françaises, quatre entrées principales dans l'étude du didactique : une par le savoir et les situations qui le mettent en jeu, une par l'étude des institutions où vivent les savoirs, une par l'étude de l'élève et une dernière entrée, plus globale, qu'elle qualifie d'empirique, qui consiste à découper la réalité observée à partir de questions posées *a priori* et à construire des catégories permettant de repérer des régularités à partir de l'observation. Notre étude des pratiques enseignantes relève de cette dernière catégorie.

Les pratiques enseignantes et leurs conséquences sur l'apprentissage

Nous supposons que les activités des élèves déterminent suffisamment leur apprentissage pour légitimer une partie de notre démarche : analyser les pratiques enseignantes, pour leur contribution aux apprentissages, par les activités qu'elles induisent en classe. L'activité d'un élève se compose de son action (ce qui est fait, dit, écrit mais encore ce qui est vu ou entendu) et de la pensée qui accompagne cette action (aussi bien ce qu'il a pensé pour faire, ce qu'il pense en le faisant et ce qu'il pensera juste après l'avoir fait). L'activité d'un élève est pour une grande part intellectuelle et donc n'est pas observable. Cependant nous pouvons en inférer une part en confrontant ce qui est à l'origine de l'activité de l'élève (la tâche) et ce qui émerge de cette activité (production matérielle, écrite ou orale). Nous appelons activité potentielle de l'élève cette reconstitution de son activité réelle.

Nous ne disposons pas, pour chaque élève de la classe, d'information sur son activité. Seuls les élèves "interrogés" s'expriment oralement ou par écrit au tableau. La restriction opérée en passant des élèves – au pluriel – à la classe – au singulier – ne gêne pas nos travaux : nos observations nous ont permis de constater que les professeurs agissent très rarement en direction d'un élève particulier sans tenir compte du reste du groupe classe, sauf lorsque tout le monde est en situation de recherche et qu'il circule dans les rangs. Ainsi, lorsqu'un élève est interrogé, le professeur obtient une attention générale suffisante pour écouter cet élève et réagir comme si chaque membre de la classe l'avait écouté. En négligeant, dans nos travaux, ce que font les élèves qui ne s'intègrent pas dans le groupe classe tel qu'il est géré par le professeur, nous ne faisons que restreindre notre étude des activités des élèves à celles qui, justement, monopolisent l'attention de l'enseignant. Toutes les activités des élèves sont importantes pour leur incidence sur les apprentissages, mais cette restriction ne gêne pas notre

¹¹ Rappelons que cette recherche s'inscrit dans la lignée des travaux sur les pratiques menés par Aline Robert depuis 1996

¹² PERRIN M-J (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques, *Recherches en didactique des mathématiques* 19/3 (279–322), Grenoble : La pensée sauvage.

recherche parce que les activités qui nous intéressent sont précisément celles dont la responsabilité incombe au professeur, professeur dont la pratique est l'objet de notre recherche

Nous faisons aussi l'hypothèse qu'en classe, les tâches proposées aux élèves sont réalisées par suffisamment d'élèves¹³. Ainsi, l'étude de ces tâches et des activités potentielles nécessaires à leur réalisation est pertinente pour en envisager les conséquences sur l'apprentissage des élèves, au moins en tant que processus. Le choix des tâches s'effectue par le professeur, leur analyse concerne donc bien celle des pratiques enseignantes. Dans cette perspective, les pratiques enseignantes des professeurs observés sont considérées pour leur fonction : que les élèves apprennent la multiplication des nombres décimaux. Nous utilisons largement le cadre de la didactique des mathématiques, nous reprenons les hypothèses qui y sont généralement admises sur les apprentissages et nous nous servons des outils d'analyse des situations d'enseignement qui y sont développés pour analyser les tâches par rapport aux activités potentielles correspondantes.

Nous supposons que l'apprentissage d'un élève dépend des situations qu'il étudie, en classe notamment, pour le contenu mathématique qu'elles comportent mais aussi pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir.

Le contenu est abordé dans cette recherche selon trois dimensions empruntées à la théorie des champs conceptuels¹⁴ :

un concept est un triplet de trois ensembles : $C(s, I, S)$
 s : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;

S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

(...) Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques

Ainsi, chaque notion est analysée en considérant les problèmes qu'elle permet de résoudre (classés par catégorie, ils en constituent les situations de référence), ses propriétés dont certaines conduisent éventuellement à des méthodes de résolution des problèmes précédents dans un certain domaine de validité, ainsi que ses représentations symboliques et leur transformation.

Pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir, on est attentif, en didactique des mathématiques, à certaines caractéristiques de l'enseignement

¹³ Nous avons visité des classes pour lesquelles il serait permis de douter de cette hypothèse mais elles ne figurent pas parmi celles qui ont été utilisées dans le cadre de notre recherche

¹⁴ VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactique des mathématiques* 10/2.3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage

Elles ont permis d'élaborer des ingénieries, qui relèvent d'un enseignement expérimental. Nous nous proposons d'utiliser ces mêmes caractéristiques pour comparer les projets d'enseignement des professeurs que nous avons observés, bien que le contexte soit celui d'un enseignement ordinaire. Nous examinons différentes questions générales que nous particulariserons dans l'exposé de la méthodologie. Il s'agit de repérer la dynamique savoir ancien / savoir nouveau, ainsi que les dialectiques contextualisation / décontextualisation des savoirs. Le cas échéant, nous nous demanderons si la décontextualisation conduit à la formulation et/ou à la validation de la technique opératoire.

Dans l'étude des tâches proposées, nous repérons les différentes représentations symboliques mobilisées pour leur réalisation, ainsi que les dialectiques outil / objet des savoirs. Nous distinguons aussi les tâches qui ne demandent que des applications directes de celles où l'élève doit, soit reconnaître une situation (de ce que Gérard Vergnaud appelle "la référence"), soit adapter des savoirs anciens.

Nous supposons également, comme beaucoup d'auteurs qui s'inspirent des théories de Vygotski, que d'autres facteurs, de l'ordre des médiations, jouent un rôle important sur l'apprentissage d'un élève. Nous pensons notamment aux discours non strictement mathématiques de l'enseignant qui servent à désigner et à organiser les connaissances, les aides individuelles ou collectives pour orienter ou réorienter la recherche ou plus simplement la réflexion d'un (des) élève(s), les échanges entre le professeur et les élèves ou entre élèves...

Nous étudions donc les pratiques enseignantes en considérant successivement le projet du professeur, les activités (potentielles) des élèves que nous inférons à partir de leurs productions en fonction des tâches proposées en classe, et les échanges entre le professeur et les élèves ou entre les élèves.

Les pratiques enseignantes comme exercice d'un métier

Dans la seconde approche des pratiques enseignantes, nous considérons les activités professionnelles de l'enseignant, non plus seulement comme une réponse à un objectif d'acquisition de savoir par les élèves, mais aussi comme un travail. Un travail soumis à des contraintes imposées par l'institution scolaire qui prescrit et qui définit les tâches confiées à ses agents, un travail qui comporte des exigences spécifiques liées aux conditions d'exercice de la profession, mais aussi un travail dans lequel le professeur s'investit personnellement. Pour asseoir notre questionnement relatif aux pratiques enseignantes comme exercice d'un métier, et pour organiser notre recherche dans cette voie, nous empruntons un cadre théorique à la psychologie ergonomique. Nous nous référons aux travaux de Jacques Leplat¹⁵ et à ceux de Janine Rogalski¹⁶ qui les exploite dans son approche de

¹⁵ LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail – Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.

¹⁶ ROGALSKI J. (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges

psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. Le professeur est alors considéré comme un individu en situation de travail, depuis l'élaboration de son projet d'enseignement jusqu'à l'animation de ce projet en classe, y compris lorsqu'il improvise et s'adapte aux réactions des élèves. Nous prenons en compte l'activité de préparation des cours à double titre : elle fait partie du travail de l'enseignant et elle repose sur des connaissances professionnelles dont certaines sont issues de la pratique.

Nous faisons en effet l'hypothèse que la référence à l'exercice du métier permettra d'enrichir nos analyses des pratiques. D'une part pour mieux comprendre certains choix communs aux professeurs observés et qui ne s'expliqueraient pas comme des réponses les mieux adaptées à un problème d'enseignement. D'autre part pour interpréter ce qui, dans l'étude d'une pratique peut s'avérer incompréhensible, voire apparaître comme une contradiction, si l'on s'arrête à une analyse de l'activité enseignante considérée seulement comme étant au service des élèves¹⁷. Nous opérons un "changement de point de vue" dans l'analyse, par rapport à ce qui était analysé précédemment : il ne s'agit plus d'étudier l'activité du professeur en fonction des apprentissages potentiels mais en fonction des besoins, liés à l'exercice du métier.

Précisons davantage ce que nous entendons par exercice du métier. Le professeur doit satisfaire les attentes de l'institution scolaire qui l'emploie, cette institution étant représentée, pour des professeurs de sixième, par l'inspection pédagogique et le chef d'établissement. Il doit aussi créer des conditions de travail satisfaisantes : éviter les situations conflictuelles, stressantes ou angoissantes, renforcer la qualité des relations dans la classe, la confiance et la motivation des élèves. Et comme il n'est pas le seul professeur de mathématiques de son établissement, il doit tenir compte de certaines caractéristiques communes à l'enseignement de ses collègues. Plus largement, le professeur exerce une activité sociale qui nécessite de considérer l'ensemble personnes qu'il rencontre : les collègues, les autres personnels, les élèves et leurs parents. Enfin, le professeur s'implique personnellement dans son activité qui traduit donc aussi son ambition professionnelle, ses conceptions des mathématiques et de leur enseignement, sa gestion des risques d'incidents en classe, de sa fatigue, ses besoins de sécurité, de confort, d'amour des élèves. Certaines caractéristiques de l'exercice du métier sont donc partagées par tous les enseignants, mais d'autres sont plus personnelles.

Malgré ces distinctions au sein d'une pratique, nous en supposons la cohérence interne. Il nous semble important de ne pas négliger le fait que derrière toute pratique enseignante, il y a un professeur, c'est-à-dire un individu en situation de travail. Cette hypothèse de cohérence des pratiques aide aux interprétations. Elle permet parfois de déterminer, par inférence, des "logiques" qui expliquent la

¹⁷ Notamment si ceux-ci ne jouent pas le jeu du scénario prévu. Rappelons que cette réserve est théorique, nous avons considéré seulement des classes qui "fonctionnent" normalement dans cette recherche. Néanmoins, même dans ces classes de niveau standard, nous proposons de ne pas ignorer le travail fourni par l'enseignant. Cela nous permet de poser la question suivante qui enrichit les interprétations : à quel prix le professeur est-il au service des élèves ?

conduite d'un professeur. Cependant la cohérence d'une pratique enseignante peut intervenir à différents niveaux¹⁸ pour différents professeurs, niveaux auxquels ces professeurs n'appliquent pas la même hiérarchie. Ainsi la cohérence d'une pratique ne permet pas de la recomposer à partir d'analyses partielles. Nous admettons qu'une pratique forme un système complexe, c'est-à-dire qu'on ne peut réduire à la somme de ses composantes. Lorsque le croisement de résultats différents sur les pratiques semble contredire une logique précédente nous considérons la contradiction (qui n'est qu'apparente) comme une compensation : une exception pour laquelle nous ne disposons pas de moyen qui permette d'en comprendre la logique dont nous supposons tout de même l'existence, en conséquence de l'hypothèse de cohérence des pratiques. Nous expliquons notamment ce manque de moyens par le fait que nos analyses des pratiques se placent à certains niveaux qui ne sont peut-être pas ceux qui sont prioritaires pour tel ou tel enseignant.

Abordons maintenant nos questions et notre problématique, nous définirons ensuite la méthodologie adoptée.

2. Vers une problématique particulière d'analyse de pratiques

Les questions que nous nous posons sont relatives aux pratiques d'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Nous souhaitons ainsi contribuer à éclairer le débat actuel sur le pôle professeur du système didactique. Nous cherchons aussi à approcher l'idée de "pratiques ordinaires". C'est pourquoi nos questions portent essentiellement sur les régularités et sur les divergences des pratiques enseignantes. Cela nécessite de les analyser puis de les comparer, suivant leurs différentes composantes¹⁹. Nous nous interrogeons enfin sur la cohérence interne de la pratique enseignante de chaque professeur. Des descriptions obtenues, nous espérons dégager ce que nous pouvons qualifier de pratique ordinaire.

Des questions sur le savoir, nécessaires pour analyser les pratiques

Les professeurs qui ont accepté de nous ouvrir la porte de leur classe ont donc tous enseigné la multiplication des nombres décimaux. En ces termes, ils ont poursuivi le même objectif d'apprentissage pour leurs élèves, l'objectif défini par le programme de la classe de sixième. Cette affirmation sera discutée plus finement

¹⁸ Nous pensons par exemple à : favoriser l'apprentissage, faire réussir les élèves, promouvoir les élites, contribuer à l'ascension sociale, donner le goût des mathématiques, se faire aimer des élèves, assurer une position dominante dans la classe.

¹⁹ La pratique d'un professeur est l'ensemble de ses activités qui concernent son enseignement. Nous décomposons une pratique enseignante en distinguant sa contribution aux apprentissages des élèves (par les activités induites et par les accompagnements de ces activités en classe) et sa contribution à la satisfaction de nécessités liées à l'exercice du métier (contraintes communes ou besoins plus personnels)

car les professeurs diffèrent sans doute par leur interprétation des directives du programme. Leurs différences proviennent, d'une manière plutôt générale, de leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement. Mais sans doute aussi, d'une manière plus spécifique au contenu visé, les professeurs peuvent dessiner de nombreux objectifs qui ne seront pas tous partagés par chacun d'entre eux ; objectifs qu'il nous reste d'ailleurs à déterminer. L'analyse des pratiques nécessite une connaissance précise de la notion enseignée, à la fois en tant qu'objet de savoir mathématique et en tant qu'objet d'enseignement. Autrement dit, la discussion que nous proposons ici soulève des questions sur le savoir, le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

La multiplication des décimaux en sixième, quels enjeux ?

Nous nous interrogeons sur les enjeux mathématiques et les enjeux d'apprentissage dont la multiplication des décimaux est l'objet. Cette question nécessite une analyse du savoir (les nombres et l'opération) et des situations qui mettent en jeu ce savoir (les situations multiplicatives). A propos des nombres décimaux, nous nous demandons quelle est leur fonction, comment ils s'écrivent et dans quels problèmes ils interviennent. Concernant la multiplication, nous nous interrogeons sur les situations qui forment la référence (situations multiplicatives), sur les propriétés de l'opération et sur les méthodes de calcul d'un produit de deux décimaux. Les recherches précédentes menées en didactique sur les nombres décimaux et sur la multiplication nous aideront pour répondre à ces questions.

Une autre question intéresse les professeurs, et donc celui qui se penche sur leurs pratiques : celle des choix de l'institution scolaire à propos de l'enseignement de la multiplication des décimaux. Nous les déterminerons par l'analyse des programmes actuels en nous interrogeant sur leurs indications, notamment celles qui concernent les savoirs à enseigner et celles qui précisent l'enseignement attendu. Les projets élaborés par les professeurs pourront alors être examinés en fonction des programmes, ce qui nous conduira encore à la question de l'enseignement ordinaire.

La multiplication des décimaux, quels enseignements possibles ?

Nous nous interrogeons sur les enseignements possibles de la multiplication des nombres décimaux, d'une part sans tenir compte du contexte institutionnel, et d'autre part en considérant les prescriptions et les contraintes communes qui s'imposent aux professeurs. De telles comparaisons permettront de progresser sur la notion d'enseignement ordinaire.

Nous allons donc chercher, dans diverses publications, toute indication permettant d'élaborer un projet d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième. Nous analyserons ces différents projets en fonction de l'apprentissage²⁰ des élèves dont ils sont potentiellement vecteurs. Nous nous poserons alors la question de leur diversité. Nous chercherons aussi à déterminer

²⁰ Dans cette recherche, l'apprentissage des élèves doit s'entendre aussi bien comme le processus d'acquisition de savoirs nouveaux que comme l'acquisition elle-même.

d'éventuelles zones d'ombre, c'est-à-dire des objets de savoirs liés à la multiplication des décimaux qui ne sont pas traités ou seulement très rarement. Ces zones d'ombre peuvent concerner des situations multiplicatives ou des propriétés de la multiplication. Le cas échéant nous tenterons d'en déterminer l'origine et les conséquences éventuelles sur les apprentissages.

Puis nous croiserons ces résultats avec les contraintes liées au contexte de l'enseignement actuel de la multiplication des nombres décimaux. Nous nous intéresserons notamment aux connaissances avec lesquelles les élèves entrent en classe de sixième ainsi qu'à leurs difficultés déjà constatées avec la notion à enseigner. Nous aborderons enfin l'intégration de cet enseignement dans le programme complet de l'année ainsi que sa place dans le programme du collège.

Les conclusions concernant la multiplication des nombres décimaux et son enseignement permettront d'étudier les projets réels des professeurs observés ainsi que les moyens mis en œuvre pour animer ce projet. Autrement dit, nos questions concernent à présent les pratiques enseignantes des professeurs.

Des questions sur l'ensemble des pratiques enseignantes observées

Nous allons *a priori* associer le caractère ordinaire des pratiques d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, aux contraintes communes qui s'exercent sur les professeurs qui enseignent cette notion, dans une classe de sixième de niveau standard. Nous cherchons à les repérer, à déterminer leurs conséquences sur les pratiques et, à terme, leurs effets sur l'apprentissage des élèves. La comparaison des pratiques des professeurs observés permettra de montrer certaines régularités, que nous tenterons de lire comme les effets de contraintes communes, et une éventuelle diversité, signe de la marge de manœuvre qui subsiste

Quelles contraintes sur les pratiques ?

Les professeurs évoquent souvent le "quotidien de la classe" pour justifier leur enseignement. Cela nous amène à dédoubler la question des contraintes.

D'une part, nous nous interrogeons sur les contraintes qui concernent tous les professeurs et qui sont extérieures à la salle de classe. Nous pensons à l'organisation du système scolaire qui conduit à la répartition des élèves en divisions d'effectif donné, à l'attribution d'un contingent horaire, à la définition d'un programme national commun. Nous pensons aussi à des contraintes plus locales liées aux relations que chaque professeur entretient avec les différents acteurs de son établissement scolaire, la hiérarchie, les collègues, les élèves et leurs parents. Nous pensons enfin à l'utilisation, en classe, d'un manuel scolaire. Dans cette recherche, nous essaierons de déterminer l'effet sur les pratiques des contraintes générales. Les premières que nous avons citées, les contraintes locales ne seront pas étudiées sauf celles qui concernent le manuel utilisé parce qu'il est commun à tous les professeurs dont nous étudions les pratiques. Sans entrer dans le détail de la méthodologie que nous développons plus loin, disons qu'une analyse *a priori* permettra de les déterminer et que la confrontation au réel permettra d'en préciser la portée sur l'enseignement effectivement proposé aux élèves

Nous nous interrogeons d'autre part sur les contraintes qui concernent aussi tous les professeurs, et qui sont spécifiques à l'activité professionnelle en classe. En posant cette question, nous évoquons inmanquablement les problèmes de gestion relatifs à la discipline, très bien décrits dans l'ouvrage²¹ "*Pourvu qu'ils m'écoutent...*" qui rassemble des mémoires professionnels de professeurs stagiaires. Mais cette question concerne aussi les problèmes relatifs à l'apprentissage des élèves d'une même classe²² : ils nécessitent une gestion, parfois difficile, à laquelle les professeurs expérimentés pensent sans doute quand ils évoquent le quotidien de la classe. Nous avons limité cette recherche aux contraintes internes à la salle de classe qui concernent spécifiquement l'apprentissage, nous sommes partis des observations pour les cerner, les décrire et en mesurer la portée.

Et quelles marges de manœuvre ?

Nous interprétons les différences entre les pratiques des professeurs comme des marges de manœuvre qu'ils investissent. Nous essaierons de les déterminer, à tous les niveaux de l'activité du professeur, depuis la préparation des cours jusqu'à l'animation dans la salle de classe du projet élaboré.

Nous posons alors la question des effets différentiels des pratiques sur l'apprentissage des élèves. La marge de manœuvre qui subsiste conduit-elle à des enseignements différents du point de vue de l'apprentissage ? Plusieurs recherches²³ sur les pratiques de plusieurs professeurs font apparaître chez les élèves des activités effectives assez différentes. Dans cette recherche, nous discutons à nouveau l'hypothèse selon laquelle les pratiques ordinaires sont diverses et ne sont pas équivalentes.

Ces questions interrogent la formation initiale et continue des enseignants dont la mission première est d'aider les professeurs à optimiser les apprentissages des élèves dans le cadre défini par l'institution scolaire. Comment favoriser l'évolution d'une pratique enseignante, à la fois complexe et cohérente ? Nous ne

²¹ DAVISSE A & ROCHEX J.-Y. – Collectif sous la direction de – (1995), *Pourvu qu'ils m'écoutent. Discipline et autorité dans la classe*, Créteil : CRDP de l'académie de Créteil

²² DAVISSE A & ROCHEX J.-Y. – Collectif sous la direction de – (1998), *Pourvu qu'ils apprennent... face à la diversité des élèves*, Créteil : CRDP de l'académie de Créteil

²³ HACHE C (1999), *L'enseignant de mathématiques au quotidien, étude de pratiques en classe de seconde*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 7

MASSELOT P. (2000), *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 7

ROBERT A VANDEBROUCK F. (2001), *Recherches sur l'utilisation du tableau par les enseignants de mathématiques de seconde*, Paris 7 : Cahier de Didirem, n°36.

RODITI E. (1996), *Le tableau noir: un outil pour la classe de mathématiques*. Université de Paris 7 : Cahier de Didirem, n°31.

VERGNES D. (2000), *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 5.

cherchons pas ici à répondre mais seulement à étudier les pratiques de professeurs pour y distinguer ce qui est contraint de ce qui est choisi, et pour y déceler des traces de la cohérence de l'ensemble. Cela nous amène à considérer chaque pratique isolément.

Des questions sur chaque pratique enseignante observée

Considérons la pratique d'un professeur dans son ensemble c'est-à-dire, dans cette recherche, toutes les activités qui concernent son enseignement de la multiplication des nombres décimaux, dans et en dehors de la classe. Quelles sont les relations entre chacune de ces activités ? Comment le professeur intègre-t-il dans sa pratique ses choix et les contraintes, notamment celles qui concernent le savoir et le temps ?

La pratique d'un professeur, quel ensemble ?

Pour étudier la pratique d'un professeur, nous nous posons des questions sur ce qu'il fait. Parce que nous nous sommes limité à l'étude d'une séquence, certaines questions ne seront posées qu'une seule fois alors que d'autres reviendront souvent. Le professeur recherche-t-il une situation fondamentale pour commencer l'enseignement de la multiplication ? On ne se posera pas deux fois cette question. Lorsqu'un élève commet une erreur, le professeur la corrige-t-il lui-même ? invite-t-il l'élève à reprendre sa réponse ? De telles questions reviennent de nombreuses fois dans l'étude du déroulement de la séquence et définissent différentes modalités de sa pratique

Une première façon de considérer la pratique enseignante d'un professeur est de considérer, dans leur ensemble, toutes les réponses aux questions posées qui ont permis de comparer les pratiques des professeurs. En conservant notre double entrée (en fonction des apprentissages des élèves et en fonction de l'exercice du métier) nous cherchons à interpréter la répartition des modalités de certaines activités d'un professeur pour savoir si elles sont marquées par une direction générale qui pourrait, par exemple, être issue de ses conceptions sur les mathématiques, sur leur apprentissage et sur leur enseignement.

Quelle cohérence ?

Une autre manière de questionner les pratiques enseignantes d'un même professeur est de croiser les analyses de différentes activités à la recherche de traces de la cohérence interne de la pratique aux niveaux où nous les analysons. Nos interrogations précédentes sur les différentes activités d'un professeur se prolongent donc aux relations entre ces activités, relations que nous cherchons en croisant les résultats de nos analyses sur ces activités. Supposons par exemple que l'examen du projet d'enseignement de tel professeur nous conduise à soutenir qu'il s'efforce de mettre ses élèves en situation de recherche. Comment l'examen des activités des élèves en classe vient-il rencontrer les conclusions relatives au projet ? Avec ces questions liées à la cohérence des pratiques enseignantes, nous cherchons à savoir comment les professeurs hiérarchisent leurs choix, quelle logique émerge de leur pratique d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux. Nous cherchons aussi à savoir comment ils intègrent les contraintes

liées au métier. Nous pensons notamment à celle du temps, que les enseignants évoquent souvent sur le terrain, à celle des programmes et du manuel utilisé, mais aussi à des contraintes plus directement liées à la gestion de la classe comme à celle du climat général de bonne entente et de confiance à entretenir...

Et quelles compensations ?

Nous nous demandons en outre si, malgré une convergence de certains résultats, d'autres ne viennent pas aussi contrarier une logique apparente à un niveau donné des analyses. Et, en ce cas, comment interpréter ce qui apparaît comme des incohérences ? Une piste est à explorer : celle des contraintes liées à l'exercice du métier qui peuvent, parce qu'elles se situent à un niveau différent de celui des apprentissages, expliquer que les professeurs fassent des concessions à un niveau donné. Nous cherchons aussi les contreparties éventuelles que le professeur tirerait à un autre niveau de certaines concessions.

Pour interpréter ce qui, parce que les analyses sont effectuées à un niveau donné, apparaît comme des contradictions à l'hypothèse de cohérence interne des pratiques enseignantes, nous parlons de compensations. Prenons l'exemple de la contrainte du temps. Le temps (les enseignants déclarent toujours en manquer), d'une manière globale, peut assurer une certaine cohérence à une pratique : comment influence-t-il les choix des professeurs sur l'ensemble de la séquence ? Il peut aussi être une source de tension et de contradiction au sein d'une pratique d'enseignement : au fur et à mesure que le temps passe, la pratique enseignante des professeurs évolue-t-elle ? Si oui, comment et avec quelle importance ? Plus localement encore un professeur qui aurait demandé par trois fois au même élève de reprendre sa réponse toujours incorrecte peut "céder" et lui donner enfin la bonne réponse pour éviter de créer une situation gênante voire conflictuelle. Cet exemple illustre comment le fait de prendre en compte l'exercice du métier permet, en évoquant une compensation, d'expliquer ce qui apparaît comme une contradiction du seul point de vue de l'apprentissage de l'élève.

Ajoutons enfin, du point de vue de nos choix méthodologiques, que des réponses à de telles questions permettront de confirmer ou d'infirmer l'intérêt d'avoir observé "tout l'enseignement" de chaque professeur.

Cette approche des pratiques intéresse nécessairement la formation quant aux moyens à mettre en œuvre pour faire évoluer une pratique sachant que sa logique interne assure une certaine cohérence donc une certaine stabilité. Des moyens à déployer qui semblent *a priori* d'autant plus lourds que cette logique est déterminante sur la pratique enseignante du professeur.

Nous allons maintenant présenter la méthodologie globale adoptée. Nous définirons nos besoins en ce qui concerne les données à recueillir sur les séances observées. Cela nous conduira à la méthode adoptée pour en transcrire les enregistrements puis aux moyens mis en œuvre pour analyser les pratiques des enseignants.

3. Méthodologie générale

La question globale que nous nous posons en abordant cette recherche est donc celle de “l’enseignement ordinaire” de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième. Plusieurs lectures des observations effectuées dans des classes de sixième sont mises en œuvre pour analyser les pratiques enseignantes. Rappelons que ces pratiques sont étudiées à la fois pour leurs effets sur l’apprentissage des élèves et pour les conditions professionnelles qui les déterminent. Par des comparaisons, nous nous proposons de déceler et d’interpréter des similitudes et des divergences entre les séquences observées.

La pratique d’enseignement de la multiplication des décimaux d’un professeur regroupe toutes ses activités, avant et pendant la classe, pourvu qu’elles concernent cette séquence. Notre recherche porte sur l’ensemble de ces activités, la méthodologie doit donc permettre d’analyser le projet et son animation, en conjuguant deux points de vue : l’apprentissage des élèves et l’exercice du métier. Nous présentons ici la méthodologie globale adoptée, les méthodologies particulières sont décrites précisément dans chacun des chapitres concernés de la présentation de nos travaux.

Les séquences observées, les professeurs et leurs classes

Pour la partie expérimentale de notre recherche, nous avons “fixé”, autant que possible, toutes les variables sauf celles qui concernent le professeur en tant que personne.

Un sujet mathématique commun et des séquences complètes

La situation d’enseignement est la même pour les quatre professeurs, elle concerne la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième conformément aux programmes de 1995. Cet enseignement comprend la technique opératoire ainsi que la résolution de problèmes issus de situations multiplicatives. Rappelons aussi que nous avons observé l’ensemble de la séquence d’enseignement de cette notion par chaque professeur, cela afin d’éviter de retenir une séance que le professeur aurait jugée trop particulière sans que nous soyons en mesure de l’apprécier.

Un contexte institutionnel propice à l’étude d’un enseignement ordinaire

La multiplication des décimaux s’effectue en classe de sixième depuis le changement de programme de 1995. Auparavant, cet enseignement incombait aux professeurs d’école et aux instituteurs, généralement en CM2 c’est-à-dire durant la dernière année de la scolarité de l’école élémentaire. Nous avons observé les professeurs durant l’année scolaire 1997-1998, la première année de mise en application du nouveau programme pour la sixième.

Ainsi, en profitant du contexte institutionnel, nous avons déterminé un objet d’enseignement pour lequel les professeurs ne pouvaient chercher à nous présenter une leçon originale qu’ils auraient préparée spécialement pour notre visite. Ils ont préparé cette séquence parce qu’ils devaient enseigner, pour la première fois, la multiplication des décimaux. La notion leur était cependant familière car elle

figurait comme un prérequis dans le programme de sixième précédant, les professeurs avaient donc déjà été confronté aux difficultés d'apprentissage des élèves concernant cette notion.

Des classes comparables, des conditions d'enseignement analogues

Nous avons observé plusieurs professeurs dans des classes de tous niveaux, certains enseignaient dans des classes dites difficiles de collèges situés en ZEP²⁴ en Seine Saint-Denis et d'autres dans des "bonnes classes" de collèges d'arrondissements favorisés de la capitale. Nous nous attendions à ce que les pratiques des professeurs soient dépendantes du niveau des classes et des réactions des élèves. Mais nous ne savions pas vraiment apprécier la contribution du facteur "niveau de la classe" sur la pratique du professeur ; les différences constatées étaient très importantes quant à la pratique enseignante alors que les élèves commettaient les mêmes erreurs au début de leur apprentissage. Compte tenu de notre problématique concernant l'enseignement ordinaire, nous avons renoncé à la comparaison de séquences pour lesquelles le niveau des élèves était trop différent. Nous avons donc restreint la partie expérimentale de notre travail, à l'observation de classes de niveau standard²⁵ dans des collèges moyens de proche banlieue ou d'arrondissements populaires de Paris.

Ce faisant, nous avons décidé, tant que faire se peut, d'observer les séquences de plusieurs professeurs, toutes choses égales par ailleurs. La notion enseignée, la date des observations et le niveau des classes étant déjà fixés, nous avons finalement retenu dans cette recherche les séquences d'enseignement pour lesquelles les professeurs disposaient du même horaire hebdomadaire (trois heures en classe entière) dans des classes d'effectifs comparables (de 26 à 29 élèves) et utilisaient le même manuel scolaire (Collection *Cinq sur cinq*, Hachette).

Les professeurs observés

Nous définirons plus loin les moyens utilisés pour l'observation, indiquons simplement ici que nous avons procédé à un enregistrement audio des séances, que nous avons eu des entretiens avec les professeurs, et qu'en classe, nous avons noté les inscriptions au tableau, les déplacements du professeur et les énoncés des exercices proposés aux élèves.

Nous avons finalement retenu quatre professeurs qui possédaient au moins une dizaine d'années d'expérience professionnelle en collège lors de nos visites. Ils étaient tous volontaires, n'ayant pour autre motivation que celle de rendre service à un collègue qui menait une recherche sur l'enseignement des mathématiques. L'expérience professionnelle des professeurs peut cependant se nuancer. Deux professeurs sont (ou ont été) formateurs et conseillers pédagogiques, l'un des deux

²⁴ Zone d'Éducation prioritaire

²⁵ Au dire même des professeurs compte tenu de leur expérience et/ou des évaluations de début d'année. Nous n'avons pas eu les moyens de vérifier ces affirmations par les résultats des classes aux évaluations nationales d'entrée en sixième car l'année scolaire 1997-98 a été une année particulière (les évaluations n'ont pas été obligatoires et payantes pour les établissements scolaires) si bien que nous ne disposons pas d'information standardisée pour toutes les classes.

participe à des travaux menés par l'APMEP²⁶ et se tient informé des recherches en didactique des mathématiques. Les deux autres ne sont impliqués dans aucune action de formation ni en tant que formateur ni en tant que conseiller pédagogique.

Pour des raisons déontologiques nous avons anonymé les enseignants en attribuant à chacun le nom d'un mathématicien ou d'une mathématicienne. Ainsi, nous évoquerons dans toute la suite de cette recherche les noms de Theano, Agnesi, Bombelli et Germain pour citer les professeurs qui ont eu l'amabilité de nous accueillir et de nous permettre de les enregistrer, ce qui n'est pas une situation toujours très agréable.

La constitution de données analysables à partir des séances enregistrées

La réalité observée est trop riche et trop complexe pour nous être entièrement accessible, nous en retiendrons donc seulement une partie. Précisons et justifions nos choix de découpage de cette réalité pour constituer des données qui, elles, seront analysables. Notre problématique concerne les pratiques ordinaires d'enseignement de la multiplication en classe de sixième. Nous avons choisi une direction "ascendante" pour notre recherche, ainsi partons-nous des observations pour déterminer des régularités et des variations au sein des pratiques enseignantes des professeurs observés. Il nous a fallu adopter un point de vue médian sur les situations d'enseignement en travaillant à la fois sur des aspects généraux, pour déterminer ce qu'il y avait de commun aux situations particulières, mais aussi sur des aspects plus individuels pour montrer la spécificité de chaque situation.

Le projet d'enseignement du professeur : une reconstitution approuvée

Pour étudier les pratiques selon la composante qui concerne l'apprentissage des élèves du point de vue des situations rencontrées, nous devons pouvoir analyser le projet du professeur et particulièrement le scénario de sa séquence, c'est-à-dire l'ensemble des tâches prévues pour ses élèves avec les formes de gestion de la classe associées durant leur réalisation.

L'activité du professeur qui prépare ses cours est difficilement accessible car dans une pratique ordinaire, la préparation est complètement privée. En demandant d'observer²⁷ cette préparation, nous craignons de la perturber dans ce qu'elle a d'habituel. Comme nous souhaitions observer un enseignement ordinaire, nous ne voulions pas participer à la programmation de la séquence car nous redoutions qu'un professeur réponde à ce qu'il pense être l'attente d'un chercheur en didactique des mathématiques ou à des consignes données par des formateurs ou des inspecteurs. Nous avons finalement choisi de n'avoir aucun accès direct à l'activité de préparation des cours. Le projet d'enseignement d'une séquence est

²⁶ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

²⁷ Nous pensons ici à une observation sans participation bien qu'il soit possible d'envisager une participation du chercheur à l'élaboration du projet à enseigner par le professeur.

rarement rédigé et ce qui est noté par le professeur est totalement insuffisant pour décrire ce qu'il a prévu car une partie très importante reste implicite. Afin de respecter au mieux les conditions d'un enseignement ordinaire, nous n'avons pas demandé à chaque professeur de mettre par écrit son projet pour cette séquence de la façon la plus complète possible. Pour ne pas gêner les professeurs qui nous ont accueilli dans leur classe sans être déchargé de leurs cours avant et après notre venue, nous n'avons pas demandé aux professeurs de nous décrire de façon systématique leur projet avant la classe et leurs impressions après la séance, nous nous sommes contenté, dans un premier temps, de déclarations spontanées.

Nous avons donc finalement opté pour une reconstitution du projet de chaque professeur à partir des observations (enregistrements, notes et entretiens). Pour cette reconstitution, nous avons découpé chaque séance en unités élémentaires que nous appelons épisode. Nous entendons par épisode un enchaînement d'actes pédagogiques et d'échanges entre le professeur et les élèves en vue de parvenir à un but donné qui est en général la réalisation d'une tâche (y compris, rappelons-le, écouter ou regarder). Pour chaque épisode, nous notons la tâche prescrite (énoncé d'exercice, question posée, leçon à lire ou à copier...), ce que fait le professeur et ce que font les élèves. La reconstitution complète permet de retracer le plan général prévu par le professeur pour présenter les contenus choisis, les entretiens avec le professeur donnent des indications complémentaires relatives à ce qu'il a pensé devoir faire et aux justifications de ses choix.

Mais comment apprécier la fiabilité de notre reconstitution ? Le déroulement comprend des éléments de préparation comme les documents fournis aux élèves qui sont, pour le chercheur, autant d'éléments tangibles du projet du professeur. Cependant, le déroulement de la séquence comprend aussi des éléments où peuvent se mêler la préparation et des improvisations qui correspondent à des adaptations aux réactions des élèves de la classe. Aussi, pour nous assurer que notre reconstitution correspondait bien au projet de l'enseignant, nous l'avons soumise à son approbation lors d'un entretien. Cette étape méthodologique de notre travail pour reconstituer les projets nous a permis aussi d'affiner les arguments des professeurs qui nous ont livré plus précisément ce qu'ils avaient pensé pour élaborer le scénario de cette séquence. Sans doute avons-nous donné aux professeurs l'occasion de procéder à quelques rationalisations *a posteriori* mais ce phénomène n'a aucune incidence sur notre recherche fondée principalement sur le déroulement des séquences.

Trois types de données sur le projet d'enseignement de la séquence

Nous avons exposé notre méthode de reconstitution du projet du professeur, projet qui concerne sa pratique avant la classe. Nous abordons ici, d'une manière globale, la définition de données analysables sur ce projet, les détails seront exposés dans le chapitre consacré à l'analyse des projets des professeurs. Nous sommes à la recherche de régularité et de diversité au sein des pratiques enseignantes. Pour comparer les projets d'enseignement des professeurs, nous adoptons deux approches, l'une assez globale pour déterminer d'éventuelles convergences au sein de projets personnels et l'autre plus locale pour montrer la particularité de chaque projet.

Globalement, nous repérons dans la séquence les contenus mathématiques abordés (techniques de calcul écrit ou mental, propriétés de l'opération), et nous les incluons dans la reconstitution du projet du professeur. Ces contenus sont déterminés par l'enseignant en fonction de contraintes professionnelles comme celle du programme officiel, celle d'utiliser tel manuel ou d'autres que nous cherchons à déterminer, et peut-être aussi en fonction de son expérience professionnelle et de conceptions personnelles sur les mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage. Le professeur organise les contenus de la séquence et leur présentation en classe. Nous traçons *a posteriori* "l'itinéraire" prévu (la succession) pour les élèves. Plus localement, nous repérons les tâches des élèves : les situations de découverte des savoirs visés, la validation des nouvelles connaissances, leur formulation et leur mise en fonctionnement dans des nouvelles situations.

Nous retenons donc trois types de données des projets d'enseignement des professeurs : les contenus, leur organisation et les tâches prévues pour les élèves. Toute indication relative à ces données sera portée dans les transcriptions des enregistrements des séances.

Deux observables du déroulement de la séquence

Après avoir indiqué les données que nous extrayons des projets des professeurs pour mener nos analyses de leur pratique en amont de la classe, nous allons maintenant nous attacher à l'explicitation des choix effectués pour définir les observables de leur pratique en classe.

Les "activités effectives" des élèves en classe

Pour explorer la composante des pratiques enseignantes qui concerne l'apprentissage des élèves du point de vue des situations qu'ils ont rencontrées, l'analyse du projet seul n'est pas très satisfaisante. On sait bien qu'un décalage important peut apparaître entre un projet et sa réalisation en classe, du fait même du professeur²⁸. En outre, les accompagnements de la réalisation des tâches proposées orientent le travail des élèves, peuvent modifier sensiblement les tâches, et influencent l'activité réelle des élèves. Néanmoins, rappelons que l'accès à l'activité véritable de chaque élève qui réalise la tâche prescrite par son professeur est impossible. D'abord parce qu'elle s'effectue essentiellement en pensée²⁹, ensuite parce que l'expression écrite de l'activité de l'élève est souvent inexistante dans les classes de sixième observées où les discussions animées par le professeur

²⁸ Ce type de décalage apparaît de façon flagrante lors de l'utilisation d'un même scénario par deux professeurs. On pourra consulter par exemple :

JOSSE E. & ROBERT A. (1993), Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques* 13 (119-154), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

²⁹ Et nous savons bien que de nombreux facteurs influencent la pensée de l'élève dès la lecture de la tâche, nous pensons notamment ici aux manifestations inconscientes, au rapport au savoir mais aussi au fait qu'ils peuvent penser à autre chose ou à deux choses à la fois

sont fréquentes. Nous analyserons à la fois ce qui précède directement cette activité et ce qui émerge de cette activité, c'est-à-dire ce que devait faire l'élève et ce qu'il dit ou montre de ce qu'il fait ou de ce qu'il a fait. Nous n'avons donc accès qu'à l'activité potentielle des élèves.

En outre, la technique d'enregistrement permet de recueillir les propos des élèves interrogés mais pas ceux qui ont des échanges plus personnels donc souvent discrets. Ces contraintes nous imposent donc de considérer davantage la classe d'élèves que chaque élève individuellement. Et puisque nous ne pouvons pas étudier les activités réelles des élèves, même de ceux qui s'expriment en classe, nous retiendrons seulement pour cette recherche les activités potentielles des élèves pour lesquels nous disposons de traces de leur activité. Nous les appelons les "activités mathématiques effectives (des élèves) de la classe". Finalement, notre matériel n'est pas partiel par rapport à celui du professeur en classe qui, lui aussi, pour enseigner, élabore des hypothèses sur l'activité d'un élève en fonction de ce qu'il doit faire et de ce qu'il exprime.

Ainsi, pour chaque épisode qui, rappelons-le, correspond généralement à la réalisation d'une tâche, nous retenons les activités de la classe effectivement constatées pour cette réalisation. Activités qui apparaîtront donc dans les transcriptions des enregistrements des séances.

Les adaptations du professeur aux réactions des élèves de sa classe

Comme nous l'avons indiqué par nos choix théoriques, nous souhaitons tenir compte pour analyser les pratiques enseignantes, de facteurs, de l'ordre des médiations, qui influencent aussi l'apprentissage des élèves. Dans cette perspective, il est pertinent de retenir tous les discours non strictement mathématiques qui servent à désigner et à organiser les connaissances, toutes les aides, verbales ou non, individuelles ou collectives, tous les échanges entre le professeur et les élèves ou entre élèves... Les discours de structuration du savoir sont peu nombreux dans les classes de sixième des professeurs qui nous ont accueilli. En revanche, même en nous limitant aux manifestations verbales, nous avons repéré, en assez grand nombre, des aides ou des échanges entre le professeur et les élèves.

Lorsqu'il interroge sa classe, le professeur induit une réflexion sur le savoir visé qui est orientée par sa question. Parfois, la réponse à la question posée n'est pas jugée satisfaisante par l'enseignant, autrement dit, la dynamique d'apprentissage propre à l'élève qui a répondu ne coïncide pas avec celle que le professeur s'applique à animer pour l'ensemble de la classe³⁰. Il arrive aussi qu'un élève prenne l'initiative d'interroger l'enseignant, ce que nous interprétons de la même façon. Ainsi, que l'élève questionne son professeur ou qu'il fournisse une réponse jugée non satisfaisante, la réaction de l'enseignant constitue bien une de ces médiations que nous nous proposons d'analyser. En travaillant sur les enregistrements des séances observées, nous avons limité le repérage des

³⁰ Nous nous inspirons ici de l'approche de l'activité de l'enseignant par Janine Rogalski (1999) qui considère la classe comme un environnement dynamique.

médiations aux interventions verbales du professeur qui répondent à une manifestation, elle aussi verbale, d'un ou de plusieurs élèves. Nous savons bien que, parfois, d'autres manifestations de la classe peuvent agir sur le discours du professeur : soupir, grimace, agitation... Nous faisons l'hypothèse que cette restriction n'invalide pas nos analyses. Les médiations que nous étudions dans cette recherche sont donc, finalement, constituées par les adaptations du professeur aux réactions verbales des élèves de sa classe.

Le matériel à utiliser : sources publiées et sources expérimentales

Nous étudions les pratiques des professeurs en tenant compte de l'exercice du métier mais la finalité de notre travail reste bien l'apprentissage des élèves, apprentissage qui dépend de manière fondamentale des situations rencontrées, et ce malgré les réserves que nous avons déjà exprimées concernant l'importance d'autres facteurs (manifestations inconscientes, rapport au savoir...). Ces deux axes de notre recherche expliquent que nous ayons eu besoin, pour nourrir nos analyses, de consulter différentes publications : des ouvrages pour cerner les enjeux de savoir dont la multiplication des décimaux est l'objet, les programmes officiels qui définissent les objectifs de l'institution scolaire dont dépendent les professeurs observés, des publications qui contiennent des propositions pour enseigner la multiplication des nombres décimaux et enfin, des évaluations de compétences des élèves qui indiquent certaines difficultés d'apprentissage que les enseignants doivent prendre en compte.

Les sources documentaires de notre recherche

Nous allons présenter brièvement les sources publiées que nous avons utilisées : nous commençons par les programmes, nous indiquons ensuite les différentes publications qui peuvent être consultées par un professeur et conduire à son projet d'enseignement, nous terminons par les évaluations de compétences des élèves qui nous ont permis de valider une part de ce que les professeurs déclarent savoir des connaissances et des difficultés de leurs élèves.

Les programmes, les compléments et les instructions officielles

Nous avons utilisé les programmes actuels mais aussi les programmes antérieurs. Leur confrontation peut montrer une évolution de la position de l'institution scolaire mais aussi, elle permet de retracer l'histoire d'un enseignement et donc d'accéder à ce que les professeurs expérimentés connaissent de cet enseignement. Nous avons consulté les programmes de l'enseignement primaire sur la multiplication et sur les décimaux avant et depuis 1995, et sur la multiplication des nombres décimaux avant 1995. Nous avons également étudié l'ensemble du programme de 1995 pour la classe de sixième et particulièrement tout ce qui concerne la multiplication des décimaux.

Les manuels scolaires

Les manuels scolaires constituent une source documentaire fondamentale pour les enseignants. A ce titre ils nous intéressent dans nos analyses de l'élaboration du projet d'enseignement. En outre, l'équipe de rédaction d'un

manuel comporte des professeurs, ces ouvrages peuvent donc aussi se lire, malgré les contraintes des éditeurs dont le premier objectif est de vendre ces livres, pour percevoir une position de la profession enseignante sur une notion donnée. L'analyse de manuels actuels pour la dernière année d'école élémentaire donnera une image de l'enseignement que les élèves ont reçu avant d'entrer en classe de sixième. Enfin, la confrontation des manuels de primaire, antérieurs au changement de programme de 1995, et ceux de collège, édités depuis, permettra de montrer une continuité, ou une rupture, dans l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

Les publications à l'intention des professeurs

Les publications à l'intention des professeurs constituent une autre source pour, d'une part, analyser les projets et, d'autre part, accéder au débat éventuel qui anime la profession ainsi qu'une partie de la noosphère sur l'enseignement de la multiplication des décimaux. Ainsi, nous avons consulté des brochures pédagogiques et des articles, des publications pour la formation continue des professeurs ainsi que des publications pour la préparation du concours de recrutement des Professeurs d'Ecole.

Les publications de recherches en didactique des mathématiques

Comme nous l'avons dit, les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur les nombres décimaux et sur la multiplication étaient déjà nombreux lorsque nous avons choisi la notion dont nous voulions étudier l'enseignement. Ces travaux nous ont permis d'utiliser de nombreux résultats concernant l'analyse épistémologique de la notion, les enjeux didactiques dont elle est l'objet, des propositions d'enseignement ainsi qu'une première analyse de l'impact de ces travaux sur l'enseignement ordinaire.

Les évaluations des compétences des élèves

Nous terminons la présentation des sources documentaires utilisées dans cette recherche par les publications des évaluations des compétences des élèves. Comment les professeurs tiennent-ils compte des acquis et des lacunes ? Cette question se pose nécessairement durant l'analyse d'un projet d'enseignement. Nous avons consulté les résultats de différentes évaluations concernant les compétences inhérentes au savoir dont nous étudions l'enseignement. Ainsi avons-nous utilisé les résultats des évaluations incluses dans des recherches ou des articles à l'intention des professeurs, des évaluations menées par l'APMEP et, bien sûr, des évaluations ministérielles (DEP et DP&D ³¹) à l'entrée en sixième.

³¹ Ces évaluations nationales que nous avons déjà évoquées sont prises en charge par la direction chargée de l'évaluation au Ministère de l'Education nationale. Pour la période qui nous intéresse, cette direction a porté le nom de DEP (Direction de l'Evaluation et de la Prospective) puis de DP&D (Direction de la Programmation et du Développement). L'équipe chargée de l'élaboration des outils d'évaluation est composée d'un Inspecteur Général de l'Education nationale, d'Inspecteurs Pédagogiques Régionaux (c'est-à-dire de l'enseignement secondaire),

Les sources expérimentales de notre recherche

Les sources expérimentales de notre recherche sont constituées des transcriptions des enregistrements des séances observées ainsi que des notes prises durant ces séances et les entretiens que nous avons eus avec les professeurs. Nous allons exposer et justifier nos choix de transcription des enregistrements puis de transformation de ces transcriptions en observables pour mener nos analyses des pratiques enseignantes.

Les sources brutes : enregistrement des séances et notes écrites

Les quatre professeurs ont été observés sur une durée relativement courte mais qui possède une unité de sens : l'ensemble de la séquence d'enseignement. Il s'agit donc d'une étude synchronique. Cette durée varie de 2 h 30 à 5 h, les deux valeurs intermédiaires étant 3 h et 3 h 30. Au total, nous disposons donc de 14 h d'enregistrement.

Les séances ont été enregistrées de façon à perturber le moins possible la classe et le comportement du professeur, en particulier sa mobilité. Nous avons en effet procédé à un enregistrement audio à l'aide d'un dictaphone porté par l'enseignant dans une poche, et relié à un micro-cravate, si bien que seule l'agrafe du micro était apparente. Nous avons eu quelques brefs entretiens avec les professeurs concernant leur projet ou leurs impressions concernant les réactions des élèves. Un entretien plus long et plus construit avec chaque professeur a eu lieu pour valider la reconstitution du projet d'enseignement. Durant l'observation des séances, nous avons noté les inscriptions au tableau, les déplacements du professeur dans la classe, les énoncés des exercices proposés aux élèves.

Des bandes enregistrées aux narrations : une méthode de transcription

Nous disposons de 14 séances enregistrées et des notes prises durant ces séances. Un ensemble qu'il fallait transcrire pour pouvoir l'analyser. Avant d'avoir évalué le travail que cela aurait nécessité, nous avons envisagé de reporter mot à mot le contenu des quatorze heures d'enregistrement et d'indiquer, en respectant la chronologie, les déplacements du professeur, les inscriptions au tableau, les énoncés des exercices... Mais compte tenu des données que nous devons recueillir pour mener nos analyses, une telle transcription est apparue démesurée. Nous nous sommes contenté de reporter, en écoutant les bandes magnétiques, les éléments dont nous avons besoin. Utiliser alors le terme de "transcription" des enregistrements nous semble impropre, nous préférons utiliser par la suite l'expression "narration des séquences observées". Il nous reste à préciser comment sont rédigées ces narrations.

Les notes prises durant l'observation des séances étaient suffisantes pour en repérer les parties correspondant à des objectifs généraux et les épisodes. Pour

d'un Inspecteur de l'Éducation nationale (c'est-à-dire de l'enseignement primaire), de Professeurs d'IUFM, de Collège et d'École

rédigé les narrations des séquences observées, nous avons indiqué de façon chronologique :

- par un titre, l’objectif poursuivi durant plusieurs épisodes de la séance. Par exemple, le titre “Multiplier par 0,25 c’est diviser par 4” indique une suite d’épisodes consacrés à cet enseignement. Eventuellement, l’énoncé de l’exercice à chercher ou qui va être corrigé est indiqué ;

- par un sous-titre, chaque épisode. Par exemple, “Etude d’un exemple : $16 \times 0,25$ ” ;

- sous chaque sous-titre :

- ce que fait l’enseignant : ce qu’il dit, ce qu’il écrit, ses déplacements dans la classe ;

- la tâche proposée et les consignes ;

- ce que font les élèves : ce qu’ils disent, celui qui est interrogé mais aussi ceux qui prennent la parole à haute voix pour se faire entendre du professeur ;

- des indications concernant le contexte de la classe : attention, agitation, niveau sonore, etc

Voici, dans la séquence de Madame Theano, l’épisode cité ci-dessus où sont transcrites, mot à mot, les paroles du professeur et des élèves puis le même épisode tel qu’il apparaît dans la narration ³².

– [E] Fois 0,25 c’est comme diviser par 4

– [P] Alors ça, ça m’intéresse bien, on va essayer de vérifier ce qu’il est en train de me raconter.

– [E≠] Bah oui !

– [P] T’as entendu ce qu’il a dit ? Alors, on va essayer de faire un exemple pour voir si il ne s’est pas trompé. Donne-moi une multiplication par 0,25 et on va regarder. On va essayer de montrer que multiplier par 0,25, un nombre, donc on en prend un au hasard, bon enfin je vais pas le prendre tout à fait au hasard. si je prenais 16, 16 fois 0,25

Elle écrit

$$16 \times 0,25 =$$

il me dit que multiplier par 0,25 c’est pareil que diviser par 4 donc quelle opération je vais faire ici pour voir si il a raison ? Vous avez entendu ce qu’il a dit ? Il a dit, si je multiplie par 0,25, c’est pareil que .

– [E] Diviser par 4.

– [P] Diviser par 4

– [E] Bah oui parce que .

– [P] C’est pas évident cette histoire.

– [E=] Si parce que .

– [P] Qu’est-ce que tu en penses ?

– [E≠] On pourrait faire euh .. 16 divisé par 4 ?

– [P] Bon, alors on fera ici 16 divisé par 4 et on va regarder si il a raison

Elle écrit à côté de $16 \times 0,25 =$ $16 \div 4 =$

Ouais ? Qui est-ce qui veut faire ? Ah oui mais remarquez si je demande ceux qui veulent faire celle là et ceux qui veulent faire celle là.

– [E] C’est la même chose !

³² Dans la transcription mot à mot, [E] indique un élève, [E≠] indique un élève différent du précédent, [E=] indique l’élève identique au précédent, [P] indique le professeur

- [P] Ah oui mais dis, celle là elle est plus longue que . peut-être Bon euh hein ben, sur le cahier d'exercices faites-moi les deux opérations, regardez ce qui se passe, sur le cahier d'exercices ..

- [E] Madame, madame ? On pose euh, on pose la division ?

- [P] $16 \div 4$ t'as besoin de la poser ?

- [E=] Non.

- [P] Bon.

Recherche des élèves Madame Theano envoie un au tableau et circule dans les rangs

Allez, allez, faites-la, faites-la la multiplication.

Elle va voir l'élève qui ne savait plus faire les multiplications.

Voici maintenant la narration de cet épisode³³ :

35. Multiplier par 0,25 c'est diviser par 4

351. Etude d'un exemple : $16 \times 0,25$

Madame Theano répète l'affirmation selon laquelle multiplier par 0,25 revient à diviser par 4 puis propose de la tester sur un exemple qu'elle inscrit au tableau :

$$16 \times 0,25 =$$

Un élève affirme que ça revient à diviser par 4 L'enseignante voudrait le prouver.

Un autre élève propose de calculer $16 \div 4$ L'enseignante écrit $16 \div 4$ à côté de la multiplication.

$$16 \times 0,25 = \quad 16 \div 4 =$$

L'enseignante appelle deux élèves pour effectuer les deux opérations puis se reprend (en invoquant une injustice liée à une différence importante de difficulté d'exécution des deux opérations) et demande à tous les élèves d'effectuer les deux opérations sur leur cahier.

Madame Theano circule dans les rangs Un élève lui demande s'il faut poser la division $16 \div 4$, elle lui demande à son tour s'il en a vraiment besoin

L'enseignante envoie un élève au tableau puis se dirige vers un élève qui ne sait plus effectuer les multiplications (cf. paragraphe 1321) et lui demande comment il fait.

Avant de détailler les méthodes globales d'analyse des différentes sources (publiées et expérimentales), nous allons montrer comment les narrations permettent de repérer les adaptations des professeurs Dans cet épisode, Madame Theano propose une tâche : tester sur un exemple donné la validité d'une règle de calcul mental : pour multiplier par 0,25, on divise par 4. Lorsqu'un élève a proposé de diviser par 4 au lieu de multiplier par 0,25, Madame Theano n'a pas validé elle-même l'affirmation mais elle l'a soumise à la réflexion de toute la classe par l'étude d'un cas particulier. Et quand un élève lui demande s'il faut poser la division $16 \div 4$, Madame Theano lui demande s'il en a vraiment besoin. Par deux fois dans cet épisode, le professeur n'apporte pas de réponse à l'interrogation d'une partie de la classe mais elle relance la réflexion pour que les élèves répondent eux-mêmes

Voyons maintenant comment nous avons mené les analyses des sources utilisées dans le cadre de cette recherche.

³³ Dans l'extrait suivant, le numéro 35 correspond au cinquième objectif de la troisième séance de Madame Theano (séquence n°1).

Quelles analyses des différentes sources utilisées ?

Afin de répondre à notre question sur les pratiques ordinaires de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième, nous allons confronter une analyse *a priori* de cet enseignement et une analyse des cours réellement donnés par quatre professeurs qui exercent dans des conditions comparables. Pour étudier les pratiques enseignantes, nous distinguerons la préparation des cours de l'animation du projet élaboré par le professeur.

Une analyse a priori de l'enseignement de la multiplication : trois étapes

Décimaux et multiplication : analyse des enjeux mathématiques

Le thème choisi pour cette recherche est au carrefour de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques. Nous les utilisons pour déterminer les enjeux mathématiques et d'enseignement dont les deux notions (les nombres décimaux et la multiplication) sont l'objet. Nous déterminons les situations de référence pour ces notions, leurs écritures et leurs transformations, leurs propriétés ainsi que les techniques de calcul. Nous confrontons les résultats obtenus avec les programmes officiels pour déterminer la position institutionnelle sur l'enseignement de ces deux notions. Nous obtenons aussi une indication sur les possibles concernant les connaissances des élèves à l'entrée en sixième alors qu'ils n'ont pas encore étudié la multiplication de deux nombres décimaux (non entiers).

La multiplication des décimaux, quelle transposition didactique ?

Alors que les nombres décimaux et que les situations multiplicatives ont été étudiées à l'école primaire, quels seraient les enseignements envisageables de la multiplication des nombres décimaux ? Pour répondre à cette question sans tenir compte des contraintes spécifiques à l'enseignement actuel dans une classe de sixième, nous analysons les propositions qui figurent dans diverses publications : manuels scolaires, brochures à l'intention des professeurs et recherches en didactique des mathématiques. Ces différentes propositions sont comparées et classées pour servir de référence à l'analyse des séquences réellement enseignées par les professeurs que nous avons observés.

Pour analyser les enseignements proposés dans ces publications, nous utilisons des critères développés en didactique des mathématiques. Nous repérerons la dynamique savoir ancien/savoir nouveau (notamment dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux) ainsi que les dialectiques contextualisation/décontextualisation des savoirs en jeu (l'opération, ses propriétés et la technique opératoire). Nous décrivons la nature des tâches prévues pour les élèves, nous repérons notamment les mises en œuvre de dialectiques outil/objet des savoirs et nous distinguons celles qui ne demandent que des applications directes de techniques opératoires (mentales ou écrites) de celles où l'élève doit, soit reconnaître la structure multiplicative de la situation, soit mettre en fonctionnement des propriétés de la multiplication (calcul raisonné). Nous n'étudions pas l'exposition des savoirs car les publications sont très hétérogènes de ce point de vue : dans les publications destinées aux enseignants, le savoir n'est pas exposé car le lecteur est supposé le maîtriser.

La transposition didactique à l'épreuve de l'exercice du métier

Nous complétons l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième par une étude de deux facteurs qui, nous l'admettons et nous tenterons de le vérifier, influencent les choix des professeurs dans l'élaboration de leur projet d'enseignement : les élèves et le programme.

Les élèves sont ici étudiés, par le biais des résultats à différentes évaluations de compétences. Il s'agit de déterminer ce qu'ils savent déjà (sur les nombres décimaux et sur la multiplication d'un décimal par un entier) et quelles sont les difficultés d'apprentissage connues sur la multiplication de deux décimaux.

Le programme est analysé pour ce qui concerne spécifiquement la multiplication des décimaux mais aussi dans son ensemble parce que cette notion est réinvestie, cette même année de sixième, dans l'étude d'autres savoirs mathématiques. Les professeurs conçoivent un enseignement qui s'intègre dans le programme de l'année scolaire. Une analyse de type écologique³⁴ permettra une étude préalable de cette intégration. Nous tiendrons compte enfin du temps dont les professeurs disposent pour leur enseignement.

En croisant ces résultats et en adoptant la position d'un professeur fictif qui posséderait une solide expérience professionnelle et qui aurait la charge d'une classe de sixième de niveau standard, nous définissons un cadre dans lequel doit s'inscrire l'enseignement de la multiplication des décimaux par les professeurs que nous avons observés.

L'analyse des pratiques avant la classe : l'élaboration du projet

L'analyse *a priori* se nourrit enfin de l'étude des projets des professeurs. Nous abordons pour chaque séquence : son contenu, son organisation et les tâches proposées aux élèves.

Ces trois dimensions sont étudiées en fonction de l'apprentissage qu'ils peuvent induire d'après nos analyses. Les projets des quatre professeurs observés sont comparés. Nous identifions les choix de chaque professeur en ce qui concerne le contenu abordé et son organisation. Pour ce faire, nous mettons en fonctionnement des outils d'analyse élaborés en didactique des mathématiques, ceux que nous avons utilisés pour analyser les propositions publiées.

Nous complétons cette analyse des projets des professeurs en considérant la fonction professionnelle de cette préparation. François V. Tochon³⁵ en indique une qui est décrite assez vaguement qui est de remplir des besoins liés à l'activité du professeur dans sa classe :

des besoins personnels immédiats (diminuer l'anxiété, donner de l'assurance lors de l'interaction, donner une direction, un sens, une sécurité et une certaine confiance)

³⁴ CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Aïsa et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp 135-180), Grenoble : La pensée sauvage éditions

³⁵ TOCHON F. V (1993), *Op cit* [p. 80]

Plus précisément, Janine Rogalski ³⁶ décrit cette fonction de la préparation des cours qui répond à des nécessités liées à l'animation même du projet :

La préparation de la séance fournit à l'enseignant une "enveloppe" des trajectoires acceptables du déroulement de la classe. Elle lui sert aussi de trame repère, pour réguler la séance en classe ou a minima l'ordonnancement de ses propres actions.

En partant des choix convergents des professeurs, par une méthode inductive, nous tenterons d'émettre des hypothèses liées à l'exercice du métier. Des hypothèses concernant des contraintes extérieures à la classe, principalement liées au contexte institutionnel de l'enseignement, mais aussi des hypothèses portant sur des contraintes directement liées à l'activité professionnelle en classe, notamment celles qui viennent par anticipation des réactions des élèves. Les choix divergents sont repérés pour nourrir la composante personnelle des pratiques enseignantes, une recherche de cohérence sera entreprise en procédant à des croisements de résultats concernant cette composante.

L'analyse des pratiques en classe : l'animation du projet

Pour analyser les pratiques en classe, rappelons que nous coordonnons deux approches : l'apprentissage des élèves et l'exercice du métier. Nous étudions le déroulement devant les élèves du projet conçu par les professeurs. Nous retenons pour cette étude les activités effectives des élèves de la classe ainsi que les échanges avec les professeurs.

Les activités mathématiques effectives des élèves

Comme nous l'indiquerons précisément dans l'étude du déroulement des séquences des professeurs observés, nous avons procédé à un repérage des différentes activités effectives des élèves de la classe et nous les avons classées. La typologie obtenue permet des analyses en terme d'apprentissage potentiel et correspond (dans ses catégories) à celle que peuvent utiliser les professeurs pour choisir les exercices à donner à leurs élèves. Les différentes séquences sont étudiées et comparées pour déceler une régularité ou une variabilité des pratiques enseignantes (*intra* et *inter*)

Ici encore nous envisageons d'interpréter des convergences comme des traces de contraintes liées à l'exercice du métier, contraintes qu'il reste à déterminer : programme, temps, manuel utilisé... La variabilité sera assimilée à l'investissement personnel d'une marge de manœuvre par les enseignants. La classification adoptée pour les activités mathématiques convient aussi pour l'analyse des tâches des élèves si bien que des croisements sont possibles pour déterminer des relations entre le projet élaboré par l'enseignant et son animation en classe. Autrement dit, dans le cadre des alternatives restant aux professeurs, les croisements entre les résultats concernant le projet et ceux obtenus sur son

³⁶ ROGALSKI J (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

déroulement en classe permettent d'évaluer la cohérence des pratiques enseignantes, et de révéler éventuellement certaines contradictions apparentes.

En outre, nous disposons de moyens pour évaluer la dépendance des séquences observées au manuel utilisé qui, rappelons-le, est le même pour les quatre professeurs. On détermine, à la lecture d'un énoncé d'exercice du manuel, les activités attendues pour le résoudre, c'est-à-dire les activités de l'expert. Ces activités ne sont jamais exactement celles qu'on observe en classe, précisément parce que les élèves qui s'expriment ne sont pas toujours des experts... Néanmoins, le recueil de ces activités attendues (activités fictives) permet de montrer une orientation des auteurs du manuel, une orientation qui correspond à des choix et ces choix peuvent se comparer à ceux des professeurs qui ont, eux aussi, élaboré un projet et qui l'ont animé. Des comparaisons entre la séquence fictive programmée par les auteurs et les séquences réelles des professeurs permettront alors de rendre compte de l'influence du manuel scolaire sur les pratiques enseignantes.

Les adaptations du professeur aux réactions des élèves

L'analyse des échanges entre le professeur et les élèves nécessite un repérage très fin. Nous distinguons les aides ou explications du professeur suivant qu'elles sont données *a priori* (avant que l'élève réalise la tâche) ou *a posteriori* (dans le cas où la réponse de l'élève n'est pas correcte ou s'il pose une question). Nous nous limitons à la deuxième catégorie de médiations, nous justifierons ce choix au chapitre 7. Leur analyse nécessite un repérage fin et une classification que nous détaillerons dans ce chapitre.

Ces médiations s'interprètent en fonction de l'apprentissage des élèves mais, dans le cadre de la psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant³⁷, elles s'interprètent aussi en fonction de l'exercice même du métier du professeur. En effet, supposons que le professeur pose une question, que l'élève interrogé donne une réponse mais que celle-ci soit incomplète, ou fausse. Le professeur doit s'adapter à cette réponse qui n'est pas conforme à ce qu'il attendait, c'est-à-dire qui ne permet pas d'entretenir la dynamique d'apprentissage de la classe et qui, pour cette raison, constitue une péripétie dans le déroulement du scénario prévu. Le professeur doit donc adapter le scénario pour gérer cet incident sachant qu'il ne dispose d'aucun modèle précis et complet de la dynamique propre des acquisitions des élèves ou de la classe ni de l'impact de ses interventions didactiques.

Après avoir précisément repéré les adaptations et les avoir classées, nous comparons les séquences des professeurs. Comme précédemment, nous envisageons d'interpréter les convergences en terme de contraintes liées à l'exercice du métier. Une analyse chronologique permettra de montrer quelle est l'influence du temps sur ces pratiques. Nous complétons l'analyse de chaque pratique en procédant à différents croisements des résultats concernant les adaptations des professeurs : avec le projet, avec les activités mathématiques effectives des élèves, avec l'origine des adaptations. Ces croisements permettront à

³⁷ ROGALSKI J. (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges

nouveau des analyses en terme de cohérences et de compensations, qui reflètent des compromis inévitables dans l'exercice quotidien de ce métier.

Nous allons maintenant présenter notre recherche et nos résultats. Les trois chapitres qui suivent sont consacrés à l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième. Les trois derniers chapitres abordent l'analyse des pratiques des professeurs observés : le projet élaboré avant d'entrer en classe, les activités mathématiques des élèves en classe et les adaptations de l'enseignant aux réactions de ses élèves.

CHAPITRE 2

ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX ET DE LA MULTIPLICATION QUELS ENJEUX MATHÉMATIQUES ?

Sommaire du chapitre 2

1. Les enjeux de l'enseignement des décimaux

Rappel épistémologique sur les nombres décimaux

Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient

Les décimaux écrits sous la forme d'une somme

Les décimaux écrits sous la forme d'un produit

A priori, quel enseignement des nombres décimaux à l'école et au collège ?

2. Les enjeux de l'enseignement de la multiplication

Les problèmes que la multiplication permet de résoudre

Les propriétés de la multiplication

Les procédures de calcul du produit de deux décimaux

A priori, quel enseignement de la multiplication des décimaux ?

Conclusions sur les nombres décimaux et leur multiplication

L'analyse des pratiques de professeurs nécessite une connaissance précise de la notion enseignée, à la fois en tant qu'objet de savoir mathématique et en tant qu'objet d'enseignement. Elle demande aussi de prendre en compte les contraintes auxquelles les professeurs sont soumis (programme, horaire, effectif des classes...), les difficultés d'apprentissage des élèves ainsi que les habitudes de la profession concernant l'enseignement de cette notion. Cet ensemble d'analyses préalables constitue trois chapitres de la thèse, celui-ci et les deux suivants

Nous proposons ici une étude préliminaire de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. L'objectif est de nous donner des moyens d'analyser les enseignements proposés, dans des publications comme dans des classes, pour les rapports qu'ils ménagent entre le sens des notions étudiées et ce qui est proposé aux élèves, exposés, tâches, explications, aides... en tenant compte de leur progression. En nous référant à Gérard Vergnaud³⁸, nous envisageons le sens d'une notion en considérant les problèmes qu'elle permet de résoudre (classés par catégorie, ils en constituent les situations de référence), ses propriétés dont certaines conduisent éventuellement à des méthodes de résolution des problèmes précédents dans un certain domaine de validité, ainsi que ses représentations symboliques et leur transformation.

Le premier paragraphe concerne les nombres décimaux (de manière implicite, compte tenu de la notion étudiée, les décimaux considérés dans cette recherche sont toujours positifs). Après un rappel épistémologique les concernant, nous procédons à une analyse des enjeux mathématiques dont leur enseignement est l'objet. Les représentations symboliques des nombres décimaux sont intimement liées aux problèmes qu'ils permettent de résoudre, aussi, pour présenter cette analyse, nous abordons successivement leurs différentes représentations et nous décrivons, pour chacune d'elle, les problèmes auxquels les nombres décimaux apportent une réponse. À la lumière des précédents travaux sur les nombres décimaux, nous distinguons les écritures sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit :

³⁸ VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactiques des mathématiques* 10/2 3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage

– écrits sous la forme d'un quotient (par exemple $n = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$), nous montrons que les décimaux, comme rationnels particuliers, permettent des comparaisons et, par conséquent, répondent à des problèmes de mesure ou d'expression de relations fonctionnelles ;

– écrits sous la forme d'une somme, explicite ou implicite (par exemple, respectivement $n = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ ou $n = 0,75$), les décimaux facilitent le repérage de points d'une droite car les chiffres de l'écriture décimale sont associés à des subdivisions successives d'une graduation régulière. Sous cette forme, ils permettent d'approcher tous les réels quelle que soit la précision souhaitée ;

– écrits sous la forme d'un produit (par exemple $n = 75 \times 10^{-2}$) les nombres décimaux expriment aisément la mesure d'une longueur en référence au système métrique. Le choix de l'unité adaptée permet de ne plus mentionner la puissance de dix : $0,75 \text{ m} = 75 \times 10^{-2} \text{ m} = 75 \text{ cm}$ ³⁹. Selon le même principe, les décimaux expriment aussi d'autres mesures avec le système d'unités adapté.

Dans le second paragraphe, en utilisant les travaux déjà menés sur cette opération, la multiplication est étudiée, d'abord par les problèmes qu'elle permet de résoudre et donc par ses situations de référence (que nous appelons situations multiplicatives), ensuite par ses propriétés algébriques et enfin par les différentes procédures de calcul d'un produit. Nous étudions les façons d'établir les propriétés de la multiplication suivant les situations de référence et les manières de calculer un produit de deux nombres décimaux suivant leur représentation symbolique.

Au fur et à mesure de cette étude, nous utilisons les programmes officiels et parfois quelques manuels pour indiquer les choix de choix de l'institution scolaire.

1. Les enjeux de l'enseignement des décimaux

Dans l'enseignement élémentaire, les décimaux apparaissent le plus souvent comme des nouveaux nombres, étudiés après les entiers naturels. Avant d'analyser les problèmes qu'ils permettent de résoudre suivant leur représentation symbolique, procédons à un bref rappel sur le rôle qu'ont eu les nombres décimaux dans l'histoire des mathématiques.

³⁹ Ces écritures qui intègrent les unités peuvent étonner. En ce qui concerne leur utilité comme leur légitimité, deux textes sont particulièrement éclairants :

CHEVALLARD Yves & BOSCH Marianna (2000), *Les grandeurs mathématiques au collège* – Partie I Une Atlantide oubliée, *Petit x* n°55 [pp 5–32]

PRESSIAT André (2001), *Grandeurs et mesures : évolutions des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition*, premier cours du thème 4 de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques

Rappel épistémologique sur les nombres décimaux

Historiquement, c'est la construction du système décimal, motivée en particulier par les nécessités du commerce, qui va permettre d'unifier le domaine numérique déjà bien pourvu mais de façon hétérogène comme en témoigne le vocabulaire : nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexprimables, sourds, rompus... Rappelons que l'œuvre de Simon Stevin a contribué à nourrir le débat concernant les nombres ⁴⁰ :

Au XVI^e siècle, Stifel (1487-1567) refuse encore aux irrationnels le statut de "vrai" nombre, alors que Simon Stevin (1548-1620), qui a une réelle pratique de calcul sur les nombres décimaux – c'est lui qui introduit en Europe les fractions décimales dans un petit traité édité en flamand en 1585 –, réagit vivement pour faire reconnaître les nombres irrationnels comme des nombres à part entière. Il s'élève contre l'usage de cette terminologie "d'irrationnel", "d'inexprimable".

Le débat perdurera au cours du XVII^e siècle autour de la lecture et de l'interprétation du livre V d'Euclide. Surtout, l'essor de tous les calculs à partir de cette époque, calculs algébrique, symbolique, infinitésimal, fait éclater le cadre dans lequel il se pose. Il ne sera élucidé théoriquement qu'au XIX^e siècle par les différentes constructions des réels.

Simon Stevin expose le système décimal dans *L'arithmétique* (1585) sous le titre : "*La disme enseignant facilement expedier par nombre entiers sans rompuz, tous compte se rencontrans aux affaires des Hommes*" puis, dans le *Traité des incommensurables grandeurs* (paru en 1634), il approfondit la notion théorique de nombre réel. Il insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu'ils en ont les mêmes propriétés opératoires. C'est bien à la fois par l'utilisation des fractions décimales pour écrire les nombres et par les calculs sur ces fractions que l'œuvre de Simon Stevin se distingue. Comme l'écrit Georges Ifrah ⁴¹ :

Ces fractions ⁴² auront certes été connues bien avant lui (...) Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XV^e siècle), dont les travaux auront été ignorés en Occident, personne, en dehors de Stevin, n'aura eu l'idée jusque-là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers.

En utilisant les termes de Raymond Duval ⁴³, nous terminons ce rappel historique sur la notation décimale en disant que Simon Stevin a proposé un nouveau *registre*

⁴⁰ DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques*, Paris : Seuil [p 103-104].

⁴¹ IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Paris : Robert Laffont. [Tome 2, p. 463].

⁴² Les fractions décimales

⁴³ DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine* Berne : Peter Lang

de représentation sémiotique qui a permis d'amorcer l'unification du domaine numérique qui a conduit aux nombres réels.

A l'école primaire, l'apport des nombres décimaux comme élément d'unification théorique ne peut être présenté. En revanche, si les fractions sont connues et utilisées, la simplification qu'apporte la notation décimale pour calculer ou pour comparer peut être montrée aux élèves. L'histoire de l'enseignement des décimaux en France depuis 1945 montre que les choix possibles sont nombreux. Avant de commencer l'étude des nombres décimaux, précisons que les programmes actuels⁴⁴ définissent la progression de leur enseignement : à l'école élémentaire, au cours des trois dernières années, les nombres décimaux sont étudiés ainsi que la multiplication de deux entiers et d'un entier par un décimal ; en sixième, la notion de décimal est approfondie et la multiplication de deux nombres décimaux est apprise.

Nous allons donc examiner, pour chaque mode de représentation symbolique, les problèmes que les nombres décimaux permettent de résoudre. Au fur et à mesure de cette étude, nous indiquons les objectifs de l'institution scolaire et leur éventuelle évolution.

Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient

Certaines progressions envisagent l'introduction des rationnels (écrits comme un quotient de deux entiers) avant celle des décimaux qui sont alors considérés comme des rationnels particuliers. Cet ordre semble actuellement indiqué, sans que cela soit impératif, par les instructions officielles⁴⁵, l'étude des rationnels précédant, dans le texte du programme, celle des décimaux.

Fractions simples. Ecriture, comparaison de fractions de même dénominateur

Nombres décimaux. Ecriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre ; (...)

Les compléments sur l'articulation école-collège⁴⁶ précisent :

A l'école primaire, seules quelques fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) sont utilisées par les élèves, et éventuellement travaillées plus longuement dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales.

Pour introduire les nombres rationnels, le professeur peut proposer aux élèves des situations différentes : des situations de comparaisons et de mesures, des situations de partage, ou encore des situations dans lesquelles les grandeurs sont soumises à

⁴⁴ Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995. Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

⁴⁵ Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995. Ce programme est appliqué en dernière année (CM2) depuis la rentrée scolaire 1997-1998.

⁴⁶ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

des opérateurs. Dans ces diverses situations, le recours à des fractions n'est pas motivé par le même objectif. Le sens que les élèves construisent et attribuent à ces nouvelles écritures numériques dépend de la situation qui leur a permis de les découvrir. Notre objectif n'est pas ici d'étudier ces situations mais simplement de préciser, pour analyser l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, les différentes façons de considérer les nombres rationnels suivant le problème auxquels ils répondent. Ces problèmes sont très bien décrits par Nicolas Rouche⁴⁷ dans *Le sens de la mesure*, nous allons utiliser cet ouvrage dans les paragraphes suivants. Lorsqu'un de ces problèmes a été choisi par un auteur pour élaborer une situation d'enseignement, nous indiquons la publication, nous décrivons la situation et, le cas échéant, nous évoquons les questions qu'elle pose, relativement à la transposition didactique.

Des rationnels pour comparer des grandeurs

Nicolas Rouche rappelle qu'on peut définir la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel comme une addition réitérée de cette grandeur à elle-même. Par exemple, on multiplie par quatre la longueur d'un segment S en prenant la longueur du segment obtenu par quatre reports consécutifs du segment S . Si une relation d'ordre total est définie sur les longueurs, on peut comparer deux longueurs différentes. Dans certains cas que nous allons détailler dans les paragraphes suivants, on peut les situer l'une par rapport à l'autre en n'utilisant que deux nombres naturels. Cela permet d'indiquer de combien ces longueurs diffèrent. La comparaison du périmètre d'un carré et de son côté est très simple : le périmètre est égal à quatre fois le côté. La comparaison du périmètre d'un disque et de son diamètre est impossible, ces deux grandeurs ne sont pas commensurables.

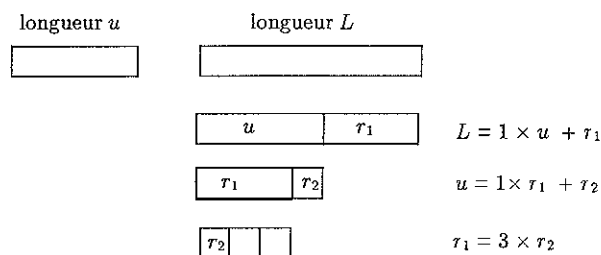
Comme nous allons le présenter, une telle activité de comparaison de deux grandeurs peut conduire à l'introduction des nombres rationnels.

♦ *Comparaison de deux grandeurs commensurables par la recherche d'une commune mesure.* Considérons, par exemple, deux longueurs de segments u et L . La comparaison de u et de L par la recherche d'une commune mesure s'effectue comme suit :

- on reporte la petite longueur u autant de fois qu'on le peut dans la grande longueur L , on suppose qu'il y a un reste r_1 ;
- on reporte la longueur r_1 autant de fois qu'on le peut dans la longueur u , on suppose qu'il y a un reste r_2 ;
- on reporte la longueur r_2 autant de fois qu'on le peut dans la longueur r_1 , etc.

Par exemple, supposons que “ cela tombe juste ” avec u qui va une fois dans L , r_1 qui va une fois dans u et r_2 qui va exactement trois fois dans r_1

⁴⁷ ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure*, Bruxelles : Didier Hatier.



Alors r_2 est une commune mesure à u et à L : r_2 va exactement quatre fois dans u et sept fois dans L . Pour comparer L et u , nous dirons que L est à u comme 7 est à 4. Ainsi, nous avons exprimé l'égalité de deux rapports, c'est-à-dire une proportion.

En choisissant u comme longueur unité, nous pouvons dire que la commune mesure r_2 est égale au quart de l'unité ($4 \times r_2 = u$). Nous écrivons $r_2 = \frac{1}{4}u$. Nous exprimons alors la mesure de L avec l'unité u en disant que la longueur L mesure sept quarts de l'unité u : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin⁴⁸. Les auteurs décrivent les procédures des élèves qui doivent dessiner un segment, rédiger et envoyer un message à un récepteur afin qu'il trace un segment de même longueur. La rédaction des messages conduit les élèves à mesurer leurs segments à l'aide d'une unité qui leur est fournie après le tracé. Leur tâche étant pratique, ils cherchent une mesure suffisamment précise et non une mesure théorique⁴⁹ :

Les segments de l'émetteur et du récepteur ne coïncident pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux

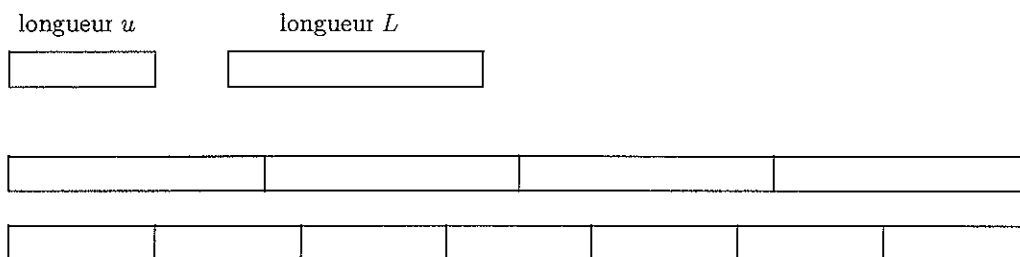
(. .) le message comporte (. .) une information qualitative sur le reste " *et un tout petit peu plus* " (. .)

Mais ils parviennent à exprimer la longueur L à l'aide de l'unité u , l'écriture choisie par les élèves est plutôt de type $L = u + \frac{3}{4}u$.

♦ *Comparaison de deux grandeurs commensurables par la méthode de coïncidence*. Reprenons les deux longueurs u et L . La comparaison de u et de L par la méthode de coïncidence consiste à déterminer deux entiers n et p tels que n reports de u coïncident avec p reports de L .

⁴⁸ DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7

⁴⁹ *Ibid.* [pp. 35 et 37].

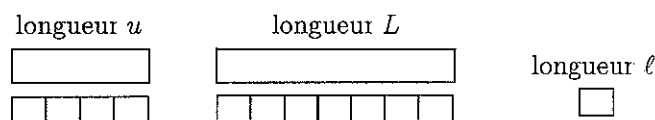


Dans le dessin ci-dessus, nous pouvons comparer les longueurs L et u : quatre reports de L coïncident avec sept reports de u . En prenant la longueur u comme unité, la longueur L mesure le quart de sept unités : $L = \frac{1}{4}(7u)$.

Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Guy Brousseau⁵⁰ dans l'activité de mesure des épaisseurs des feuilles de papier. Les élèves cherchent à mesurer l'épaisseur d'une pile de feuilles de papier de même épaisseur en un nombre entier de millimètres. Ils font, par exemple, coïncider 60 feuilles et 7mm et déterminent l'épaisseur de la feuille par le couple (60f ; 7mm).

Mais revenons à notre exemple où quatre longueurs L coïncident avec sept longueurs u . Nous pouvons déterminer, grâce à cette coïncidence, une commune mesure à u et à L . Supposons qu'on puisse diviser u par 4 : notons ℓ la longueur qui, reportée 4 fois, égale u . Cette nouvelle longueur ℓ est la commune mesure de u et de L :

- 4 reports de ℓ coïncident avec u ;
- 7 reports de u coïncident avec 4 reports de L ;
- donc 7×4 reports de ℓ coïncident avec 4 reports de L ;
- c'est-à-dire que 7 reports de ℓ coïncident avec L .



Pour comparer u et L , nous disons que u est à L comme 4 est à 7 ou bien que L est à u comme 7 est à 4. Et nous retrouvons l'expression que nous avons obtenue par la recherche directe d'une commune mesure : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

Les deux égalités montrent l'égalité de sept quarts de l'unité et du quart de sept unités : $7(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{4}(7u)$ ce que l'on convient d'écrire $\frac{7}{4}u$.

⁵⁰ BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage [pp 257-276]

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage.

♦ *Distinguons les bilans des deux méthodes de comparaison.* La recherche d'une commune mesure conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $7(\frac{1}{4}u)$. Cette représentation du rationnel $\frac{7}{4}$ correspond bien au vocabulaire des fractions où 4 est le dénominateur (il indique le *nom* de la partie de l'unité c'est-à-dire le nom de la sous-unité) et où 7 est le numérateur (il indique le *nombre* de ces sous-unités). Elle correspond aussi à la façon de lire la fraction : sept quarts de l'unité.

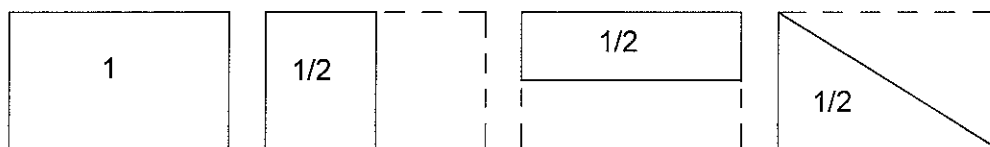
La méthode de coïncidence conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $\frac{1}{4}(7u)$. Par ailleurs, puisque quatre reports de la longueur L coïncident avec sept reports de l'unité, il s'ensuit que $\frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u = 7u$ donc $4 \times \frac{7}{4}u = 7u$. Nous obtenons que $\frac{7}{4}$ est le nombre x solution de l'équation $4x = 7$. Cette propriété relie la fraction à la division. En effet, $4x = 7$ s'écrit $x = 7 \div 4$ or nous savons que $x = \frac{7}{4}$.

Finalement, $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 7 = 7 \div 4$.

Des rationnels pour fractionner des grandeurs

Des activités proposées aux élèves permettent de fractionner une grandeur c'est-à-dire de la découper en parts dont les grandeurs sont d'égales mesures.

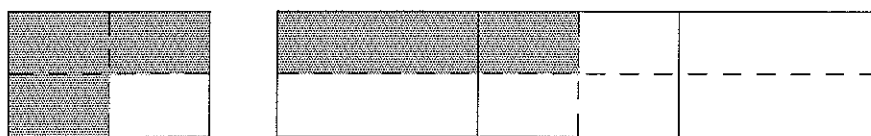
♦ *Fractions de l'unité.* En pliant une bande de papier ou une feuille rectangulaire, on peut la fractionner en deux parts dont les aires sont identiques. Si la bande ou la feuille est l'aire unité, par convention d'écriture, chacune des aires des deux parts est notée $\frac{1}{2}$. Dans ce type d'activité, on fait remarquer aux élèves que deux parts de formes différentes peuvent être notées par la même fraction. C'est le cas dans le pliage d'une feuille rectangulaire suivant que l'élève la plie le long de la largeur, de la longueur ou d'une diagonale.



Sur cet exemple, de façon plus générale, l'écriture $\frac{1}{n}$ désigne l'aire d'une part lorsqu'il en faut n pour paver la feuille, et $\frac{p}{n}$ désigne l'aire de la part obtenue par juxtaposition de p parts d'aire $\frac{1}{n}$. On retrouve ici la valeur $\frac{1}{n}$ comme sous-unité (n est le dénominateur) et p comme le nombre de ces sous-unités (p est le

numérateur). Ce type d'activité est proposé par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin dans leur ingénierie pour l'enseignement des nombres décimaux⁵¹. Les fractions permettant à la fois d'exprimer des longueurs et des aires, les élèves pourront déterminer le produit de deux rationnels par l'aire du rectangle dont les dimensions sont précisément ces deux facteurs rationnels.

♦ *Fraction de plusieurs unités*. Le fractionnement par pliage peut être proposé sur une feuille qui représente plusieurs unités d'aire. Cette activité permet de retrouver l'autre signification de la fraction $\frac{p}{n}$ c'est-à-dire l'aire obtenue par le fractionnement d'une surface qui mesure p unités en n parts de même mesure. Par superposition, on retrouve l'égalité entre trois quarts de l'unité et le quart de trois unités :



Le fractionnement de plusieurs unités permet de retrouver aussi que $\frac{3}{4}$ est la solution de l'équation $4x = 3$. En effet, $\frac{3}{4}$ étant le quart de trois unités, on obtient ces trois unités en prenant quatre fois $\frac{3}{4}$. Cette situation tisse le lien entre la division et le fractionnement : $4 \times x = 3$ s'écrit $x = 3 \div 4$ ou $x = \frac{3}{4}$.

Des rationnels pour opérer sur les grandeurs

Les rationnels peuvent encore être présentés comme des opérateurs appliqués à des grandeurs. L'exemple le plus souvent repris est celui proposé par Guy Brousseau⁵² : l'agrandissement de puzzles. La fraction-mesure a déjà été manipulée par les élèves comme un ensemble de couples (nombres de feuilles, nombre de millimètres) pour évaluer l'épaisseur de feuilles de papier. Dans cette nouvelle présentation, la fraction-opérateur est un autre ensemble de couples : les couples (longueur initiale, longueur image) dans une situation d'agrandissement de figures planes sans déformation. Le meilleur représentant de cet ensemble est le couple (unité, image de l'unité)

Le rationnel $\frac{7}{4}$ représente l'image de 1 dans l'agrandissement qui, à 4, associe 7 ($4 \mapsto 7$) ou qui, à 8, associe 14 ($8 \mapsto 14$), ainsi peut-on calculer l'image de toute longueur entière en la multipliant par $\frac{7}{4}$. On utilise implicitement une propriété

⁵¹ DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Op. cit.* [pp 51-62].

⁵² BROUSSEAU G. (1998), *Op. cit.* [pp 237-241].

des fonctions linéaires : $f(n) = n f(1)$. Remarquons que dans cette présentation, $\frac{7}{4}$ est envisagé comme un opérateur mais les nombres 4 et 7 ne sont pas envisagés eux-mêmes comme des opérateurs. Dans cette perspective, $\frac{7}{4}$ se compare à d'autres opérateurs. Pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$ et $\frac{6}{4}$ c'est-à-dire les coefficients de $(4 \mapsto 7)$, $(4 \mapsto 8)$ et de $(4 \mapsto 6)$, on se réfère à l'image de 4, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{8}{4} = 2$ (on agrandit plus quand on obtient 8 à partir de 4 que quand on obtient seulement 7) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. D'une façon analogue, pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{5}$ c'est-à-dire les coefficients de $(4 \mapsto 7)$, $(3 \mapsto 7)$ et $(5 \mapsto 7)$, on se réfère à l'antécédent de 7, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{7}{3}$ (on agrandit plus quand on obtient 7 à partir de 3 que quand on obtient 7 à partir de 4) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{7}{5}$. Ces comparaisons contribuent à conférer aux fractions-opérateurs le statut de nombre.

On peut aussi présenter une fraction comme le résultat de la composition de deux opérateurs appliqués à une grandeur. Le numérateur et le dénominateur sont ces deux opérateurs, le premier multiplie et le second divise. Par exemple,

$\boxed{\times \frac{7}{4}} \rightarrow$ est le résultat de la composition des deux opérateurs : $\boxed{\times 7} \rightarrow$ suivi de $\boxed{\div 4} \rightarrow$ ou bien $\boxed{\div 4} \rightarrow$ suivi de $\boxed{\times 7} \rightarrow$. Les programmes du 2 janvier 1970 ont introduit l'enseignement de ces opérateurs de façon abstraite : l'attention ne devait pas être portée sur la grandeur initiale, la transformation et la grandeur image mais principalement sur la transformation. Les programmes du 7 juillet 1978 (ils tentent de rompre avec la distinction, sur laquelle nous reviendrons, entre les décimaux-mesures et les fractions-opérateurs) pointent l'intérêt d'utiliser ces compositions d'opérateurs pour éclairer la multiplication des décimaux : "ainsi, 'mult 3,761' revient à composer 'mult. 3 761' et 'div. 1 000'." Nicolas Rouche émet quelque réserve quant à l'utilisation de cette façon de considérer une fraction⁵³ :

Cette façon d'envisager la fraction est assez abstraite du fait qu'elle tend à détourner l'attention des grandeurs sur lesquelles on opère pour la concentrer sur les opérations elles-mêmes et leur enchaînement. Comme les grandeurs ne sont sans doute jamais totalement absentes de

⁵³ ROUCHE N. (1992), *Op cit* [p. 158].

l'imagination, on peut dire que la fraction conçue comme pur produit de deux opérateurs est une vue extrême qui tend parfois à s'établir dans la pensée, mais sans jamais s'imposer complètement. C'est en tout cas une vue élaborée dont on peut douter qu'elle décrive jamais l'intuition spontanée d'un enfant.

Devons-nous interpréter cette réserve comme une critique a posteriori de cette partie des programmes, aujourd'hui abandonnée, dont l'ambition de formation mathématique serait jugée, par son excès, inadaptée au développement des élèves ?

La fraction-opérateur permet, en théorie, de définir aisément la multiplication de deux rationnels (ce qui n'est pas le cas pour l'addition) : le produit est la fraction qui correspond à la composée de deux opérateurs. Guy Brousseau propose de telles activités en cumulant deux agrandissements d'une figure plane à l'aide de pantographes⁵⁴. Les grandeurs sur lesquelles opèrent les agrandissements sont ici omniprésentes, la réserve émise par Nicolas Rouche concernant la composition d'opérateurs ne concerne donc pas cette situation.

Présentation des nombres décimaux comme des rationnels particuliers

Avec les rationnels, les additions et les comparaisons conduisent souvent à de longs calculs. Cette contrainte est exploitée pour privilégier les nombres dont une écriture fractionnaire a pour dénominateur une puissance de dix. C'est ainsi que les auteurs qui ont choisi cette introduction des décimaux présentent les rationnels particuliers que sont les décimaux. Citons Guy Brousseau⁵⁵ :

Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux-mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines – les décimales – qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode – une approche – des mesures rationnelles.

Citons aussi Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin⁵⁶ :

A partir des $\frac{1}{100}$; les élèves ont définitivement opté pour le calcul avec les fractions décimales (des centièmes, des millièmes), tant les calculs devenaient complexes (...) Avec les fractions décimales les calculs sont plus faciles (...) Il reste que l'écriture est très lourde (...) le maître propose aux élèves de chercher une écriture plus simple où on n'ait pas besoin d'écrire tous ces 0.

⁵⁴ BROUSSEAU G. (1998), *Op. cit.* [pp 225-234]

⁵⁵ *Ibid.* [p. 224]

⁵⁶ DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Op. cit.* [pp 148-150]

Nous étudierons ces activités dans le chapitre consacré aux matériaux dont les professeurs disposent pour enseigner la multiplication des décimaux. Voyons maintenant les nombres décimaux écrits sous la forme d'une somme, c'est-à-dire par exemple, $6 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ et remarquons que la notation décimale 6,37 en constitue un autre exemple où l'addition est implicite

Les décimaux écrits sous la forme d'une somme

Comme nous l'avons déjà indiqué, une pratique préconisée par les instructions officielles, sans toutefois être imposée, consiste à présenter les nombres décimaux à partir des fractions décimales. Cette pratique est actuellement courante (voir la citation ci-dessous). Néanmoins, pour répondre à l'objectif des programmes quant à la connaissance des nombres décimaux, le professeur ne doit pas limiter son enseignement à une conception fractionnaire du nombre décimal et à une transformation de la fraction décimale en une écriture à virgule ⁵⁷ :

Plusieurs aspects sont à mettre en place concernant les nombres décimaux : l'écriture à virgule est une autre écriture des fractions décimales, les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect important pour la comparaison, l'encadrement, les approximations...), les décimaux permettent d'approcher les quotients de deux entiers, (...)

Ces différents aspects sont en général travaillés dès l'école primaire, l'introduction par les fractions décimales étant aujourd'hui la plus fréquente.

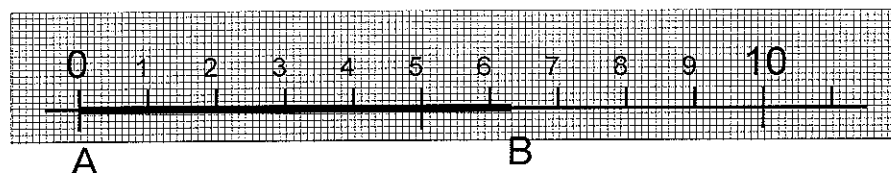
La méthode de coïncidence ou la détermination d'une commune mesure d'un segment donné avec un segment unité permet, nous l'avons vu, de mesurer des longueurs exprimées à l'aide de nombres rationnels. La présentation des nombres décimaux qui répondent aux besoins de mesurer des grandeurs peut alors être envisagée par le professeur à partir des fractions. Cependant, les auteurs des instructions officielles paraissent préférer les décimaux aux rationnels pour la mesure des grandeurs et le repérage des points : *“ les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points (...) ”*. Cette formulation semble insister sur la nécessité d'une multiple présentation des nombres décimaux, des résolutions d'équation du type $ax=b$ avec les fractions, des comparaisons, des encadrements, des approximations... avec la notation décimale et des mesures avec l'utilisation d'un système d'unités adaptées. Le professeur peut donc choisir de mettre en relation le système métrique avec le système de numération décimale en utilisant la “droite numérique” c'est-à-dire, à l'école élémentaire, une demi-droite graduée à partir de zéro.

⁵⁷ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

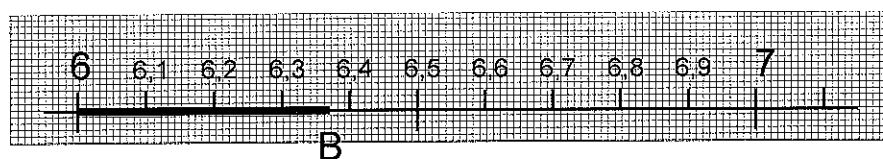
Subdivisions successives de l'unité de mesure

Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin utilisent cette écriture des décimaux pour mesurer les longueurs des côtés des rectangles dont il faut calculer l'aire. Durant une longue phase, les élèves n'écrivent pas 6,37 mais $6 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$. C'est au moment de multiplier les nombres avec cette représentation que les élèves en viennent volontiers à la notation décimale qui allège l'écriture.

On trouve généralement ce type de représentations dans les manuels pour le CM2⁵⁸ ainsi que dans des brochures destinées aux enseignants⁵⁹, le fil conducteur des activités est généralement le suivant. Soit un segment [AB] à mesurer, on dispose d'une unité de longueur et d'une graduation. Le "mesurage" montre que la mesure de la longueur du segment [AB] est comprise entre les deux nombres entiers 6 et 7 ; ce qui n'est pas très précis ...



Le professeur, ou l'énoncé de la fiche d'activité, propose de mieux voir ce qui se passe entre 6 et 7 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6 et 7 qui mesure une unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{10}$ et on complète la graduation en marquant $6 + \frac{1}{10}$, $6 + \frac{2}{10}$... que l'on écrit 6,1, 6,2... en utilisant les résultats du travail déjà effectué sur les fractions décimales et l'écriture décimale : $6 + \frac{1}{10} = \frac{60}{10} + \frac{1}{10} = \frac{61}{10} = 6,1$. Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,3 et 6,4 ; ce qui est plus précis mais ...



⁵⁸ Les manuels de CM2 utilisent un "zoom $\times 10$ " sur la droite numérique pour présenter les décimaux (ou fractions décimales), pour situer un point sur la droite, pour comparer deux décimaux, ou pour montrer qu'entre deux décimaux ayant exactement n décimales (la $n^{\text{ième}}$ est non nulle) il existe exactement 9 nombres ayant exactement $n+1$ décimales. Par exemple :

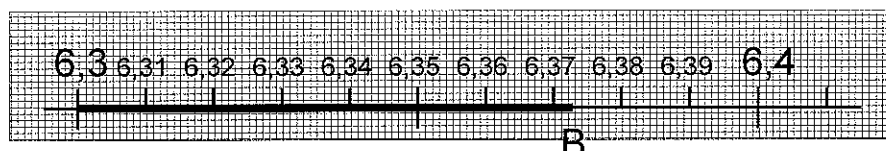
Math et calcul CM2 (1988), Paris : Hachette [p. 108] ;

Math outil CM1 (1997), Paris : Magnard [p. 157] ;

Math élem. CM2 (1998), Paris : Belin [pp. 72, 88].

⁵⁹ Groupe Nouveaux programmes de Collège (1996), *Activités pour la classe de sixième : Nombres décimaux - Aires et Périmètres*, Montpellier : IREM de Montpellier 2 [pp. 14-32].

Le professeur propose de mieux voir ce qui se passe entre 6,3 et 6,4 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6,3 et 6,4 qui mesure $\frac{1}{10}$ unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{100}$ et on complète la graduation en marquant $6,3 + \frac{1}{100}$, $6,3 + \frac{2}{100}$... que l'on écrit 6,31, 6,32... Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,37 et 6,38 ; ce qui est plus précis mais...



Dans les manuels, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes (généralement trois ou quatre) soit parce que le point B est précisément situé sur une marque de graduation, soit parce que la précision de la mesure est jugée suffisante. Mais, sur le plan théorique, il se peut que ce processus ne s'arrête jamais. La mesure du segment [AB] est alors exprimée par une écriture décimale illimitée.

Les écritures décimales illimitées

L'activité que nous venons de décrire repose sur un postulat selon lequel tout point de la droite numérique peut être associé à un nombre. Une conception unificatrice de la notion de nombre s'en dégage, un nombre est un représentant d'un point de la droite numérique. Cette conception permet de présenter de la même façon tous les nombres réels positifs, elle permettra aussi d'absorber les nombres relatifs quand, au collège, la droite numérique sera graduée dans les deux sens...

Cette activité permet aussi d'aborder le cas de nombres qui auraient une écriture décimale illimitée. Les écritures décimales illimitées posent un problème d'enseignement : la situation pratique n'est pas la même si l'on obtient, pour la longueur du segment [AB], la mesure 6,372999... ou la mesure 6,373000... Et pourtant ces deux résultats pratiques conduisent au même nombre pour exprimer la longueur du segment [AB]. Les instructions du 22 novembre 1971 envisageaient, pour la classe de quatrième, de traiter les développements décimaux illimités afin de présenter les nombres réels. Le problème que nous venons d'évoquer n'était pas ignoré : "On fera comprendre qu'il n'existe pas de développement entre 7,220000... et 7,21999... ce qui conduit à identifier de tels développements".

Aujourd'hui, aucun apprentissage n'est associé à ces nombres. Néanmoins, des nombres qui ont une écriture décimale illimitée sont rencontrés par les élèves lors de la division de deux entiers "poussée après la virgule". Pour convaincre leurs élèves que "la division ne s'arrêtera jamais", les enseignants expliquent souvent que la suite des décimales comporte une période qui se perçoit bien à partir du moment où l'on obtient un reste qui a déjà été obtenu. Et cela ne manquera pas d'arriver puisque le nombre de restes possibles est limité. Certains professeurs de

collège évoquent aussi le fait que 0,999... et 1 désignent le même nombre en utilisant les deux écritures du tiers, $\frac{1}{3}$ et 0,333... :

$$\frac{1}{3} = 0,333... \text{ donc } 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0,333... \text{ or } 3 \times \frac{1}{3} = 1 \text{ et } 3 \times 0,333... = 0,999...$$

La propriété " tout nombre dont l'écriture décimale illimitée est périodique à partir d'un certain rang peut s'écrire comme le quotient de deux entiers " n'est pas enseignée. On obtient, par exemple, une écriture fractionnaire du nombre $a = 3,8757575...$ que l'on note $3,8\overline{75}$ par le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{lcl} & 10 a & = 38,7\overline{5} \\ \text{et} & 1000 a & = 3\,875,7\overline{5} \\ \text{donc} & 990 a & = 3\,875,7\overline{5} - 38,7\overline{5} \\ & & = 3\,875 - 38 = 3\,837 \\ \text{et donc} & a & = \frac{3\,837}{990} \\ \text{soit, en simplifiant :} & a & = \frac{1\,279}{330} \end{array}$$

Cette propriété permettrait de conclure une première étude des nombres. Les nombres de la droite numérique sont les nombres réels, tous ces nombres ont une écriture décimale, la partie décimale étant éventuellement illimitée. Les nombres réels qui ont une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang sont les nombres rationnels, ils peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers. Les nombres réels qui ont une écriture décimale limitée sont les nombres décimaux que l'on peut écrire aussi sous la forme d'une fraction décimale ou d'une autre fraction.

Cette présentation classe les nombres selon des critères d'écriture. Ce classement apparaît tôt dans la scolarité alors que les arguments développés précédemment sont difficiles, ils ne seront accessibles que bien plus tard dans la vie des élèves si tant est qu'ils le soient vraiment durant la scolarité obligatoire. Cette présentation peut alors conduire à des confusions comme celle que nous avons trouvée dans un livre du maître⁶⁰ : " Il s'agit d'un nombre 'périodique'. Ce n'est pas un nombre décimal. " C'est l'inconvénient majeur de cette présentation, elle induit la conception suivante : tous les nombres ont une écriture décimale ; ceux qui n'ont pas de partie décimale sont les nombres entiers ; ceux qui ont une partie décimale limitée sont les décimaux, ils ne sont pas entiers ; ceux qui ont une partie décimale illimitée périodique sont des rationnels, ils ne sont pas décimaux. Ainsi, les nombres entiers ne seraient pas décimaux, les décimaux ne seraient pas rationnels et 0,9 ne serait pas décimal.

Cette présentation possède d'autres inconvénients. Elle repose sur le fait que les subdivisions successives de l'unité peuvent s'effectuer indéfiniment, mais, dans la pratique, de telles subdivisions sont impossibles et cela renforce la confusion

⁶⁰ *Math et calcul CM2 Livre du maître* (1990), Paris : Hachette [p. 170].

entre les nombres entiers et les nombres décimaux. C'est ce que signale Guy Brousseau⁶¹ :

Même si la définition laisse entendre que toutes les unités de grandeur peuvent être divisées en dix, ces divisions, ne sont jamais – dans l'enseignement élémentaire – poursuivies impunément au-delà de l'utile et du raisonnable, même à travers la fiction commode du calcul de la division (...)

Dans ces conditions, les décimaux restent munis d'un ordre discret, celui des naturels (...)

Souvent les comparaisons et les sommes de décimaux ne seront correctes que si ces derniers sont écrits avec le même nombre n de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'ils sont présentés dans le même \mathbb{D}_n (ensemble des décimaux tels que $10^n \mathbb{D}_n \in \mathbb{N}$) et donc s'ils s'interprètent comme des naturels.

Les emboîtements de ces \mathbb{D}_n seront malaisés dès que la situation se compliquera, surtout pour \mathbb{D}_0 , l'ensemble des naturels, car nous avons vu que si les décimaux sont au fond des naturels, les entiers ont été déclarés ne pas être des décimaux !

Guy Brousseau met bien en cause cette présentation des décimaux. Selon lui, elle ne permet pas aux élèves d'acquérir de solides compétences ni pour la comparaison ni pour l'addition. Si l'on rejette cette présentation, il reste une question à résoudre : comment montrer que les décimaux permettent d'approcher les nombres réels ? Guy Brousseau et Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin ont conçu des situations pour répondre à cette question, nous allons les décrire dans le paragraphe suivant.

Approche décimale d'un rationnel ou d'un irrationnel

Les deux situations d'approximation de réels à l'aide de décimaux élaborées respectivement par Guy Brousseau et par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin sont bien connues des didacticiens, nous nous contentons de les rappeler car nous ne les avons retrouvées ni dans des manuels ni dans des brochures destinées aux enseignants. Ces situations ne contribuent donc pas à l'élaboration des conceptions des élèves sur les nombres décimaux à l'école primaire, sauf pour ceux dont les enseignants utiliseraient ces propositions de didacticiens....

En CM2 comme en sixième, les décimaux qui permettent d'approcher des quotients sont généralement obtenus par une mise en œuvre de la technique de la division, le problème alors posé est celui de la difficile interprétation du reste.

♦ *Le jeu du radar ou jeu de l'explorateur.* Dans la progression pour l'enseignement des rationnels et des décimaux de Guy Brousseau⁶², les élèves

⁶¹ BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de l'enseignement des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (165-197), Grenoble : La pensée sauvage. [p 173, 174]

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1980 in *Recherches en didactique des mathématiques* 1/1 (11-59), Grenoble : La pensée sauvage

construisent l'ensemble des rationnels, l'addition, la soustraction et la multiplication de deux rationnels, la division d'un rationnel par un entier et une relation d'ordre. Alors seulement, des situations d'approximation de rationnels par des décimaux sont proposées aux élèves : le jeu de l'explorateur ⁶³.

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche. Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela il a le droit de poser des questions, par exemple "est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ?" A n'a le droit de répondre que par "oui" ou par "non". (...)

Le maître (...) introduit de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible (...)

La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie à celles du "filet" de l'adversaire (...)

Cependant déjà, les encadrements décimaux apparaissent (...) les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs s'enflent (...) Encadrée par un intervalle très petit : $1/1\,000\,000$ la fraction $22/7$ n'est pas encore attrapée Une discussion animée s'installe (...)

♦ *Trouver le côté du carré d'aire 27* Dans leur ingénierie pour l'enseignement des décimaux, Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin proposent une situation de recherche des rectangles d'aire 27 ⁶⁴ ; chaque rectangle est associé à un couple (a, b) où a et b sont ses dimensions et chaque couple est représenté sur un graphique. Dans cette famille de rectangles, existe-t-il un carré ? Telle est la question posée aux élèves.

Ils procèdent par encadrement : ils nomment la mesure du côté du carré, x par exemple, et cherchent à encadrer x

$$5 \times 5 = 25 \quad 6 \times 6 = 36 \quad 5 < x < 6$$

Le problème est de s'approcher le plus possible d'un x tel que $x \times x = 27$.

1^{ère} étape : partager en deux l'intervalle d'incertitude (...) les calculs deviennent compliqués (...)

2^{ème} étape : passage au $\frac{1}{10}$ (...) Nous assistons là à un conflit entre deux points de vue à prendre en compte si on veut progresser efficacement :

⁶² BROUSSEAU G (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage.

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage.

⁶³ *Ibid* [pp 241-243]

⁶⁴ DOUADY R & PERRIN M.-J (1986), *Op. cit.* [pp. 143-152].

- simplifier les calculs d'où le choix de $\frac{1}{10}$;
- faire converger rapidement le processus de recherche du carré et donc couper en deux.

3^{ème} étape : passage au $\frac{1}{100}$ et abandon du graphique (...) Il reste que l'écriture est très lourde lorsqu'il s'agit de calculer le carré d'un tel nombre et d'écrire le résultat (...)

Ces deux situations montrent que les décimaux écrits sous la forme d'une somme (y compris avec l'écriture décimale) sont des bons outils pour les approximations parce qu'ils permettent d'effectuer des calculs plus simplement et qu'ils facilitent la détermination de nombres compris entre deux autres pour affiner la précision de l'approximation. Leurs auteurs privilégient les situations où les savoirs apparaissent selon des critères d'utilité pour résoudre un problème, cela explique l'apparition tardive de l'écriture décimale : "*Il reste que l'écriture est très lourde (...)*".

Abordons maintenant les nombres décimaux écrits sous la forme d'un produit, la puissance de dix pouvant être implicite comme lorsqu'on écrit :

$$2,15 \text{ m} = 215 \text{ cm.}$$

Les décimaux écrits sous la forme d'un produit

Comme nous l'avons vu, à l'école primaire, la présentation des décimaux sur la droite numérique par subdivisions réitérées de l'unité est toujours limitée à quelques itérations. Cette simplification permet d'enseigner parallèlement le système décimal et le système métrique : il suffit de limiter le nombre de chiffres après la virgule au rang des plus petites unités pratiquées couramment.

Une telle simplification *a priori* figurait explicitement dans les programmes de 1928 et 1945. Elle engendre une dépendance entre les nombres décimaux et les mesures ainsi qu'une altération des nombres décimaux qui sont, dans les faits, "ramenés" à des entiers.

Les mesures décimales et les changements d'unités

Afin de mieux montrer les conséquences d'un enseignement qui limite les nombres décimaux à l'expression de mesures usuelles, citons quelques extraits du programme du cours moyen de 1945 :

Les élèves ont presque tous entendu parler de prix exprimés en francs et centimes, de poids exprimés en kilogrammes et grammes, de capacités exprimées en litres et centilitres, de distances exprimées en kilomètres et mètres, etc. Il importe de leur faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule : 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m (...)

Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi ramené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c), un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm), un nombre en kilomètres avec trois

décimales (m), un nombre en litres avec deux décimales (cl), un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm^3), etc

Opérations. – Les règles de changement d'unité permettent d'expliquer – sinon de justifier – la pratique des opérations (...). On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité

♦ Le premier effet d'un tel enseignement est, mais c'est bien le choix de simplification opéré, que *les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités pratiquées couramment* ⁶⁵.

♦ Le deuxième effet qui est une conséquence directe du précédent est que les relations topologiques sur l'ensemble de ces décimaux enseignés ressemblent plus aux relations sur l'ensemble des entiers naturels qu'à celles sur l'ensemble des décimaux, citons Guy Brousseau ⁶⁶ :

(...) toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26, mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans \mathbb{D} à 3,15 : ce sera 3,14 etc. Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (...)

L'exemple utilisé dans les programmes de 1945 montre comment le nombre décimal 2,15 est considéré comme un couple de deux entiers 2 et 15 et comment l'écriture décimale est restreinte à ce que nous conviendrons d'appeler un "format social" des décimaux-système métrique ⁶⁷. Chacun des deux entiers 2 et 15 est affecté de son unité, le mètre pour la partie entière, le centimètre pour la partie décimale. La partie décimale 0,15 est, elle aussi, considérée comme un entier par l'effet de l'écriture : $0,15 \text{ m} = 15 \times 10^{-2} \text{ m} = 15 \text{ cm}$. Finalement, la partie entière est associée à l'unité principale usuelle (m, m^2 , ℓ , kg, F...) la partie décimale à sa sous-unité usuelle (cm ou mm, dm^2 , d ℓ , g, c...). Les deux parties sont parfois mises en relation par référence à la sous-unité usuelle : $2,15 \text{ m} = 215 \text{ cm}$. Les nombreuses études de différentes évaluations des acquis des élèves ont montré que cette conception des nombres décimaux cause de nombreuses erreurs : en 1979, une enquête de l'INRP a montré que 37% des élèves de CM2 déclaraient 3,2

⁶⁵ BROUSSEAU G (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, in *Théorie des situations didactiques* (115-160), Grenoble : La pensée sauvage. [p 131].

Version révisée de deux articles :

BROUSSEAU G (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165-198), Grenoble : La pensée sauvage

BROUSSEAU G (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz and C. Garnier (eds.) : *Construction des savoirs – Obstacles et conflits* (41-63). Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE)

⁶⁶ *Ibid.* [p. 132].

⁶⁷ Nous employons le mot format pour désigner un type d'écriture, comme c'est l'usage dans tous les logiciels de traitement de texte, les tableurs. L'expression "format social" d'un décimal désigne ainsi le type d'écriture de ce décimal qui respecte l'usage social.

inférieur à 3,135. Et parmi les élèves qui répondent que 3,135 est inférieur à 3,2, certains *rangent les décimaux en ordre inverse de la longueur de la partie décimale* ⁶⁸...

♦ Le troisième effet est une conséquence sur le calcul, et particulièrement sur le calcul mental, de la conception du nombre décimal comme un couple de deux entiers : *on rencontre fréquemment chez les élèves des égalités du type $2,3 \times 2,3 = 4,9$ ou $17,3 + 21,8 = 38,11$* ⁶⁹. Partie entière et partie décimale étant traitées séparément, n'étant jamais mises en relation, c'est le sens des opérations sur les nombres décimaux qui est perturbé.

♦ Le quatrième et dernier effet que nous énoncerons de cet enseignement qui limite les nombres décimaux à des "nombres concrets" porte sur le rapport entre les nombres rationnels et les nombres décimaux. Dans cet enseignement, une opération entre deux nombres décimaux correspond nécessairement à une opération entre les grandeurs dont ils expriment la mesure. Si un "nombre abstrait" (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas la mesure d'une grandeur) intervient dans un calcul, ce nombre est soit entier soit une fraction mais pas un décimal. Une rupture entre décimaux-nombres concrets et rationnels-nombres abstraits est orchestrée.

Dans tous les manuels de l'époque est cependant insérée une leçon au cours de laquelle on s'efforce de montrer qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale et inversement, ou, si l'on préfère qu'un nombre dit concret : 0,5 m peut prendre l'aspect d'un nombre abstrait $\frac{5}{10}$ opérant sur une grandeur : le mètre. Cette séance se réduit à une leçon de choses sur des écritures. Nulle part, on ne cherche à montrer que ces écritures pourraient remplir la même fonction opératoire ⁷⁰.

Les programmes qui ont succédé à ceux de 1945 n'ont pas modifié cet enseignement des nombres décimaux jusqu'en 1970. La réforme mise en place cette année là bouleverse l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. L'écriture de nombres dans différentes bases influence la présentation des nombres décimaux qui sont alors des cas particuliers de nombres à virgules : ceux pour lesquels les groupements se font par dix. Le sens de chaque chiffre de l'écriture d'un nombre à virgule est abordé par différents exemples. Néanmoins, le nombre décimal reste le nombre de la mesure, opposé à la fraction qui reste un opérateur. Le nombre décimal reste considéré comme un entier à un changement d'unité près ⁷¹ :

⁶⁸ GRISVARD C & LEONARD F (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP* n°340, Paris : APMEP

⁶⁹ APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Nombres décimaux*, Paris. [p. 31]

⁷⁰ *Ibid.* [p. 23]

⁷¹ Programmes et instructions officielles du 2 janvier 1970

On remarquera notamment la différence entre "à tout nombre naturel exprimant une mesure" et "à tout nombre décimal".

On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

Toutes ces remarques ont conduit l'institution scolaire à tenter de dissocier davantage, dans l'enseignement, le nombre décimal de la mesure et de ses unités. Plutôt que d'ancrer la notion de nombre décimal dans une pratique sociale, les enseignants sont invités à introduire cette notion par le problème mathématique de la mesure d'une grandeur avec une seule unité. L'objectif est de relier, dès le départ, le nombre décimal à la fraction décimale, chaque chiffre de l'écriture décimale trouvant sa signification dans la fraction d'unité qu'il représente.

Cette modification des programmes a eu aussi une conséquence concernant l'enseignement des grandeurs et de leur mesure. Dans sa thèse, Jeanne Bolon⁷² a montré qu'actuellement ni les manuels pour l'école élémentaire ni ceux pour le collège ne proposent d'activités qui portent effectivement sur les grandeurs familières. Pourtant ces grandeurs interviennent dans tous les problèmes numériques issus de situations concrètes ou de la vie courante. Aussi Jeanne Bolon en propose-t-elle un enseignement spécifique que nous allons présenter maintenant.

Un essai d'enseignement des grandeurs familières

Après avoir constaté la disparition de l'enseignement des grandeurs familières dans les manuels, Jeanne Bolon, dans sa comparaison de l'ingénierie de Nadine et Guy Brousseau⁷³ à celle de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin⁷⁴, remarque que⁷⁵ :

La progression Brousseau & Brousseau inclut l'étude de décimaux liés aux grandeurs familières. Certaines grandeurs sont effectivement mesurées ou fabriquées (masses, capacités). La progression Douady & Perrin n'inclut pas d'étude de grandeurs familières (sauf la longueur).

Toujours dans sa thèse, l'auteur propose une série de douze *suggestions* progressives sous forme de fiches d'activités commentées. Trois d'entre elles portent précisément sur l'enseignement des grandeurs familières.

Dans la première suggestion⁷⁶, ces grandeurs ne sont pas effectivement mesurées mais elles sont étudiées dans des situations "quotidiennes" qui portent

⁷² BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5. [p 208].

⁷³ BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux : IREM de Bordeaux

⁷⁴ DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

⁷⁵ BOLON J. (1996), *Op. cit.* [p 138]

⁷⁶ *Ibid* [Suggestion n°2, pp 221-222].

sur des relations additives ou multiplicatives et sur des problèmes d'approximation. L'auteur précise que

Sur les grandeurs familières, longueurs, prix, masses, capacités, il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés des décimaux pour faire des calculs additifs à la main. On convertit les centimes en francs ou les centimètres en mètres dès que la somme dépasse 100 ; on fait de même pour des kilomètres et mètres, pour des kilogrammes et grammes

La notion de nombre décimal n'est pas encore approfondie. Dans des situations multiplicatives, les élèves utilisent la calculatrice qui élimine les "zéros inutiles" et qui n'arrondit pas les mesures décimales des grandeurs en respectant le format social. Ainsi émergent des difficultés liées aux contradictions entre ce format et la notation mathématique des décimaux que les élèves doivent lever en travaillant le sens et l'utilité de ces écritures

Dans la deuxième suggestion ⁷⁷, Jeanne Bolon propose des situations où les élèves doivent communiquer sur des grandeurs mesurées avec des unités différentes afin de déterminer la plus grande. Les élèves doivent, par exemple comparer la longueur d'une ficelle rouge et celle d'une ficelle bleue sachant que la ficelle rouge a pour longueur 35 avec l'unité A, la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité B et qu'il faut 10 A pour faire un B. L'objectif est que les élèves découvrent la relation entre le nombre qui indique la mesure et l'unité de mesure pour prévoir comment varie le nombre quand l'unité est multipliée ou divisée par 10, 100... Dans la conclusion de sa thèse, Jeanne Bolon propose, entre autres, ce thème comme perspective de recherche en didactique des mathématiques ⁷⁸ :

Un autre domaine de recherche à ouvrir de nouveau serait celui des *rapports entre nombres, mesures de grandeurs, unités-étalons* dans l'esprit de ce que nous avons proposé dans notre suggestion 8. Ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux dans la période 1960-1980 (Revuz, Colmez en particulier) dans un contexte où la logique de la déduction mathématique dominait l'approche psychologique. L'enseignement y a gagné l'indépendance entre système de nombres et mesures. Il y a probablement perdu l'approche algébrique entre mesure de grandeurs, unités-étalons et nombres.

Dans la troisième suggestion ⁷⁹, Jeanne Bolon propose un travail pratique sur les conversions de mesure par changement d'unité. Ce travail n'est pas l'étude théorique et systématique d'un tableau analogue à celui de la notation décimale. Au contraire, l'objectif est d'aider les élèves à acquérir quelques repères physiques sur les grandeurs usuelles afin de pouvoir contrôler les valeurs qu'ils annoncent comme résultats dans les résolutions de problèmes. L'auteur propose des travaux pratiques où des longueurs, des masses et des volumes sont mesurées et fabriquées. Par exemple, en atelier "technologie", les élèves fabriquent plusieurs exemplaires

⁷⁷ *Ibid* [Suggestion n°8, pp. 238 et 240]

⁷⁸ *Ibid* [p. 329]

⁷⁹ *Ibid* [Suggestion n°9, p. 239]

de sacs de sable de 1 g, 1 dag, 1 hg, 1 kg. Ils pourront vérifier, à l'aide d'une balance, que 10 sacs de 1 hg ont la même masse qu'un sac de 1 kg.

L'ambition de l'auteur nous semble claire. Les élèves connaissent des notations décimales utilisées socialement, mais, contrairement à ce que préconisaient les programmes de 1945, il ne s'agit pas d'introduire la notion de nombre décimal là où elle n'est pas indispensable ni, a fortiori de réduire l'enseignement des décimaux à une notation pratique couramment utilisée. Il s'agit au contraire de manipuler les grandeurs, de les mesurer avec différents systèmes de mesure et de les introduire dans des situations concrètes afin que les élèves puissent résoudre les problèmes où ces grandeurs familières interviennent.

Utilisons maintenant cette étude pour décrire les objectifs de l'institution scolaire concernant l'enseignement des nombres décimaux.

A priori, quel enseignement des nombres décimaux à l'école et au collège ?

Les nombres décimaux peuvent être présentés à l'école primaire de différentes façons mais, quelle qu'en soit l'introduction trois modes de représentations symboliques correspondant à plusieurs catégories de problèmes peuvent être travaillées (ce que préconisent les instructions officielles actuelles). Dressons un bilan de cette étude pour distinguer, au niveau du sens, les différentes façons de concevoir la notion de nombre décimal.

Ecrits sous la forme d'un quotient, les décimaux servent à résoudre certaines équations du type $ax = b$, sans solution dans l'ensemble des entiers, et des problèmes numériques que ces équations modélisent. Ainsi, les nombres décimaux sont considérés comme des rationnels particuliers écrits sous la forme d'un

quotient $\frac{a}{b}$. Nous avons vu trois situations différentes qui conduisent à une telle utilisation des nombres rationnels : des situations de comparaison conduisant à la mesure de longueur, des situations de fractionnement conduisant à la mesure de longueur et d'aire, et des situations d'agrandissement de figure conduisant à l'utilisation d'opérateurs ou de fonctions linéaires. Nous distinguons finalement, au niveau du sens, le "rationnel-mesure", le "rationnel-fractionnement" et le "rationnel-opérateur".

Les décimaux sont de meilleurs outils que les entiers pour la mesure, ils permettent, comme les rationnels, une approximation aussi précise qu'on le souhaite de la position d'un point sur une droite graduée ou de la mesure d'une grandeur. Ecrits sous la forme d'une somme ou avec la notation décimale, la résolution de ces problèmes d'approximation est simplifiée. Nous avons vu que la mesure de longueur de segment ou la situation de repérage de points sur la droite numérique conduit à l'utilisation des décimaux avec cette représentation symbolique. En référence au système métrique, les nombres décimaux sont implicitement écrits comme des produits et répondent aux problèmes de mesure des grandeurs familières. Nous retenons finalement, au niveau du sens, le "décimal-mesure", le "décimal-abscisse" et le "décimal-système métrique".

Depuis un demi-siècle, les instructions officielles pour l'école primaire ont beaucoup évolué sur l'enseignement des nombres décimaux. Jusqu'en 1970, ils sont réduits à une écriture des mesures des grandeurs familières. Ils sont désignés comme des nombres concrets par opposition aux nombres abstraits qui n'expriment aucune mesure, qui apparaissent dans des calculs et dont la notation privilégiée est la fraction. De 1970 à 1980, c'est l'écriture décimale qui est mise en avant, traduction des nombres entiers après un changement d'unité. L'approche est plus abstraite mais l'opposition est conservée entre le nombre-mesure dont l'écriture est décimale et le nombre-opérateur dont l'écriture est fractionnaire. Durant ces deux périodes, les opérations sur les décimaux ainsi que les techniques opératoires sont enseignées par référence aux nombres entiers, à l'aide de décalages de la virgule.

Depuis 1980, l'ambition de transformer le paysage numérique est nettement affirmée : face aux nombres entiers, les fractions et les décimaux sont les nouveaux nombres qui vont pallier les insuffisances des premiers⁸⁰ :

Diverses situations permettront aux enfants de prendre conscience de la nécessité de disposer d'autres nombres. Ainsi :

(...) la fonction "diviser par 100" dans \mathbb{N} n'est pas définie pour 22, pour 1 110, etc.

(...) Lorsqu'on veut exprimer la mesure de la longueur d'un objet avec une unité choisie, l'ensemble des nombres naturels est peu satisfaisant, ne permettant pas de transmettre une information précise dans la plupart des cas

(...) de nombreux points ne correspondent à aucun nombre naturel. On peut chercher à affecter un nombre à d'autres points de la droite ; par exemple : au milieu du segment défini par le "point 102" et le "point 103"

Comme l'indique le complément aux programmes de mathématiques pour le cycle des approfondissements de l'école primaire et pour la classe de sixième "Mathématiques : articulation école-collège⁸¹" paru à la fin de l'année 1996, les décimaux sont, à l'école primaire, le plus souvent présentés à partir des fractions décimales. Les facilités de calculs et de comparaisons que permettent les décimaux expliquent que ceux-ci soient privilégiés à l'école comme dans la vie courante. Mais paradoxalement, l'ambition de "libérer" les nombres décimaux de la mesure s'est accompagnée, dans les publications scolaires et donc peut-être aussi dans les pratiques, d'un abandon de l'enseignement de la mesure des grandeurs familières. Ne pourrait-on pas craindre alors une régression des capacités des élèves à résoudre les problèmes numériques courants ? Ils modélisent les situations qui, précisément, mettent en relation les grandeurs familières.

En sixième, à propos des nombres décimaux, les instructions officielles de 1996 chargent les professeurs d'une triple mission : prolonger le travail commencé à

⁸⁰ Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978

⁸¹ BO n°44 du 5 décembre 1996.

l'école primaire sur la signification des écritures décimales, introduire la notation fractionnaire des quotients d'entiers ou de décimaux et leur faire acquérir le statut de nombre, former les élèves à la résolution de problèmes numériques ⁸²...

On consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes. (...)

A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de l'activité de partage (...). Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités (...).

Les problèmes sont à la fois la source et le critère des connaissances mathématiques. Mais de quels problèmes s'agit-il ? Le terme de problème *concret* utilisé dans les précédents programmes a été abandonné parce qu'il renvoie trop souvent à la seule idée de *problème de la vie courante* (...). C'est tout le métier du professeur d'adapter la complexité des problèmes proposés à ses élèves.

A propos des nombres décimaux et des opérations, les programmes pour la classe de sixième indiquent ce qui a disparu de l'enseignement primaire : " C'est en sixième que le professeur doit désormais conduire l'apprentissage de la multiplication de deux décimaux qui était autrefois entrepris à l'école élémentaire " mais ils demandent aussi aux professeurs de revenir sur ce qui n'est pas encore acquis ⁸³ :

Pour les nombres décimaux courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.

Sur une droite graduée : lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement, situer un point d'abscisse donnée.

L'institution scolaire reconnaît explicitement que les connaissances des élèves à la sortie l'école primaire ne sont pas suffisantes ⁸⁴ : " Les évaluations faites en 6e ont montré combien la signification des écritures décimales échappe encore à beaucoup d'élèves à l'entrée en 6e. " Cependant, elle ne semble pas revendiquer ce constat comme la conséquence d'une formation différente et programmée sur une durée plus longue, la scolarité de la quasi-totalité des élèves se prolongeant jusqu'en classe de troisième générale ou technologique. Pourtant, nous avons constaté depuis 1980 une évolution sensible de l'ambition des programmes à propos de la connaissance des décimaux et cette évolution pourrait expliquer des acquisitions différentes des élèves. Nous avons par ailleurs remarqué que cette évolution n'a pas été favorable à l'enseignement des grandeurs familières qui sont pourtant

⁸² Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

⁸³ *Ibidem*.

⁸⁴ Accompagnement des programmes de 6e, mathématiques, 1996.

sollicitées dans les situations sur lesquels portent les problèmes numériques et notamment ceux qui conduisent à multiplier deux décimaux.

A la fin de l'année 1998, les derniers changements de programme pour le collège paraissent, ils concernent la classe de troisième⁸⁵. Un paragraphe laisse la possibilité aux professeurs de proposer une réflexion sur les nombres :

Cette partie d'arithmétique [Nombres entiers et rationnels] permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves

A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour distinguer le calcul exact et le calcul approché

Si la réflexion plus approfondie sur les nombres qui est envisagée peut porter sur les décimaux dans la distinction du calcul exact et du calcul approché, il reste que l'effort semble devoir porter sur l'opposition rationnel - irrationnel davantage que sur l'unité du domaine numérique. Les nombres décimaux sont donc utilisés au collège, notamment par l'introduction des calculatrices dans l'enseignement, mais aucune étude nouvelle de la notion même de nombre décimal n'est proposée après l'enseignement élémentaire.

Comme nous l'avons fait pour les nombres décimaux, nous allons maintenant nous attacher à dégager les enjeux mathématiques dont l'enseignement de la multiplication est l'objet à l'école élémentaire et au collège

2. Les enjeux de l'enseignement de la multiplication

Depuis le changement de programme de 1995, à l'école élémentaire, les élèves étudient la multiplication de deux nombres entiers naturels ainsi que la multiplication d'un décimal par un entier. Ils apprennent des techniques opératoires ainsi que le traitement de certaines situations multiplicatives. C'est donc seulement en classe de sixième qu'ils apprennent la multiplication de deux nombres décimaux. Quel enseignement de la multiplication peut-on envisager *a priori* à l'école et au collège ? Le sens de la multiplication évolue-t-il du CM2 à la sixième ? Quelles en sont les continuités et les ruptures ? Afin de répondre à ces questions, nous nous proposons d'étudier successivement les problèmes qui nourrissent le sens de la multiplication, les propriétés de cette opération ainsi que la technique opératoire.

Au niveau de l'enseignement, l'institution scolaire prend position sur l'équilibre à trouver entre ces trois composantes du sens de l'opération – problèmes, propriétés et technique – et cette position évolue. Depuis la généralisation des calculatrices, la technique opératoire et le sens de l'opération sont souvent placées en situation de concurrence dans les différentes publications,

⁸⁵ Programmes de troisième, BO du 15 octobre 1998

y compris dans les instructions officielles. Paradoxalement, leur complémentarité est souvent évoquée à propos de la capacité à résoudre des problèmes numériques⁸⁶ :

Il ne s'agit pas de rechercher une virtuosité dans le domaine du calcul, mais de donner du sens à cette opération ainsi que des moyens de contrôle aux élèves pour le calcul avec des machines

(...) On tendra ainsi à ce que la technique opératoire devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problème.

D'après les auteurs des programmes, l'utilisation de la calculatrice dispenserait de la virtuosité technique mais il existerait un seuil en deçà duquel le manque de technique ferait obstacle au sens. Nous constatons une évolution des objectifs de l'institution scolaire concernant la maîtrise technique car les programmes de 1945 ne mentionnent aucune précision qualitative de cette acquisition : "*Usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux*".

L'enseignement des propriétés algébrique a, lui aussi, évolué. Les programmes de 1995 pour la classe de sixième n'évoquent pas ces propriétés de la multiplication. Après leur étude systématique durant la période de la réforme dite de "la mathématique moderne", il semble que les propriétés sont abordées seulement selon des critères d'utilité, par exemple pour le calcul mental ou raisonné qui figure au programme.

Enfin, les ambitions de formation des élèves ont subi, elles aussi, une évolution sensible en ce qui concerne la résolution de problème. La comparaison de manuels des années cinquante aux manuels actuels en témoigne. Dans les premiers, les situations et les exercices-types sont répertoriés avec leurs méthodes de résolutions. Aujourd'hui l'enseignement est davantage centré sur l'étude des nombres, les élèves sont supposés apprendre à résoudre des problèmes de manière à déterminer une méthode efficace en face d'une situation, même si elle n'a pas été déjà rencontrée.

Afin de déterminer les enjeux de l'enseignement de la multiplication, nous étudions premièrement les problèmes qu'elle permet de résoudre, nous abordons ensuite les propriétés de cette opération et les procédures de calcul du produit de deux nombres décimaux.

Les problèmes que la multiplication permet de résoudre

En reprenant la terminologie utilisée par Gérard Vergnaud⁸⁷ dans la théorie des champs conceptuels, nous appellerons *situation multiplicative* toute situation de laquelle est issu un problème que la multiplication permet de résoudre. Durant les périodes de découverte et d'apprentissage de cette opération, les situations multiplicatives étudiées fournissent les premiers produits de deux nombres,

⁸⁶ Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

⁸⁷ VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactiques des mathématiques* 10/2 3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage

rendent compte de propriétés algébriques de la multiplication et permettent d'envisager des méthodes pour calculer. Elles peuvent conduire à tisser le lien entre la technique opératoire, le principe de numération décimale et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

La multiplication, une addition répétée

- ♦ Quand la multiplication n'est plus qu'une addition

L'addition répétée trois fois du nombre 58 est $58 + 58 + 58$. Cette addition s'écrit 58×3 , on dit que 58 est multiplié par 3, le résultat de la multiplication est le produit de 58 par 3. De nombreuses situations issues du quotidien permettent d'illustrer cette définition de la multiplication de deux nombres entiers, citons par exemple les instructions officielles du 20 juin 1925 :

Nous avons trois sacs de billes qui renferment 58, 23 et 36 billes. Nous réunissons toutes ces billes dans un quatrième sac. Il y aura $(58 + 23 + 36)$ billes.

(...) J'ai maintenant trois sacs de billes. Ils contiennent tous les trois le même nombre de billes, 58 par exemple. Combien aura-t-on de billes dans un quatrième sac où on les vide tous les trois ? Le résultat est encore celui d'une addition : $(58 + 58 + 58)$ billes. Une pareille addition où tous les termes sont égaux, s'appelle une multiplication.

Janine Rogalski, dans sa thèse sur l'acquisition de la bidimensionnalité remarque⁸⁸ :

Avant la réforme des années soixante-dix (...) Cette représentation de la multiplication comme addition répétée est un invariant à la fois au cours du temps et dans les divers niveaux scolaires où elle est entreprise. On la retrouve dans les livres d'arithmétique à l'usage des classes de 6ème, 5ème, 4ème ou 3ème.

Avec cet invariant vont de pair un certain nombre de caractéristiques de l'enseignement de la multiplication :

- le multiplicande est un nombre "concret" ;
- le multiplicateur est un nombre "abstrait" (sans dimension).

Il est rarissime que la mesure des surfaces et volumes soit citée comme une exception à cette règle (...)

Autre caractère lié au précédent : les problèmes posés sont toujours du type "isomorphisme de mesure" au sens de Vergnaud et jamais du type "produit de mesure".

Donc l'enseignement avant la réforme des années soixante-dix "linéarise" complètement les problèmes de la multiplication, ne les met pas en rapport avec la combinatoire du produit cartésien pas plus qu'avec le produit de dimensions "physiques" (...)

⁸⁸ ROGALSKI J (1985), *Acquisition de la bidimensionnalité*, Thèse d'Etat. [Partie V. pp 4 à 7].

Cette présentation de la multiplication apparaît comme très économique pour l'enseignement : la nouvelle opération multiplication n'est qu'une forme nouvelle de la précédente, l'addition. Il reste à construire la table de multiplication, à faire apprendre la technique opératoire et à proposer des exercices dont les situations sont fidèles au modèle référent : l'élève reconnaît le modèle donc l'opération, il la pose, il l'effectue puis il résout le problème.

♦ Une définition contestée

De nombreux auteurs ont développé des arguments pour s'opposer à ce choix de présentation de la multiplication, citons par exemple Jacques Lecoq dès 1976⁸⁹ :

On a, dans ces conditions, $\underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ termes}}$ objets et l'on désigne ce

nombre par le symbole $p \times n$.

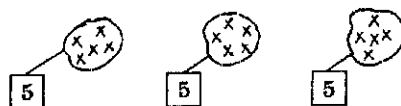
Cette définition – ou plutôt cette introduction, au demeurant légitime – est-elle bien adaptée aux enfants du CE ?

1. Dans la définition évoquée ci-dessus, n et p ne se réfèrent pas à des objets de même nature. En effet, au niveau de la manipulation, n désigne le nombre des ensembles ayant chacun p objets. De même, au niveau numérique, p désigne le nombre qui est répété dans l'écriture " $p + p + \dots + p$ ", tandis que n désigne le nombre de répétition du symbole p .

2. La remarque précédente a conduit à des abus. On a parfois imposé de substituer " $n \times p$ " à " $p + p + \dots + p$ " de façon à lire " n fois p " sans doute par référence à la phrase "il y a n fois p objets dans la situation concrète étudiée". Une telle convention est fâcheuse puisqu'une des propriétés de la multiplication est d'être commutative (...)

3. Cette présentation de la multiplication à partir de situations concrètes introduit des difficultés d'ordre perceptif chez l'enfant. Il doit en effet percevoir simultanément : des collections 2 à 2 disjointes (il y en a n), des objets (il y en a p dans chaque collection et $n \times p$ en tout), des correspondances 1 à 1 (pour s'assurer que les collections ont bien le même nombre p d'objets)

4. Fonder la multiplication sur la réunion de collections disjointes conduit parfois à représenter les situations concrètes par des dessins du type :



(...) si l'on souhaite dépasser le stade du dénombrement des objets de la réunion ($5+5+5$) et donner aux enfants un véritable outil d'exploration,

⁸⁹ LECOQ J. (1976), *La multiplication des naturels à l'école élémentaire*, Brochure Elem Math II, Paris : APMEP.

alors ce type de représentation est peu efficace. On le verrait bien en essayant de visualiser une égalité telle que :

$9 \times (8 + 5) = (9 \times 8) + (9 \times 5)$ par des dessins analogues aux précédents.
(...)

5. N'ayant pas de représentation bien adaptée au problème à étudier, il est inévitable, et on constate effectivement, dans les classes que l'étude de la multiplication se situe presque exclusivement au niveau des écritures (...)

D'autres arguments sont venus compléter la liste :

- si la distributivité à droite se perçoit bien, il n'en va pas de même de la distributivité à gauche ;

- la multiplication de n par 0 et par 1 n'entrent pas dans le cadre de la situation de référence alors que la multiplication de 0 et de 1 par n se calcule bien, cela contribue à masquer davantage la commutativité ;

- si l'addition réitérée permet aisément de prolonger la notion de multiplication au produit d'un décimal par un entier, elle ne peut s'étendre au produit de deux décimaux ;

- avec l'addition réitérée, la multiplication est une opération qui agrandit " toujours ". Cette propriété est une source d'erreurs dans de nombreux problèmes qui demandent le calcul du produit d'un nombre par un nombre inférieur à l'unité, les élèves ne percevant pas le modèle multiplicatif de la situation.

Plus récemment, Rémi Brissiaud⁹⁰ a formulé une constatation surprenante : en 1930, les pédagogues préconisent une méthode "reconstructive" de l'apprentissage, ils optent – dans les programmes de 1923 – pour une multiplication conçue comme une addition réitérée, et pourtant, en ce qui concerne l'apprentissage de la table de multiplication, ils n'envisagent qu'une méthode "reproductive", ignorant les tentatives marginales mais récurrentes d'utilisation de tables d'additions réitérées. Les tables traditionnelles (3×1 , 3×2 , 3×3 ...) conduiraient, plus sûrement et plus rapidement à la mémorisation que les tables d'additions réitérées (1×3 , 2×3 , 3×3 ...). Rémi Brissiaud, dans son article, propose une explication. Un élève qui recherche 3×6 à partir de 3×5 pensera qu'après 15, il y a $15 + 3$ donc 18, il adopte une *régulation spatiale* de sa reconstruction de la table. Un élève qui recherche 3×6 par une addition réitérée devra effectuer 6 et 6, 12 et encore 6, 18. Il se laisse guider par le mot fois, il adopte une *régulation verbale* de sa reconstruction de la table. Mais compter de 6 en 6 est plus difficile que de compter de 3 en 3. Et l'élève qui recherche 3×6 à partir de 6×3

⁹⁰ BRISSIAUD R. (1994), Penser l'usage du mot "fois" et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication, in : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (195-202), Grenoble : La pensée sauvage.

Dans cet article, Rémi Brissiaud désigne par méthode reconstructive une conception de l'enseignement qui vise ce que les élèves acquièrent la possibilité de reconstruire leurs connaissances par opposition à une méthode reproductive où l'objectif premier est que les élèves connaissent des résultats et des méthodes et sachent les utiliser. Le terme "pédagogues" désigne en particulier les auteurs des programmes, ceux des commentaires et ceux des manuels à l'attention des maîtres.

pour n'additionner que des 3 se retrouve pris dans un rituel verbal qui consiste à compter de 3 en 3 depuis le début. Si on veut que l'élève utilise une régulation spatiale, mieux vaut donc éviter de lui faire réciter des tables d'additions répétées.

♦ Une évolution de l'institution scolaire

Sur l'enseignement de la multiplication, nous constatons une évolution très marquée de la position de l'institution scolaire.

Dès 1945, la définition de la multiplication par l'addition était critiquée dans les programmes :

Il est fréquent de dire que la multiplication est une addition abrégée. (...) En fait dans le cas le plus fréquent la multiplication est une convention commerciale : le prix total d'une grandeur est obtenu en multipliant le prix de l'unité par le nombre d'unités

La critique peut laisser perplexe... mais la résolution de problèmes du quotidien était l'objectif majeur de l'enseignement du calcul.

Les programmes de 1970 n'ont plus pour objectif de préparer à la vie pratique mais "d'assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à des techniques de résolution de problèmes". La multiplication de deux entiers est introduite par l'étude de grilles rectangulaires et des écritures additives répétées. La multiplication d'un décimal par un entier est définie par une addition répétée.

Les instructions officielles de 1978 pour l'enseignement primaire ne font plus référence à l'addition pour le produit de deux entiers, et c'est la première fois :

Le nombre d'éléments d'une collection peut être donné sous la forme habituelle (exemple : 125) Mais dans certains cas, il peut être plus intéressant d'utiliser pour le désigner d'autres types d'écritures, par exemple :

(...) Ecritures multiplicatives (exemples : 25×5 ; $7 \times 6 \times 15$) dans le cas d'objets rangés en lignes et en colonnes, dans des situations de dénombrements

(...) En même temps que de nouveaux nombres sont introduits, il faut les désigner, par écrit et oralement, les organiser en prolongeant l'ordre et les opérations connues dans l'ensemble des nombres naturels

(...) Le mode d'introduction retenu pour les nombres décimaux détermine en grande partie le choix des situations conduisant à ces prolongements

Pourtant, alors que ces programmes viennent d'entrer en application, Denis Butlen⁹¹ montre que sur dix manuels destinés au CE1,

La tendance à s'appuyer essentiellement sur l'addition reste très forte (voire majoritaire) pour introduire la multiplication

Janine Rogalski⁹² précise que :

⁹¹ BUTLEN D. (1985), *Op. cit.* [pp. 28-29].

⁹² ROGALSKI J (1985), *Op. cit.* [Partie V pp. 8, 9]

dans la réalisation des séquences proposées et des manuels, la structure de produit cartésien ne sera jamais, à ce niveau de l'enseignement élémentaire CE et CM, dissociée d'une représentation spatiale, le plus souvent en 'matrice' lignes \times colonnes. (...) le caractère linéaire du produit reste dominant voire exclusif ; le caractère bilinéaire n'apparaît pas.

Depuis 1978 les instructions officielles ne font plus référence à l'addition pour le produit de deux entiers. Quelles sont donc les situations différentes de l'addition répétée qui permettraient d'enseigner la multiplication ?

Des situations multiplicatives indépendantes de l'addition

Certaines situations multiplicatives, qui portent pourtant sur des nombres entiers, s'interprètent autrement qu'avec un modèle additif. Gérard Vergnaud en distingue trois types.

Le premier se compose des situations qui mettent en jeu une seule mesure. Certains problèmes mettent en jeu des opérateurs, ils conduisent à la multiplication d'une grandeur par un scalaire comme, par exemple, dans le cas de l'agrandissement d'une figure sans déformation. Les opérateurs peuvent être composés comme dans le cas de plusieurs agrandissements successifs d'une figure, cette situation conduit à multiplier deux scalaires.

Dans le deuxième type de situations, deux mesures se composent pour donner une troisième mesure. C'est le cas par exemple pour l'aire d'un rectangle, produit de la longueur et de la largeur. C'est aussi le cas des problèmes de dénombrement qui conduisent à la recherche du cardinal d'un produit cartésien.

Enfin, le troisième type se compose des situations où deux grandeurs sont proportionnelles, le coefficient qui permet de calculer la valeur de l'une connaissant la valeur de l'autre est lui-même la mesure d'une troisième grandeur qui est la grandeur quotient des deux autres. C'est le cas des problèmes qui décrivent le mouvement uniforme d'un mobile, c'est aussi le cas des situations d'achat de marchandises avec un prix unitaire fixé. En reprenant la terminologie de Gérard Vergnaud⁹³, nous désignons ce type de situations comme des *situations d'isomorphisme de mesures* ou, avec le vocabulaire actuellement utilisé dans les programmes, d'isomorphisme de "grandeurs".

Des situations multiplicatives ont été utilisées par différents auteurs pour introduire ou enrichir le sens de l'opération, nous allons en présenter succinctement cinq, souvent rencontrées dans les publications, une analyse détaillée des propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux sera l'objet du prochain chapitre.

⁹³ VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : Peter Lang [pp. 161 et suiv.]

1) Multiplication d'une longueur par un scalaire (un seul espace de mesure)

Guy Brousseau⁹⁴ propose l'étude d'agrandissements de figures planes sans déformation. Son objectif est que l'élève déstabilise le modèle additif dans cette situation pour le remplacer par un modèle multiplicatif :

longueur originale \times coefficient de l'agrandissement = longueur image.

Cette situation permet aussi d'introduire les rationnels et les décimaux et de prolonger la multiplication des entiers à celle des décimaux. Pour cette raison, nous reportons son étude au chapitre suivant consacré aux propositions pour enseigner la multiplication des décimaux.

Remarquons cependant que toutes les multiplications d'une longueur par un scalaire ne correspondent pas à ce modèle, certaines d'entre elles sont en fait des additions réitérées. Le périmètre d'un polygone à n côtés est égal à la somme des longueurs de ses côtés ; dans le cas d'un polygone régulier, le calcul du périmètre est toujours noté par une multiplication. On trouve dès l'enseignement élémentaire la formule du périmètre du carré ainsi que celle du périmètre du disque. L'élève est-il vraiment conduit à s'interroger sur la différence de signification du signe \times dans les formules :

$$\mathcal{P} = 4 \times \text{côté} \text{ et } \mathcal{P} = \pi \times \text{diamètre} ?^{95}$$

2) Composition de deux opérateurs multiplicatifs (un seul espace de mesure)

L'ambition de Guy Brousseau⁹⁶ étant d'identifier \mathbb{Q}^+ et l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+)$ des applications linéaires dans \mathbb{Q}^+ , il propose une activité de composition d'agrandissements de figures planes avec des pantographes. Le produit des coefficients de deux agrandissements est égal au coefficient de la composée des deux agrandissements. Dans l'édition de 1998 d'un recueil de textes de Guy Brousseau, l'auteur précise dans une note les différents sens du produit de deux rationnels et celle de deux entiers, en particulier⁹⁷ :

L'application linéaire naturelle de \mathbb{N} dans \mathbb{N} n'est pas non plus une opération. Elle peut être identifiée avec un naturel opérant

⁹⁴ BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage.

⁹⁵ Les deux formules peuvent aussi s'interpréter de la même façon : 4 étant le périmètre du carré de côté 1 et π étant le périmètre du disque de diamètre 1, on considère le carré de côté c comme un agrandissement du carré de côté 1 et le disque de diamètre d comme un agrandissement du disque de diamètre 1, on obtient alors respectivement un périmètre de $4 \times c$ et $\pi \times d$.

⁹⁶ BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage.

⁹⁷ BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage [pp. 210 à 216].

multiplicativement dans un ensemble de mesure (un demi-groupe) et il lui est associée une opération.

Exemple $f(3)=12$ avec $f=4$ Pour bien marquer la différence on peut écrire $f=*4$. Les enseignants du primaire appelaient cela un 'opérateur' et ils écrivaient $*4(3)$ ou $*4 \times 3$ ou, avec une flèche, $3 \xrightarrow{\times 4} 12$ ou simplement 3×4

(...) La composition d'applications est une opération interne dans le semi-groupe des applications linéaires de N dans N . Elle peut être aussi interprétée comme une multiplication $*4 \circ *3 = *12$

Cette proposition permet, elle aussi, d'aborder des situations multiplicatives qui ne peuvent pas se réduire à des additions répétées. Nous n'avons trouvé aucune reprise d'une telle activité dans un manuel scolaire ou dans une brochure destinée aux enseignants.

3) Cardinal d'un produit cartésien (produit de mesures)

Dans son étude des introductions de la multiplication à l'école primaire, Denis Butlen⁹⁸ analyse les travaux effectués en didactique des mathématiques sur la multiplication. Il constate que "tous les travaux montrent que la définition du produit de deux naturels découle immédiatement de la définition du produit cartésien de deux ensembles, l'écriture $a \times b$ désigne le cardinal du produit cartésien de deux ensembles ayant respectivement a et b éléments." Ces activités sont généralement proposées à l'aide d'un problème concret comme le dénombrement des bateaux que l'on peut former à l'aide de coques de 4 couleurs différentes et de voiles de 3 couleurs différentes. Le problème est alors représenté de manière spatiale, le plus souvent en tableau, parfois en arbre. Mais cette bidimensionnalité n'est pas associée à celle de dimensions "physiques" et, dans les manuels pour le CM, les problèmes restent des problèmes "linéaires" d'où les produits de dimensions sont exclus.

4) Calcul de l'aire d'un rectangle (produit de mesures)

Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin⁹⁹ proposent des situations de calcul d'aire de rectangles dont les côtés sont des nombres entiers. Cette situation est proche de la proposition des programmes de 1970 d'étude de "grilles", elle a l'avantage de permettre facilement le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux. Nous ne détaillerons donc pas ici cette situation bien connue, nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

⁹⁸ BUTLEN D. (1985), *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*, Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7.

⁹⁹ DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

Remarquons cependant que les exercices proposés dans les manuels qui portent sur la notion d'aire se limitent généralement à l'application de formules, citons Janine Rogalski¹⁰⁰ :

La bidimensionnalité des formules est elle-même très peu exploitée. (...) tout aussi rares les utilisations réelles du caractère multiplicatif des formules, celles-ci sont essentiellement, sinon exclusivement, utilisées pour leur statut algorithmique : la formule, par son expression en langue naturelle, ou sa représentation symbolique, détermine des opérations à effectuer : "chercher la longueur, chercher la largeur, effectuer le produit".

5) Situations d'isomorphisme de mesures

Il reste le cas des situations où interviennent trois grandeurs a , b et c telles que $a \times b = c$ où la grandeur b est la grandeur quotient des deux grandeurs a et c . C'est le cas par exemple des problèmes du type :

- nombre d'unités \times prix unitaire = prix total ;
- durée du parcours \times vitesse moyenne = distance parcourue ;
- volume \times masse volumique = masse ;
- des conversions d'unités (par exemple : passer d'une longueur en pouces à une longueur en centimètres).

La structure multiplicative de ces situations est en fait issue du quotient de deux grandeurs (mesures). Les auteurs de "Apprentissages mathématiques en 6e"¹⁰¹ font le choix de placer la notion de quotient au cœur du champ de connaissances liées à la multiplication et à la proportionnalité. Ils justifient théoriquement leur démarche en citant Jacqueline Lelong-Ferrand¹⁰² :

Une grandeur physique mesurable (masse, longueur,...) peut s'interpréter mathématiquement comme un demi-groupe abélien ordonné (la loi étant notée $+$) que l'on transforme, par le procédé de symétrisation en groupe abélien ordonné G . (Ce qui revient à orienter la grandeur et à lui ajouter des éléments dits "négatifs".)

Si ce groupe est archimédien (...) on démontre que : pour tout a de G tel que $a > 0_G$, il existe un homomorphisme de groupes strictement croissant h_a et un seul de $(G ; +)$ dans $(\mathbb{R} ; +)$ tel que $h_a(a) = 1$

g désignant un élément de G , $h_a(g)$ est la mesure de g quand on prend a comme unité. C'est par définition le quotient de g par a que l'on note $\frac{g}{a}$.

Dans le cas où $G = \mathbb{R} : (\dots) \mathbb{R}$ ayant de plus de 'bonnes' propriétés, il en résulte que h_a est bijectif, propriété que l'on peut utiliser pour définir la multiplication (\cdot) .

¹⁰⁰ ROGALSKI J. (1985), *Op. cit.* [Partie V p. 16].

¹⁰¹ PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier/INRP.

¹⁰² Lelong-Ferrand J. (1985), *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF.

Dans cette présentation, le quotient du réel b par le réel a égal à $h_a(b)$, apparaît avant leur produit (égal à $h_a^{-1}(b)$), phénomène à relier au fait que le quotient de deux grandeurs a une signification physique alors que le produit de deux grandeurs n'en a pas (du moins pas de manière immédiate !)

Les auteurs concluent ce *petit détour vers les mathématiques supérieures* en réaffirmant la nécessité de rompre avec une multiplication réduite à une addition répétée. Nous examinerons, dans le chapitre suivant, leurs propositions à propos de la multiplication de deux décimaux.

Nous avons finalement montré qu'en plus de l'addition réitérée, des situations, dont Gérard Vergnaud distingue trois catégories, contribuent au sens de la multiplication. Quant à leur enseignement, les programmes ont beaucoup évolué : la référence à l'addition, qui était la seule interprétation de la multiplication de deux entiers en 1925, disparaît des textes officiels en 1978. Cependant les analyses de manuels effectuées durant les années 80 montrent peu de changement, qu'en est-il aujourd'hui ?

L'addition réitérée a-t-elle finalement disparu de l'enseignement ordinaire ?

Les situations multiplicatives que nous venons de présenter montrent que les possibilités existent si l'on ne veut pas réduire, dans son enseignement, la multiplication à une addition réitérée. Avec les instructions officielles de 1978, il n'y a plus aucune référence à l'addition pour le cas de deux entiers. Pour l'enseignement de la multiplication d'un décimal par un entier, en revanche, l'addition demeure l'interprétation préconisée¹⁰³ :

Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière.

Et cette interprétation est toujours d'actualité¹⁰⁴ :

En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux (...) Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.

Aujourd'hui, à une exception près¹⁰⁵, les manuels de CE2 que nous avons consultés présentent la multiplication en liaison avec l'addition. Par exemple, on propose à l'élève de dénombrer les cases d'un tableau de quatre lignes et trois

¹⁰³ Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978.

¹⁰⁴ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

¹⁰⁵ *L'heure des maths* CE2 (1999), Paris : Hatier.

colonnes et on lui demande de conclure : $4 \times 3 = 3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3$. En CM2, les manuels présentent la multiplication d'un décimal par un entier soit en référence – éventuellement implicite – à l'addition, soit de façon abstraite comme un problème technique. Nous avons aussi repéré deux manuels¹⁰⁶ qui proposent de s'appuyer sur les changements d'unité – francs en centimes dans un calcul de prix – pour justifier la "règle de la virgule". En ce qui concerne les exercices proposés, un sur deux est purement technique et, pour les problèmes, 74% d'entre eux portent sur des prix ou des conversions, les autres sont du type "isomorphisme de grandeurs".

Sur sept manuels de sixième¹⁰⁷, deux seulement se réfèrent à l'addition pour réviser la multiplication d'un décimal par un entier. On pourrait croire que l'addition réitérée n'est plus le modèle des situations de référence pour l'enseignement de la multiplication. Mais certains manuels ne proposent plus aucune situation multiplicative dans les pages destinées à l'élaboration des savoirs, ils restent à un niveau technique éventuellement nourri, suivant les ouvrages, d'arguments théoriques. Pour les autres, l'opération n'est pas construite en référence à la situation : on affirme purement et simplement que pour déterminer le résultat, il faut multiplier les données.

Aujourd'hui encore, l'enseignement de la multiplication en référence à d'autres situations que l'addition réitérée n'a donc pas vraiment dépassé le cadre de l'enseignement expérimental. Cette représentation de la multiplication n'est pourtant pas satisfaisante dans le cas de deux facteurs décimaux. La question du prolongement de la multiplication des entiers à celle des nombres rationnels est celle que nous nous proposons de traiter maintenant afin de conclure notre étude des situations qui donnent du sens à la multiplication.

Prolongement des situations multiplicatives : des entiers aux rationnels

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que des situations qui permettent la construction du sens de la multiplication portent aussi bien sur des valeurs entières que sur des valeurs décimales ou rationnelles des grandeurs. Nous pourrions dire, d'une certaine manière, que c'est la situation qui légitime le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux. Les situations multiplicatives qui se prêtent effectivement à ce prolongement sont celles qui mettent en relation des grandeurs continues – longueur, aire, masse, capacité... – et non des grandeurs discrètes. Ainsi les aires de rectangles, les agrandissements de figures planes, les prix au kilogramme, au litre ou au mètre donnent des situations qui se prêtent aisément au prolongement de la multiplication à des valeurs

¹⁰⁶ Nouvelle collection Thévenet CM2 (1996), Paris : Bordas [p 106].

Math outil CM2 (1997), Paris : Magnard [p 61]

¹⁰⁷ Par ordre alphabétique des éditeurs : *Décimale 6e* (1996), Paris : Belin ; *Math 6e* (1996), Paris : Bordas ; *Mathématiques 6e* (1996), Paris : Delagrave ; *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette ; *Triangle 6e* (1996), Paris : Hatier ; *Le nouveau Pythagore 6e* (1996), Paris : Hatier ; *Le nouveau Transmath 6e* (1996), Paris : Nathan.

décimales ou rationnelles, en revanche les additions répétées et les dénombrements d'éléments d'un produit cartésien ne s'y prêtent pas.

Encore faut-il nuancer notre propos à cause de l'addition répétée. Il est aisé de multiplier un décimal par un entier : $7,80 \times 2 = 7,80 + 7,80 = 15,6$. Ainsi, 2 kg de pommes de terre à 7,80 F/kg coûte 15,60 F. Mais si, pour multiplier, on se réfère à l'addition répétée, comment calculer le prix de 2,5 kg ? On peut combiner addition et fractionnement : le prix de 2,5 kg s'obtient en ajoutant deux fois 7,80 F et encore une demi-fois. Détaillons le calcul :

$$7,80 \times 2,5 = 7,80 \times \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 7,80 + 7,80 + \left(7,80 \times \frac{1}{2}\right)$$

où $7,80 \times \frac{1}{2} = 7,80 \div 2$ avec $7,80 \div 2 = x$ tel que $x + x = 7,80$.

Cette combinaison de l'addition répétée et du fractionnement est présente dans langage courant, on dit "deux fois et demie" comme on dit "deux fois plus". En généralisant, l'addition répétée est une conception qui permet de résoudre les problèmes de la vie quotidienne issus de situations d'isomorphisme de deux grandeurs. Cette conception de la multiplication possède une dimension sociale qui la légitime, qui justifie qu'elle a été enseignée systématiquement par le passé, alors que l'objectif de l'enseignement primaire était de donner des méthodes pour résoudre des problèmes concrets, et qui contribue sans doute à expliquer les difficultés actuelles pour intégrer d'autres situations multiplicatives dans l'enseignement ordinaire.

Nous avons étudié les différentes situations de référence de la multiplication, situations desquelles sont issus les problèmes multiplicatifs proposés aux élèves. Leur résolution nécessite la reconnaissance de l'opération ainsi que le calcul du produit. La technique opératoire repose à la fois sur le système d'écriture des nombres et sur les propriétés de la multiplication (comme nous le verrons, commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition). Nous allons donc maintenant étudier *a priori* l'enseignement des propriétés de la multiplication, notamment à partir des différents types de situations que nous avons décrits et qui donnent du sens à cette opération.

Les propriétés de la multiplication

Comme nous le montrerons plus en détail dans le prochain chapitre, pour construire la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux, de nombreux auteurs proposent de recourir à l'associativité et à la commutativité de la multiplication et d'utiliser la technique opératoire sur les nombres entiers. Pour multiplier 2,5 et 3,25, ils suggèrent de poser :

$$25 \times 325 = (2,5 \times 10) \times (3,25 \times 100) = 2,5 \times 3,25 \times 10 \times 100 = 2,5 \times 3,25 \times 1\,000$$

et ils en concluent que $2,5 \times 3,25 = (25 \times 325) \div 1\,000$. Cette utilisation des propriétés est souvent masquée par une présentation avec des opérateurs :

$$\begin{array}{rccccccc}
 2,5 & \times & 3,25 & = & 8,125 \\
 \downarrow \times 10 & & \downarrow \times 100 & & \uparrow \div 1000 \\
 25 & \times & 325 & = & 8\,125
 \end{array}$$

A l'école primaire comme au collège, le professeur a seulement pour rôle de faire utiliser les propriétés des opérations : alors que le calcul mental ou raisonné figure au programme de l'école primaire et du collège, aucun apprentissage systématique n'est mentionné. Néanmoins, durant la préparation de ses cours, un enseignant envisage des éventuelles questions de ses élèves, il prévoit aussi les réponses qu'il pourrait apporter. Après avoir montré quelques exemples, un professeur qui voudrait justifier la commutativité ou l'associativité de la multiplication devra s'appuyer sur une situation modélisée par cette opération

Nous allons étudier comment les différentes situations multiplicatives permettent de rendre compte des propriétés de la multiplication. Nous limitons dans un premier temps notre étude au cas de deux facteurs entiers, puis nous envisageons le cas des facteurs décimaux pour les situations qui permettent ce prolongement. Rappelons que nous avons distingué l'addition réitérée, le cardinal d'un produit cartésien, l'aire d'un rectangle (ou le dénombrement de points disposés en réseau rectangulaire) et les situations d'isomorphisme de grandeurs

Commutativité de la multiplication

Examinons, en fonction des différentes présentations de la multiplication, comment le professeur peut enseigner la commutativité.

Addition réitérée. Dans le cas de l'addition réitérée, les facteurs entiers a et n du produit $a \times n$ ne jouent pas le même rôle. Ainsi, d'après la définition,

$$a \times n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ termes}} \text{ et } n \times a = \underbrace{n + n + \dots + n}_{a \text{ termes}}$$

Pour justifier l'égalité des produits, l'enseignant pourra utiliser, par exemple, la disposition de points en réseau rectangulaire, qui est compatible avec l'addition répétée, en modifiant l'interprétation de cette disposition :

$$\begin{array}{ccc}
 3 \times 4 & & 4 \times 3 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 3 + 3 + 3 + 3 & & 4 + 4 + 4
 \end{array}$$

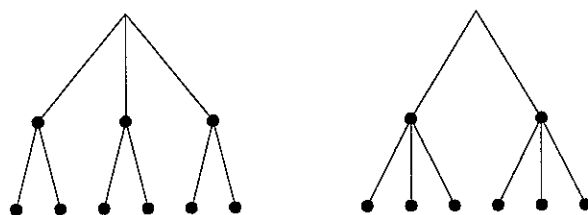
Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs. Dans le cas d'une fonction linéaire appliquée à une variable, on retrouve encore la difficulté posée par la signification des nombres dans la situation. Par exemple, en agrandissant de 5 fois un segment de 3 cm on obtient un segment de 15 cm c'est-à-dire de même longueur que celle du segment obtenu en agrandissant de 3 fois un segment de 5 cm. La commutativité n'est pas évidente non plus dans la situation de deux

agrandissements successifs, car comme le signale Nicolas Rouche que nous avons déjà cité à propos de cette situation ¹⁰⁸ :

(...) elle tend à détourner l'attention des grandeurs sur lesquelles on opère pour la concentrer sur les opérations elles-mêmes et leur enchaînement. Comme les grandeurs ne sont sans doute jamais totalement absentes de l'imagination, on peut dire que la fraction conçue comme pur produit de deux opérateurs est une vue extrême qui tend parfois à s'établir dans la pensée, mais sans jamais s'imposer complètement "

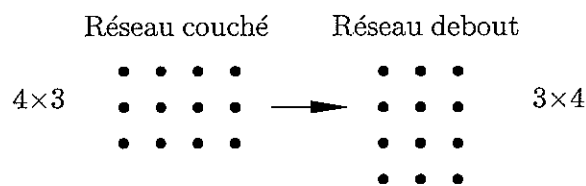
Les enseignants en classe de troisième en ont des témoignages tous les ans quand ils posent à leurs élèves le problème de savoir ce qu'il y a de plus intéressant entre l'application d'une remise de 10% avant d'appliquer la TVA ou après avoir appliqué la TVA. De nombreux commerçants savent que, bien souvent, la clientèle pense bénéficier d'une remise plus importante si elle porte sur le prix TTC...

Cardinal d'un produit cartésien. La justification de la commutativité de la multiplication est difficile avec les situations de dénombrement des éléments d'un produit cartésien. Prenons un exemple : les bateaux que l'on peut construire avec des voiles de trois couleurs différentes et des coques de quatre couleurs différentes ne sont pas les mêmes que ceux que l'on construit avec quatre couleurs de voiles et trois couleurs de coques. On peut toutefois choisir la situation pour que le rôle des nombres ne soit plus distingué. Considérons, par exemple, la situation de Maud qui doit se rendre à son cours de sport : elle dispose de trois polos et de deux shorts, le professeur demande de combien de façons elle peut s'habiller. Une représentation de ce problème avec un arbre permet de compter les tenues. Que Maud commence par mettre un des trois polos puis un des deux shorts ou qu'elle commence par mettre un des deux shorts puis un des trois polos, ne changera rien au nombre de tenues dont elle dispose ; les arbres représentant les deux façons de s'habiller seront pourtant bien différents.



Points en réseau rectangulaire et aire de rectangles. Dans la présentation du dénombrement des cases d'une grille ou des points d'un réseau rectangulaire, la commutativité peut être perçue comme une conséquence de la *conservation des quantités discrètes* (au sens de Jean Piaget) dans transformation "changer la position de la grille ou du réseau" :

¹⁰⁸ ROUCHE N (1992), *Op. cit* [p. 158]



Il en est de même dans la présentation de la multiplication par l'aire de rectangles dont les côtés sont les facteurs.

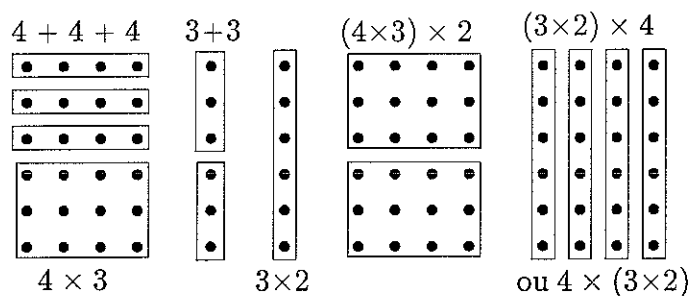
Isomorphisme de grandeurs La commutativité n'a pas de sens dans les situations d'isomorphisme de grandeurs car les facteurs ne désignent pas la même grandeur. Empruntons un exemple aux auteurs d'un ouvrage pour la formation des professeurs des écoles¹⁰⁹. Cinq kilogrammes d'oranges à dix francs le kilogramme coûtent cinquante francs. Dix kilogrammes d'oranges à cinq francs le kilogramme coûtent aussi cinquante francs. Mais l'identification des produits n'émerge pas de ces deux situations bien différentes : dans la première on achète moins d'oranges que dans la seconde, et elles sont plus chères ...

On retiendra, finalement, que certaines situations qui donnent du sens à la multiplication se prêtent mal à l'interprétation de la commutativité. Il reste pourtant fondamental que les élèves la connaissent, sachent l'utiliser et distinguent aussi les opérations commutatives de celles qui ne le sont pas

Associativité de la multiplication

Voyons maintenant comment justifier l'associativité de la multiplication suivant les situations qui donnent du sens à cette opération

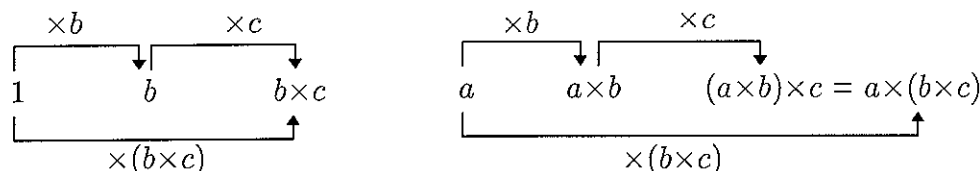
Addition réitérée L'addition réitérée, moyennant par exemple l'utilisation de points disposés en réseaux rectangulaires permet de montrer l'associativité de la multiplication. Cela demande que la commutativité soit une connaissance mobilisable :



Comme précédemment, le changement de statut des nombres de la situation qu'impose l'application de la commutativité rend assez artificielle cette représentation.

¹⁰⁹ Tome 4 *Nombres et opérations, fonctions numériques* (1993), Se former pour enseigner les mathématiques, professeur des écoles, Paris : Armand Colin, Formation des enseignants. [p. 70]

Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs. Si les deux nombres b et c sont les coefficients de deux agrandissements successifs d'une figure plane et si a est la longueur d'un segment de cette figure, alors certaines manipulations conduisent à l'associativité de la multiplication comme le montre le schéma suivant :



Avec la première manipulation, le produit $b \times c$ s'interprète comme le coefficient de l'agrandissement composé de l'agrandissement de coefficient b suivi de l'agrandissement de coefficient c . Avec la seconde manipulation on obtient les deux membres de l'égalité cherchée suivant que l'on considère successivement les agrandissements de coefficients b et c appliqués à la longueur a ou directement l'agrandissement de coefficient $b \times c$ appliqué à la longueur a .

Cardinal d'un produit cartésien. Comme on l'a présenté pour montrer la commutativité de la multiplication, certaines situations de dénombrement se prêtent assez bien à la justification de l'associativité. Par exemple, si Raphaël dispose de 5 chemises, 3 pantalons et 2 paires de chaussures, alors $(5 \times 3) \times 2$ et $5 \times (3 \times 2)$ sont deux écritures différentes du nombre de ses tenues. Le deuxième produit demande d'utiliser la commutativité $5 \times (3 \times 2) = (3 \times 2) \times 5$ car un arbre ne peut pas représenter $5 \times (3 \times 2)$. La situation donne du sens aux deux produits et à leur égalité : soit Raphaël enfle sa chemise, son pantalon puis ses chaussures (ce qui correspond au produit $(5 \times 3) \times 2$), soit il enfle sa chemise après avoir mis son pantalon et ses chaussures (ce qui correspond au produit $(3 \times 2) \times 5$).

Calcul d'aire de rectangles. En ce qui concerne le calcul d'aire, si le produit $a \times b$ est interprété comme l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont a et b , alors le produit $(a \times b) \times c$ n'est pas, lui, interprétable comme une aire car $a \times b$ n'est pas une longueur. Il faut changer de situation pour que les différents facteurs a , $(b \times c)$, $(a \times b)$ et c aient un sens. Théoriquement, on pourrait calculer le volume d'un pavé. Mais ces calculs, difficiles pour les élèves, ne sont pas au programme de l'école primaire.

Situations d'isomorphisme de grandeurs. La difficulté que nous avons constatée, avec les nombres liés à des grandeurs, pour justifier la commutativité, se retrouve pour l'associativité.

On retiendra que les situations qui donnent du sens à la multiplication permettent difficilement d'en montrer l'associativité. Etudions enfin le cas de la distributivité par rapport à l'addition.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Il faut parfois distinguer la distributivité à gauche de la distributivité à droite qui ne se justifient pas toujours l'une et l'autre suivant les présentations de la multiplication.

Addition réitérée Avec l'addition réitérée, la distributivité à gauche est aisément démontrable, la distributivité à droite s'établit en utilisant l'associativité et la commutativité de l'addition pour des valeurs différentes de 0 et de 1 :

$$\begin{aligned} 5 \times (4 + 2) &= \underbrace{5+5+5+5}_{4 \text{ termes}} + \underbrace{5+5}_{2 \text{ termes}} \\ &= (5 \times 4) + (5 \times 2) \\ (3 + 2) \times 6 &= (3 + 2) + \dots + (3 + 2) \\ &= (3 + \dots + 3) + (2 + \dots + 2) \\ &= (3 \times 6) + (2 \times 6) \end{aligned}$$

Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs La démonstration de la distributivité à droite est aisée avec les situations qui reposent sur des opérateurs multiplicatifs comme les agrandissements de figure plane (il suffit d'agrandir une ligne brisée composée de deux segments) mais celle de la distributivité à gauche est impossible car les opérateurs ne s'ajoutent pas. Les situations de composition d'opérateurs multiplicatifs, pour cette même raison, ne sont pas adaptées à l'illustration de la distributivité, ni à droite, ni à gauche.

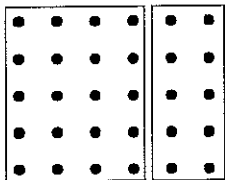
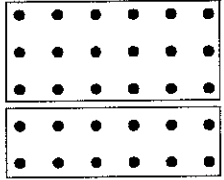
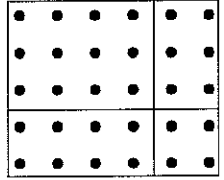
Cardinal d'un produit cartésien. La somme de deux nombres étant interprétée comme le cardinal de deux ensembles disjoints dont les cardinaux sont précisément les deux termes de la somme, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition revient à établir les deux égalités :

$$\begin{aligned} \text{card } A \times (B \cup C) &= \text{card } (A \times B) + \text{card } (A \times C) \\ \text{et } \text{card } (A \cup B) \times C &= \text{card } (A \times C) + \text{card } (B \times C) \end{aligned}$$

ce qui revient à montrer que les produits $A \times B$ et $A \times C$ sont disjoints, comme le sont $A \times C$ et $B \times C$, puis :

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= A \times B \cup A \times C \\ \text{et } (A \cup B) \times C &= A \times C \cup B \times C \end{aligned}$$

Points en réseaux rectangulaires et calcul d'aire de rectangles. Le dénombrement de points d'un réseau rectangulaire ou le calcul de l'aire d'un rectangle sont des situations qui se prêtent très bien à l'illustration de la distributivité : il suffit de "coller" plusieurs grilles ou plusieurs rectangles :

$(5 \times 4) + (5 \times 2)$	$(3 \times 6) + (2 \times 6)$	$3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2$
		
$5 \times (4 + 2)$	$(3 + 2) \times 6$	$(3 + 2) \times (4 + 2)$

Isomorphisme de grandeurs. On peut montrer la distributivité avec une situation d'isomorphisme de grandeurs en faisant appel à la situation pour identifier les deux membres de l'égalité. Supposons que chaque jour de la semaine, sauf le samedi et le dimanche, Marie utilise un billet de transport aller-retour à 12 F et prend un déjeuner au self à 37 F. Le calcul de la somme dépensée peut s'effectuer de deux façons : le coût total du transport est 12×5 et celui du déjeuner est 37×5 soit une dépense totale de $(12 \times 5) + (37 \times 5)$, ou bien l'on calcule le coût par journée $(12 + 37)$ que l'on multiplie par le nombre de journée $(12 + 37) \times 5$. Voyons une illustration de la distributivité à gauche. Vincent doit repeindre deux chambres, la surface à peindre de la première chambre 45 m^2 et celle de la seconde mesure 60 m^2 . Vincent utilise 15 cl de peinture par m^2 . Le calcul de la quantité de peinture nécessaire peut se calculer de deux façons, en calculant d'abord la quantité par chambre ou bien d'abord la mesure de la surface totale. On obtient $(15 \times 45) + (15 \times 60)$ ou bien $15 \times (45 + 60)$. On retrouve ce type de raisonnement avec les situations illustrant le dénombrement des éléments d'un produit cartésien.

Finalement, la distributivité est, des trois propriétés que nous venons d'étudier, celle qui se montre le plus facilement en s'appuyant sur une des situations qui donnent du sens à la multiplication. Néanmoins, nous avons constaté quelques différences entre toutes ces situations. Abordons maintenant les cas particuliers de la multiplication par zéro ou par un.

Multiplications par 0 et par 1

Ces deux multiplications sont indispensables pour effectuer des calculs puisque 0 et 1 sont deux chiffres qui, comme les autres, apparaissent dans l'écriture des nombres. Elles constituent cependant une source de nombreuses erreurs chez les élèves. Doit-on rechercher les causes de ces difficultés dans leur enseignement ou dans les mathématiques elles-mêmes ? Voyons comment on peut illustrer la multiplication par 0 et par 1, suivant les situations que cette opération modélise.

Addition répétée. L'écriture $a \times n$ correspondant à la somme de n termes égaux à a , n'est véritablement définie que pour $n \geq 2$. Ainsi, des produits comme 0×7 ou 1×5 ne posent pas de problème alors que 7×0 ou 5×1 ne sont pas définis. La possibilité éventuelle d'admettre la commutativité réglerait le problème pour les exemples montrés mais elle ne change rien à la difficulté de représenter 1×0 .

Opérateurs multiplicatifs et compositions d'opérateurs. Les situations qui reposent sur un opérateur multiplicatif n'ont de sens que pour les opérateurs différents de 0 et de 1. Elles permettent d'interpréter la multiplication $1 \times k$ où k – différent de zéro et de un – est le coefficient. Par exemple, dans l'agrandissement d'une figure plane de coefficient 3, un segment de longueur 1 cm a pour image un segment dont la longueur en cm est égale à $1 \times 3 = 3$. Mais il sera impossible d'illustrer une des autres multiplications que nous étudions ici. La

restriction des valeurs de k fait que le modèle de composition d'opérateurs est, lui aussi, inadapté pour rendre compte de ces deux multiplications

Cardinal d'un produit cartésien. En reprenant la situation de dénombrement des bateaux que l'on peut construire avec des voiles et des coques de couleurs différentes, on illustrera facilement la multiplication par 1 : s'il n'y a qu'une couleur de coque, alors il y a autant de bateaux que de couleurs de voile. En revanche la mobilisation de l'ensemble vide rend délicate l'interprétation de la multiplication par 0, difficile en effet de compter les bateaux que l'on ne peut construire en l'absence de voile...

Points en réseaux rectangulaires et calcul d'aire de rectangles. La situation de dénombrement de points d'un réseau rectangulaire ne permet pas d'illustrer ces deux multiplications car il faut au moins deux lignes pour faire un réseau rectangulaire. En revanche, le calcul d'aire de rectangle permet d'illustrer une multiplication dont un facteur est 1 (l'autre étant non nul) mais pas celle où l'un des facteurs est égal à zéro.

Isomorphisme de grandeurs. Les situations d'isomorphisme de grandeurs, ne permettent pas d'illustrer facilement les produits dont un facteur est égal à 0 ou à 1. Etudions deux exemples. Le prix d'un kilogramme de pommes qui coûtent 12 F/kg est 12 F. On ne pose pas la multiplication $12 \times 1 = 12$ pour répondre. C'est l'interprétation du prix par kilogramme qui donne la réponse : on paie 12 F pour 1 kg. Plus délicate encore est l'interprétation de $12 \times 0 = 0$ par le prix à payer lorsqu'on n'achète pas de pommes... Voyons un autre exemple. La notice d'un sirop pour nourrissons précise la posologie, "dose quotidienne : une cuillerée à café par kg" ; pour un enfant de 6 kg, le médecin a prescrit 2 cuillerées à café 3 fois par jour. La dose est bien de 6 cuillerées par jour. Le médecin a-t-il procédé par identification des valeurs ou bien a-t-il calculé $1 \times 6 = 6$? Difficile de répondre, surtout si le médecin procède par addition répétée pour multiplier.

L'examen des différentes situations qui permettent de présenter la multiplication montre qu'elles posent bien des difficultés pour donner du sens aux produits dont un facteur est égal à 1 ou à 0

Abordons maintenant les propriétés de la multiplication de deux décimaux

Prolongement des propriétés de la multiplication : des entiers aux rationnels

Nous avons vu que certaines situations ne convenaient pas pour montrer des propriétés algébriques de la multiplication dans le cas où les facteurs sont entiers. Parmi ces situations, certaines se prolongent aux valeurs décimales mais elles ne conviendront pas mieux, avec des facteurs décimaux. De même, en reprenant l'étude menée sur le cas des facteurs entiers, nous pouvons remarquer que, pour les situations qui portent sur des grandeurs continues (aire de rectangles, agrandissement de figures planes, isomorphisme de grandeurs continues), le fait que les facteurs soient entiers ou décimaux ne change pas l'émergence de la propriété algébrique. Elles conviennent donc tout aussi bien.

Si l'étude de l'effet de la multiplication sur l'ordre n'est pas explicitement au programme de l'enseignement primaire ni de la classe de sixième, un problème

d'enseignement bien connu que pose le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux explique que nous y consacrons tout de même un paragraphe. Si l'on prend soin d'écarter les facteurs égaux à 0 ou à 1, la multiplication par un nombre entier "augmente" le multiplicande. Autrement dit, si $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ et si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ alors $a \times n > a$ ¹¹⁰. Il en résulte que, sous les mêmes conditions, $a \div n < a$. Les professeurs se trouvent confrontés à une acquisition précoce de cette propriété de la multiplication qui n'est pas conservée lors du prolongement aux valeurs décimales positives. Ainsi, certains élèves qui repéraient l'opération à effectuer pour résoudre un problème en s'appuyant sur une comparaison *a priori* du résultat de l'opération et des valeurs données, se trompent parce qu'ils continuent de multiplier pour agrandir et de diviser pour réduire.

Signalons enfin un problème, lié au sens de l'écriture décimale, posé par les multiplications dont le multiplicateur est 10, 100 ou 1 000... Ce problème est bien connu lui aussi. Pour multiplier un entier, on "ajoute des zéros", pour multiplier un décimal, on "déplace la virgule". Mais comme il arrive qu'il faille "déplacer la virgule" et "ajouter des zéros" certains élèves appliquent ces règles alors qu'elles ne sont pour eux que des recettes imprécises qui conduisent parfois à la réussite et souvent à l'erreur.

Parce que les propriétés algébriques de la multiplication font partie des propriétés qui donnent du sens à cette opération et parce que ces propriétés sont utilisées pour établir la technique usuelle du calcul du produit de deux décimaux, nous avons étudié la commutativité, l'associativité, la distributivité par rapport à l'addition ainsi que les cas où l'un des facteurs est égal à zéro ou à un. Nous avons examiné l'adaptation des différentes situations multiplicatives pour montrer ces différentes propriétés. Nous sommes parti des situations puisque à l'école primaire comme au collège, c'est en partant des problèmes que les opérations sont enseignées. Le bilan que nous pouvons en tirer est double. Premièrement, les différentes situations ne sont pas "équivalentes" pour enseigner les propriétés de la multiplication. Deuxièmement, certaines propriétés, comme la distributivité, émergent de nombreuses situations alors que d'autres, comme l'associativité ou la multiplication par zéro, ne sont pas faciles à établir. Enseigner le sens d'une opération, comme y incite conjointement la noosphère et les programmes officiels, comporte deux aspects : la résolution de problèmes que l'opération modélise et la compréhension des techniques opératoires qui reposent sur les propriétés de l'opération comme sur les systèmes d'écriture des nombres.

Après avoir étudié *a priori* l'enseignement des nombres décimaux (des différentes conceptions et des représentations symboliques qui y sont liées), des situations multiplicatives et des propriétés algébriques, nous allons donc aborder la relation entre la technique opératoire et les différentes écritures des nombres

¹¹⁰ La multiplication par un nombre positif conserve l'ordre donc $a \geq 1$ et $n > 1 \Rightarrow a \times n > a \times 1$

Les procédures de calcul du produit de deux décimaux

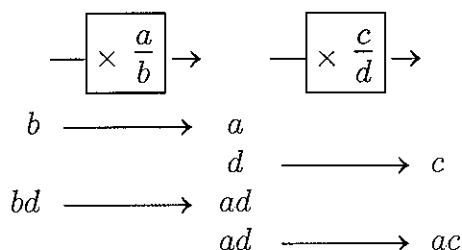
Nous avons considéré trois représentations des nombres décimaux : sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit. Chacune d'elle est liée à des problèmes que les décimaux permettent de résoudre. Dans ce paragraphe, nous montrons, pour chacune de ces représentations, comment s'interprète et comment se calcule le produit de deux décimaux. Nous indiquons les propriétés de la multiplication qui sont utilisées pour permettre le calcul du produit ainsi que d'éventuelles inadaptations d'une représentation des nombres décimaux pour penser ou calculer leur produit. Nous accordons enfin une attention particulière à l'usage des calculatrices.

Avec les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient d'entiers

Nous reprenons les trois types de problème que l'utilisation des rationnels aide à résoudre et que nous avons présentés précédemment : mesure, fractionnement et opérateur linéaire. Mesure et fractionnement seront traités ensemble car dans ces types de problèmes, le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est considéré comme la solution de l'équation $bx = a$. Que signifie $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$? comment peut-on calculer ce produit ? en utilisant quelles propriétés de la multiplication ?

♦ En considérant les rationnels comme des outils pour la mesure ou le fractionnement, le rationnel $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$, le rationnel $\frac{c}{d}$ est la solution de $dy = c$ et l'on obtient, après multiplication membre à membre des deux égalités, $(bx)(dy) = ac$. En utilisant l'associativité et la commutativité de la multiplication des entiers, on en déduit $(bd)(xy) = ac$ et finalement que $xy = \frac{ac}{bd}$ c'est-à-dire $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Cette technique opératoire permet d'obtenir facilement la technique usuelle de la multiplication des décimaux : on effectue la multiplication sans tenir compte des virgules puis on place la virgule au produit. Par exemple $3,14 \times 2,7 = \frac{314}{100} \times \frac{27}{10} = \frac{314 \times 27}{100 \times 10} = \frac{8\,478}{1\,000} = 8,478$.

♦ En considérant les rationnels comme des opérateurs multiplicatifs, par exemple comme des coefficients d'agrandissement des longueurs d'une figure plane, le produit de deux rationnels s'interprète comme le coefficient de la composée de deux agrandissements successifs. Remarquons que ce fait n'est pas immédiat et demande à être enseigné pour être construit. L'opérateur a/b transforme b en a , l'opérateur c/d transforme d en c . Pour calculer l'opérateur produit, il suffit de déterminer une valeur initiale et son image. Une propriété des applications linéaires est utilisée pour associer ad à bd puis ac à ad :



on en déduit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. On retrouve ensuite la technique décrite ci-dessus.

Signalons, pour conclure sur les décimaux considérés comme des rationnels opérateurs, une difficulté que l'on rencontre si l'on souhaite construire le produit de deux rationnels par l'application d'un opérateur multiplicatif rationnel à une longueur elle-même rationnelle. C'est sans doute une des raisons qui ont conduit Guy Brousseau à enseigner la multiplication par composition d'agrandissements. Nous ne détaillerons pas les raisons de ces difficultés que Guy Brousseau lui-même expose dans des commentaires récents¹¹¹ de son article plus ancien "*Problèmes de didactique des décimaux*", nous en citons seulement de courts extraits qui indiquent la difficulté du passage de la multiplication d'une mesure rationnelle par un entier (ce que Guy Brousseau présente dans la "deuxième ligne") à la multiplication d'une mesure rationnelle par un rationnel (ce que Guy Brousseau présente dans la "troisième ligne") :

La troisième ligne présente le cas où les opérateurs sont des fractions engagées dans des mesures rationnelles (...) Cette étape présente l'aboutissement d'un processus très important et bien plus complexe que ne le laisse supposer la proximité formelle entre $n * L/a$ et $n/a * L$ (...) Il aurait fallu beaucoup d'étapes entre la deuxième ligne et la troisième pour représenter la lente évolution historique ou une évolution ontogénétique didactique plausible

Avec les nombres décimaux écrits comme une somme

♦ En considérant les décimaux comme des mesures de longueur de segments ou d'aire de rectangles on obtient une possibilité de calculer le produit de deux rationnels. Le fait que l'aire du rectangle soit le produit de ses dimensions n'est pas immédiat et demande à être enseigné. Nous décrirons, dans le prochain chapitre, cette façon bien connue aujourd'hui de procéder qu'utilisent Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin dans leur ingénierie didactique. L'utilisation de l'addition des longueurs de segments mis "bout à bout" conduit à considérer le nombre décimal comme une somme de fractions dont les dénominateurs sont des puissances croissantes de 10.

¹¹¹ BROUSSEAU G (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage. [p. 213].

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage.

Par exemple, la longueur 3,14 est pensée $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$, la largeur 2,7 est pensée $2 + \frac{7}{10}$ et l'aire du rectangle $3,14 \times 2,7$ se calcule à l'aide d'un tableau en utilisant implicitement la distributivité à droite et à gauche de la multiplication :

	3	1/10	4/100	
2	0 6	0 2	0 8	
7/10	2 1	0 7	2 8	
	8	4	7	8

Remarquons que cette technique ne conduit pas à la technique usuelle du calcul du produit de deux décimaux mais à la technique dite "per gelosia". Elle permet, par une lecture de chaque cellule, de rendre compte de chaque étape du calcul (à l'exception de la gestion des retenues) ainsi que, par une lecture des lignes, du calcul des produits partiels $2 \times 3,14$ et $0,7 \times 3,14$ comme lorsque la multiplication est disposée de façon habituelle ¹¹² :

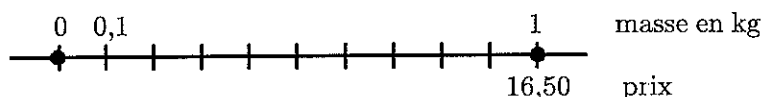
$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} u \ d \ c \ m \\ 3,1 \ 4 \\ \times 2,7 \\ \hline 2 \ 1 \ 9 \ 8 \\ 6 \ 2 \ 8 \\ \hline 8,4 \ 7 \ 8 \end{array}
 \end{array}$$

♦ Afin d'enseigner la multiplication des nombres décimaux considérés comme des abscisses de points de la droite numérique, une équipe de l'INRP a envisagé d'utiliser une bande à double graduation pour déterminer le produit de deux décimaux. Cette situation a été publiée dans *Apprentissages mathématiques en 6e* et reprise par les auteurs de *Travaux numériques 6e*, deux publications destinées aux professeurs de collège ¹¹³. La procédure proposée qui repose sur une représentation graphique reste très artisanale et ne constitue pas une technique de calcul. Illustrons-la par une citation d'un extrait de *Travaux numériques 6e* :

Etudions la correspondance entre la masse et le prix du pain pour 16,50 F par kg. Compléter les deux graduations figurant sur la feuille, puis à l'aide de ces données, déterminer le prix d'un bâtard de 200 g et le prix d'un pain de campagne de 500 g.

¹¹² Les lettres u, d, c, m désignent les colonnes des unités, des dixièmes, des centièmes et des millièmes

¹¹³ PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier/INRP.
DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan Pédagogie.



Sous la graduation 0,1 l'élève doit écrire le dixième de 16,50 c'est-à-dire 1,65. Il écrira 2,30 (le double de 1,65) sous la graduation 0,2 et 8,25 (cinq fois 1,65) sous la graduation 0,5. L'élève pourra conclure que le prix du bâtard est 2,30 F et que celui du pain de campagne est 8,25 F. Ces deux valeurs correspondent respectivement aux produits $0,2 \times 16,5$ et $0,5 \times 16,5$.

Avec les nombres décimaux considérés comme des mesures

Dans l'approche où le nombre décimal sert à exprimer la mesure d'une grandeur, rappelons que l'écriture du nombre est liée aux unités de mesure usuelles. Un prix s'écrit avec deux chiffres après la virgule (francs, centimes), une masse avec trois chiffres (kilogramme, gramme)... Le nombre décimal est pensé comme une unification d'une écriture qui comporterait deux entiers : 3,450 kg pour 3 kg 450 g. C'est ce que nous avons convenu d'appeler le "format social" des décimaux-mesures. Voyons comment cette conception du nombre décimal intervient dans celle de la multiplication des décimaux.

♦ *La multiplication ne "respecte" pas le format social.* En limitant les nombres décimaux à des mesures, toutes les opérations sont liées à des grandeurs. Ces grandeurs sont exprimées par une écriture soumise au format social mais cette contrainte d'écriture n'est pas conservée de manière générale par la multiplication. Par exemple, en multipliant des kg (trois décimales) par des F/kg (deux décimales) on obtient des F (deux décimales) mais le produit obtenu peut contenir de zéro à cinq décimales. Ainsi, le "format social" n'est pas respecté par l'opération. Supposons par exemple qu'un élève ait à calculer le prix de 1,250 kg de viande à 36,00 F/kg ou à 36,40 F ou à 36,50 F/kg ou encore à 36,84 F/kg il trouvera respectivement comme montant à payer 45 F ou 45,5 F ou 45,625 F ou encore 46,05 F. Le premier et le dernier résultats sont conformes à l'écriture d'un prix en francs et centimes, le deuxième et le troisième résultats risquent d'être interprétés comme 45 F 5 c et 45 F 625 c par de nombreux élèves...

Dans un premier temps, l'attribution d'une unité à la partie entière et à la partie décimale peut faciliter l'enseignement des nombres décimaux qui sont alors conçus comme des couples d'entiers. Mais de nombreuses difficultés bien connues en sont les conséquences. Nous venons d'en montrer une qui vient du fait que des kg multipliés par des F/kg donnent des F alors qu'en multipliant un élément de \mathbb{D}_3 par un élément de \mathbb{D}_2 , on n'obtient pas nécessairement un élément de \mathbb{D}_2 .

♦ *La technique opératoire ne peut s'établir de façon générale.* Nous le verrons en détail dans le prochain chapitre, certains anciens manuels présentent la technique opératoire de la multiplication des décimaux, en référence à celle des entiers, en procédant à des changements d'unités. En fait, cette méthode ne

fonctionne pas de façon générale, nous allons le montrer en reprenant les exemples issus du cours d'arithmétique de Ch. Pugibet ¹¹⁴ :

Vous voulez trouver le prix de 12 kg. de beurre à 43^f,40 le kilogramme. (...)

Vous voulez calculer le poids de 4^l,5 d'huile pesant 0^{kg},92 le litre

Dans le premier exemple, on peut convertir le prix : le kilogramme de beurre coûte 4 340 centimes donc les 12 kg coûtent 52 080 c c'est-à-dire 520,80 F. La méthode s'exécute aisément. Ce n'est plus le cas quand il faut convertir à la fois le prix et le poids : quel serait, par exemple, le prix de 12,5 kg de beurre ? Le poids de beurre est de 125 hectogrammes et le prix de l'hectogramme est 434 c, ainsi le prix du beurre est 54 250 c c'est-à-dire 542,50 F. La méthode devient inutilisable lorsqu'on ne peut pas convertir simultanément le poids et le prix : quel serait, par exemple, le prix de 12,450 kg de beurre ? Impossible de calculer ainsi la valeur d'un décagramme donc celle de 12,450 kg, et pourtant, c'est un nombre à deux décimales : 540,33 F.

Dans le second exercice qui porte sur la multiplication de deux décimaux, la conversion n'est pas aussi facile. Le poids de 4,5 l d'huile pesant 920 g le litre est égal au poids de 45 dl d'huile pesant 92 g le dl, on obtient 4 140 g c'est-à-dire 4,140 kg. Mais comment calculer le poids de 4,55 l d'huile ? Avec cette méthode, c'est impossible. Et pourtant, on obtient 4,186 kg et le format social du résultat est bien respecté.

Cette méthode qui repose sur des conversions d'unités n'est donc pas suffisante comme technique pour multiplier deux décimaux. Elle impose au professeur de choisir correctement les valeurs numériques pour poser uniquement les exercices que les élèves peuvent résoudre. Finalement cette méthode ne demande qu'à être abandonnée le plus tôt possible au profit de la technique usuelle qu'elle ne permet pas d'expliquer et qui doit donc être seulement constatée puis admise.

La méthode de changement d'unités, utilisée dans les manuels d'avant la réforme de la mathématique moderne, a été abandonnée après cette réforme. Pour que les nombres décimaux enseignés correspondent davantage aux nombres décimaux utilisés en mathématiques, l'institution a modifié les programmes en affirmant l'indépendance entre le nombre décimal et la mesure. Durant cette période, les manuels ont privilégié un travail sur des écritures numériques, plus abstrait. Aujourd'hui, la méthode généralement proposée consiste à appliquer des opérateurs multiplicatifs aux facteurs du produit pour obtenir le produit de deux entiers et placer la virgule en divisant. Par exemple, pour calculer $3,14 \times 2,7$ on calcule 314×27 , on obtient 8 478 puis on utilise implicitement la démarche suivante qui repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication :

$$8\,478 = 314 \times 27 = (3,14 \times 100) \times (2,7 \times 10) = (3,14 \times 2,7) \times 1\,000$$

¹¹⁴ PUGIBET CH (1947), Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire, Paris : Armand Colin. [p. 94].

d'où $3,14 \times 2,7 = 8\,478 \div 1\,000 = 8,478$.

Cette méthode est générale, elle permet d'expliquer la "règle de la virgule", elle pourra donc céder sa place à la technique usuelle.

Pour terminer notre étude des méthodes de calcul du produit de deux décimaux, nous allons analyser maintenant l'intégration des calculatrices dans l'enseignement. Leur usage, aujourd'hui incontournable, est recommandé par les programmes, il permet d'obtenir le produit de deux décimaux ; nous verrons s'il renforce ou s'il gêne l'enseignement de la technique opératoire, non pas en le plaçant en concurrence avec elle mais en examinant s'il donne ou non de nouvelles occasions pour apprendre plus ou simplement pour apprendre mieux.

Avec la calculatrice

En ce qui concerne spécifiquement la multiplication des décimaux, la mise en œuvre de la technique de multiplication des entiers mise à part, le calcul à la main et le calcul à la calculatrice se distinguent principalement dans l'écriture de la virgule et dans la simplification de l'écriture du résultat. Par exemple, le calcul à la main du produit $3,8 \times 2,15$ conduit à 8,170 alors que le calcul à la machine conduit directement à 8,17. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, certains auteurs de manuels proposent des exercices pour engendrer une réflexion des élèves sur le nombre de décimales des facteurs et du produit, quelques-uns reposent sur l'utilisation de la calculatrice

En considérant le décimal comme un rationnel particulier, le sens de la simplification peut être approfondi : ce n'est pas simplement qu'on "barre le zéro inutile" c'est qu'on simplifie l'écriture du nombre, on transforme la façon de

penser ce nombre, on pense $\frac{817}{100}$ au lieu de penser $\frac{8\,170}{1\,000}$.

Comment l'utilisation de la calculatrice s'intègre-t-elle à un enseignement de la multiplication des décimaux pensés comme des mesures et dont l'écriture est contrainte à un format social ? Comme nous venons de le montrer, la multiplication ne "respecte" pas le format social. Par ailleurs le calcul à la main et le calcul à la machine ne conduisent pas toujours à la même tâche pour l'élève. Illustrons notre propos par quelques exemples :

1,500 kg de fraises à 15,80 F/kg coûtent 23,70 F,
1,800 kg de pêches à 15,75 F/kg coûtent 28,35 F,
0,640 kg de potiron à 7,80 F/kg coûtent 5,00 F.

Dans le premier exemple la calculatrice affiche un prix de 23,7 qui peut être interprété comme 23 F 7 c alors que le produit obtenu en posant l'opération (voir ci-après), en supprimant les zéros inutiles et en effectuant tous les décalages des produits partiels comporte exactement deux décimales.

Dans le deuxième exemple, la calculatrice fournit le résultat avec deux décimales alors qu'en posant le calcul et en supprimant les zéros inutiles (voir ci-après), l'élève obtient trois décimales au produit donc c'est lui qui, en recopiant le résultat, décide ou non de restituer le format social du prix.

$$\begin{array}{r}
 1\,5,8\,0 \\
 \times 1,5\,0\,0 \\
 \hline
 7\,9\,0 \\
 1\,5\,8\,0 \\
 \hline
 2\,3,7\,0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1\,5,7\,5 \\
 \times 1,8\,0\,0 \\
 \hline
 1\,2\,6\,0\,0 \\
 1\,5\,7\,5\,0 \\
 \hline
 2\,8,3\,5\,0
 \end{array}$$

Dans le troisième exemple, les deux façons de calculer donnent le même produit : 4,992 F qui est arrondi à 5 F dans la vie quotidienne et que l'on peut écrire 5 F ou 5,00 F.

Finalement, l'utilisation de la calculatrice pour multiplier deux décimaux demande une connaissance plus approfondie des décimaux et impose une réflexion pour restituer le résultat en respectant le format social. Certains auteurs comme Jeanne Bolon¹¹⁵ ou Milena Basso & Cinzia Bonotto¹¹⁶ proposent d'utiliser ces contraintes comme des leviers. Elles soumettent aux élèves des problèmes à partir desquels ils construiront des connaissances plus solides parce qu'ils auront levé les contradictions que nous avons signalées. Dans la conclusion de sa thèse, Jeanne Bolon signale que de telles perspectives pédagogiques n'ont pas été suffisamment explorées par la recherche en didactique des mathématiques¹¹⁷ :

Un autre domaine de recherche (à ouvrir) concerne les rapports entre les savoirs pratiques et les "savoirs du cours de mathématiques", entre le point de vue "technologique" et le point de vue mathématique () Il nous paraît important d'exhiber, en particulier dans l'enseignement secondaire, les zones de validité de ces deux types d'approches, les différences de statut entre les objets de l'action et les objets mathématiques

Nous pouvons maintenant conclure cette étude de la multiplication par un examen *a priori* de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

A priori, quel enseignement de la multiplication des décimaux ?

Avant d'étudier les propositions pour enseigner la multiplication des nombres décimaux qui figurent dans différentes publications et d'aborder les contraintes éventuelles qui peuvent influencer un professeur dans ses choix d'enseignement, nous souhaitons conclure l'étude que nous venons de mener sur l'enseignement de

¹¹⁵ BOLON J (1996), *Op. cit.* [pp. 221-222 et 239].

Les suggestions 2 et 9 proposent des activités sur les grandeurs familières et les unités conventionnelles

¹¹⁶ BASSO M. & BONOTTO C (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 19A N 5* (424-449), Paderno del Grappa TV. : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin

Les auteurs décrivent une expérience d'enseignement de la multiplication des décimaux et de la proportionnalité en introduisant des tickets de caisse de supermarchés, de primeurs, de bouchers dans le contexte scolaire.

¹¹⁷ BOLON J. (1996), *Op. cit.* [pp. 329-330]

la multiplication à partir des situations qu'elle modélise. Si nous insistons sur ces situations, c'est parce qu'elles contribuent au sens de l'opération qui doit être acquis en classe de sixième¹¹⁸ :

En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux (...). Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication

Les propriétés de l'opération et les techniques de calcul constituent les deux autres composantes du sens de la multiplication. Nous avons vu, en procédant à des croisements, que suivant les situations multiplicatives ou les représentations symboliques des décimaux, il n'était pas toujours possible de montrer telle propriété algébrique ou de justifier la technique opératoire usuelle.

Il ne peut donc être question dans un enseignement de retenir une seule situation de référence de la multiplication ou d'adopter une seule écriture des décimaux. Cependant, pour introduire la notion, le professeur doit bien choisir. Pour conclure l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication à l'école et au collège nous voudrions montrer les conséquences de tels choix. Nous allons rappeler et croiser les résultats obtenus concernant les représentations des nombres décimaux et les trois composantes du sens de la multiplication. Cela nous donnera, en terme de possibles, des outils pour analyser les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux qui figurent dans les publications ainsi que les scénarios élaborés par les professeurs que nous avons observés dans leur classe.

Représentations des décimaux et situations multiplicatives

En considérant trois types de représentations des décimaux et les problèmes qui sont liés, nous avons repéré six manières de penser les nombres décimaux : "rationnel-mesure", "rationnel-fractionnement", "rationnel-opérateur", "décimal-mesure", "décimal-abscisse" et "décimal-système métrique". En plus de l'addition réitérée, nous avons distingué cinq types de situations multiplicatives dont un, le produit cartésien de deux ensemble fini, qui ne concerne que les nombres entiers. A ces cinq types de situations s'ajoute la bande à double graduation qui constitue un outil graphique pour multiplier. Nous allons dresser un tableau qui rappelle, suivant les situations multiplicatives quelles sont les représentations des décimaux qui peuvent être mobilisées.

¹¹⁸ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

	Rationnel mesure	Rationnel fractionnement	Rationnel opérateur	Décimal mesure	Décimal abscisse	Décimal s. métrique
Opérateur scalaire \times mesure	\times	\times	\times	\times		\times
Composition d'opérateurs			\times			
Produit de mesures	\times	\times		\times		\times
Isomorph. de mesures	\times	\times	\times	\times		\times
Double graduation					\times	

Tableau 1. Représentation des décimaux et situations multiplicatives

Le tableau permet de visualiser les représentations des décimaux que l'on peut mobiliser suivant chaque situation multiplicative. Les problèmes issus de la vie quotidienne qui sont beaucoup proposés aux élèves (comme le montrent les choix d'exercices des auteurs de manuels scolaires) reposent fréquemment sur une situation d'isomorphisme de grandeurs ; ils semblent donc se prêter facilement à un travail fructueux concernant les représentations des nombres décimaux.

Représentations des décimaux et méthodes de calcul d'un produit

Nous avons montré que les choix d'écriture des nombres conduisent à des méthodes de calculs variées mais qui ne permettent pas toutes aussi facilement de justifier la technique opératoire usuelle. Rappelons ces résultats dans un tableau. Nous distinguerons les conceptions des décimaux et les écritures suivantes : les rationnels (mesures, fractionnements ou opérateurs) écrits sous forme de fractions décimales ($a/10^n$), les "décimaux-mesures" explicitement écrits comme une somme d'un entier et de fractions décimales de numérateurs inférieurs à 10 ($n + \sum a_i/10^i$), les "décimaux-abscisses" quelle que soit leur écriture (somme ou notation décimale) et les "décimaux-système métrique" associés à une unité du système métrique écrits avec la notation décimale (a,bcd unité). Pour les méthodes de calcul d'un produit, nous avons montré qu'il fallait distinguer la technique usuelle, les méthodes générales de calcul (par exemple la méthode *per gelosia*) et les méthodes artisanales qui ne permettent pas de déterminer tous les produits

	Méthode non générale	Méthode générale	Technique usuelle
Rationnels quelconques $a/10^n$	\times	\times	\times
Décimaux-mesures $n + \sum a_i/10^i$	\times	\times (per gelosia)	
Décimaux-abscisses quelconque	\times (graphique)		
Décimaux-s métrique a,bcd unité	\times (conversion)		

Tableau 2. Représentation des nombres décimaux et méthodes de calcul d'un produit

Propriétés algébriques et situations multiplicatives

Nous allons rappeler les résultats obtenus concernant l'adaptation des diverses situations multiplicatives pour montrer les propriétés algébriques de l'opération

Dans le tableau suivant, pour chaque situation multiplicative, nous avons codé par le signe “+” les cas où les illustrations de propriétés et les prolongements aux valeurs 1, 0 sont aisées avec la référence à la situation. Nous avons codé par le signe “-” les cas où ces illustrations sont très difficiles ou impossibles avec cette situation. Enfin, nous avons codé par le signe \approx les cas où les illustrations et les prolongements ne sont pas impossibles mais sont assez artificiels avec cette situation. Nous disposons alors d'un tableau des différentes situations et de leur efficacité à montrer les propriétés algébriques. Nous avons grisé les colonnes correspondant à deux situations (produit cartésien et points en réseau rectangulaire) qui conviennent pour montrer les propriétés opératoires de la multiplication de deux entiers mais qui ne peuvent se prolonger au cas de facteurs décimaux.

	Addition réitérée	Opérateur $[\times K] \rightarrow$	Compo d' opérateurs	Produit cartésien	Points en réseau	Aire de rectangles	Isomorph. de mesures
Commutativité	\approx	-	-	\approx	+	+	\approx
Associativité	\approx	-	+	\approx	-	-	\approx
Distr. à droite	\approx	+	-	+	+	+	+
Distr. à gauche	+	-	-	+	+	+	+
$1 \times n$	+	+	-	+	\approx	+	\approx
$n \times 1$	-	-	-	+	\approx	+	\approx
$0 \times n$	+	-	-	-	-	-	-
$n \times 0$	-	-	-	-	-	-	-

Tableau 3 Situations multiplicatives et propriétés de la multiplication

Ce tableau rappelle qu'à chaque propriété correspondent des situations adaptées et des situations inadaptées. Une exception cependant, la multiplication par zéro pour laquelle aucune des situations ne fournit d'illustration ou de support pour l'établir avec les deux positions possibles du facteur nul. Seule l'addition réitérée permet de justifier que $0 \times n = 0$. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se montre par de nombreuses situations mais il n'en va pas de même pour la commutativité, l'associativité et pour les produits qui contiennent un facteur nul. Un professeur qui voudrait montrer ces propriétés devra, dans sa préparation, être attentif aux situations qu'il choisira comme support des tâches qu'il proposera aux élèves.

Nous constatons en outre qu'aucune des situations multiplicatives n'est adaptée pour montrer l'ensemble des propriétés. Le nombre important de signes “-” et “ \approx ” du tableau montre que les propriétés de la multiplication des nombres décimaux (entiers ou non) ne sont pas faciles à enseigner à partir des situations multiplicatives. Les trois situations les plus polyvalentes pour l'enseignement de la multiplication des décimaux sont, dans l'ordre, les situations de produit de mesures (calcul d'aire de rectangles), l'addition réitérée et

l'isomorphisme de grandeurs. Ces situations sont-elles celles qui sont le plus utilisées dans les manuels scolaires ou en classe pour enseigner la multiplication des nombres décimaux ? Le chapitre suivant, consacré aux propositions d'enseignement, permettra de répondre à cette question.

Compléments sur l'addition répétée. Le bon "score" de l'addition répétée peut surprendre le lecteur familier des documents d'aide pédagogique où, comme nous l'avons vu, cette conception de la multiplication est rejetée par de nombreux arguments d'inefficacité pour l'enseignement de certaines propriétés de la multiplication. Mais l'étude globale que nous avons menée montre qu'une comparaison locale ne permet pas d'apporter de conclusions générales. Nous avons trouvé une seule brochure pour montrer des qualités pédagogiques de l'addition répétée¹¹⁹. Citons ces auteurs de l'INRP qui commentent la réussite des élèves à deux réductions de calcul littéral ($a + a + a$ et $2a + 3a$) :

La faiblesse des résultats en 4ème notamment (...) appelle des remarques suivantes en matière d'analyse en terme de "savoir" et de "travail des élèves"

En terme de savoir. L'addition itérée n'est pas un objet d'enseignement au collège, alors que la multiplication itérée en est un.

Pourtant, (...)

Ceci prouve que l'on peut définir la multiplication dans \mathbb{R} à partir de l'addition et de la relation d'ordre. L'addition itérée apparaît comme ayant un grand intérêt dans le savoir savant. Elle est d'ailleurs exploitée à l'école primaire pour l'enseignement de la multiplication. Pourquoi n'est-elle pas enseignée au Collège (ce qui conduit à renforcer la conception de la lettre "objet" par des explications du type $2 \text{ ananas} + 3 \text{ ananas} = 5 \text{ ananas}$ donc $2a + 3a = 5a$) ? (...)

En terme de travail de l'élève. On attend donc de l'élève que, face à $2a + 3a$, il tienne le raisonnement matérialisé par les étapes suivantes :

$$2 \times a + 3 \times a$$

$$(2 + 3) \times a$$

$$5 \times a$$

$$5a$$

alors que dans un groupe additif, on a directement $2a + 3a = 5a$ puisque

$$2a + 3a = a + a + a + a + a = 5a$$

Les auteurs semblent regretter que l'addition itérée ne soit pas davantage enseignée au collège et ils attribuent à cette carence de l'enseignement certaines difficultés rencontrées par les élèves. Pour notre part, nous pensons que l'absence de l'addition répétée dans les programmes de collège ne signifie pas une absence de référence à cette conception de la multiplication de la part des professeurs mais peut-être ne la développent-ils pas autant qu'ils pourraient le faire si elle apparaissait explicitement dans les instructions officielles.

¹¹⁹ COLOMB J. (sous la direction de) (1995), *Calcul littéral – Savoirs des élèves de collège*, Paris : INRP, Documents et travaux de recherche en éducation, Didactique des disciplines. [p. 23]

Compléments sur le calcul d'aire de rectangles. Malgré le “ très bon score ” de la situation de calcul d'aire de rectangles, nous avons remarqué (nous le montrerons dans le prochain chapitre) qu'elle est moins utilisée, par les auteurs de manuels, que l'addition réitérée ou que l'isomorphisme de grandeurs. Cela apparaît comme une contradiction. Différents travaux ont montré que les professeurs associent souvent le calcul d'aire à l'utilisation de formules. Les programmes portent-ils leur part de responsabilité ? Voyons ce qu'on y lit sur l'aire du rectangle ¹²⁰ :

(*) Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume du pavé. Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné.

(**) Seule la surface du rectangle est au programme, en liaison avec la multiplication (..) A propos du rectangle le maître insiste sur les opérations associées au calcul du périmètre et de la surface (addition pour le périmètre ; multiplication pour la surface). L'utilisation de formules littérales est prématurée à l'école, aussi une forme intermédiaire est utilisée :

périmètre du rectangle = 2 longueurs + 2 largeurs ;

surface = longueur \times largeur.

(***) On pourra faire déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décomposition, de découpages et de recolllements, soit de quadrillages et d'encadrements (..) On pourra s'appuyer sur ces travaux qui donnent du sens à la notion d'aire pour constituer et utiliser un formulaire.

Ces citations montrent que la préoccupation majeure des auteurs des programmes est d'articuler l'acquisition de la notion d'aire, l'élaboration d'un formulaire, l'application de formules. A cela s'ajoute le fait que, dans les programmes, le calcul de l'aire du rectangle apparaît dans les activités géométriques alors que la multiplication figure dans les activités de calculs numériques. Ce cloisonnement apparent des activités mathématiques dans les instructions explique sans doute pour une part le cloisonnement trouvé dans les manuels (qui souvent respectent la progression des textes officiels) où le calcul d'aire est une activité plutôt traitée en “ géométrie ” et donc en appliquant les acquis sur la multiplication qui n'est alors plus questionnée.

Conclusions sur les nombres décimaux et leur multiplication

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude préliminaire de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. L'objectif était de nous donner des moyens d'analyser les enseignements proposés, dans des publications comme dans

¹²⁰ (*) Programme du 23 avril 1985 pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3.

(**) Projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire, 26/08/1999

(***) Programme de mathématiques de la classe de sixième, 22 novembre 1995.

des classes, pour les rapports qu'ils ménagent entre le sens des notions étudiées et les tâches proposées aux élèves. Nous avons abordé successivement l'enseignement des nombres décimaux puis celui de la multiplication, à l'école primaire puis au collège.

Au XVI^e siècle, les nombres décimaux, avec les écritures décimales illimitées, ont permis d'effectuer un premier pas vers l'unification du domaine numérique. Entiers, rationnels et irrationnels peuvent s'écrire selon le même principe, les calculs et les comparaisons sont facilités. Dans l'enseignement, les décimaux peuvent être abordés de différentes façons suivant leur écriture et les problèmes qui sont liés. Certaines permettent de montrer en partie le rôle que ces nombres ont eu dans l'histoire des mathématiques. Des problèmes de mesure ou d'agrandissement de figures planes conduisent à la construction de l'ensemble des rationnels dont font partie les décimaux. Certains enseignements posent d'emblée la droite numérique unifiée, les nombres sont déterminés ou sont approchés en procédant à des subdivisions successives de l'unité. L'introduction du système métrique permet l'écriture de mesures de grandeurs usuelles en utilisant les nombres décimaux.

Après une évolution sensible des instructions depuis une cinquantaine d'années, les programmes recommandent actuellement de traiter le caractère algébrique des nombres décimaux en les introduisant à partir des fractions décimales qui permettent de résoudre des équations qui restent sans solution dans l'ensemble des entiers. Ils recommandent de privilégier l'utilisation des nombres décimaux pour les problèmes de mesure, d'approximation et de comparaison. Ils préconisent enfin de faire acquérir les techniques opératoires, sans rechercher la virtuosité, afin que les élèves puissent résoudre des problèmes numériques. La résolution de problèmes est conçue, dans le texte même des programmes, comme étant à la fois *“ la source et le critère des connaissances ”*.

Après avoir été réduit à un nombre-concret assimilable à un nombre entier par un changement d'unité, après avoir été opposé aux nombres-abstraits et aux opérateurs, le nombre décimal a acquis le statut de *“ nouveau nombre ”*. Parallèlement, nous avons aussi constaté, comme Jeanne Bolon, que l'enseignement relatif aux grandeurs usuelles a perdu de son importance et que les situations qui les mettent en relation se raréfient. Cette évolution de l'enseignement des nombres n'est pas sans conséquence sur l'enseignement des opérations, en particulier celui de la multiplication : les manuels ne proposent que très peu de problèmes issus de situations multiplicatives au profit d'exercices plus techniques ou formels.

Pour déterminer les enjeux mathématiques de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, nous avons abordé les situations multiplicatives, les propriétés algébriques et les méthodes de calcul du produit de deux décimaux.

La multiplication, jusqu'aux années soixante-dix, a été assimilée à une addition répétée ou à une "convention sociale". Des études¹²¹ ont montré le caractère réducteur d'une telle conception, notamment sur la question de la dimension. Les instructions officielles issues de la réforme dite de "la mathématique moderne" ont préconisé l'introduction de la multiplication par des activités de dénombrement qui font implicitement référence au produit cartésien de deux ensembles. Mais si la présentation a évolué, les problèmes proposés aux élèves sont restés les mêmes : ceux qui se prêtent à un traitement linéaire, ou ceux qui mobilisent seulement l'application de formules. Des propositions très riches et très variées, issues notamment de recherches en didactique des mathématiques¹²², permettraient d'envisager actuellement un enseignement de la multiplication qui prenne en compte à la fois les trois grands types de situations multiplicatives que distingue Gérard Vergnaud¹²³ : un seul espace de mesure, le produit de mesures et l'isomorphisme de mesure. Mais les programmes actuels pour l'école primaire focalisent davantage l'enseignement sur les nombres et sur leurs écritures que sur les opérations. Dans les manuels, si l'addition répétée n'est plus le modèle des situations de référence pour la multiplication, on n'y trouve souvent seulement que des exemples techniques où les transformations d'écritures sont accompagnées d'arguments théoriques et très peu de situations multiplicatives. Nous pourrions aller jusqu'à dire que l'opération a cédé la place aux "écritures multiplicatives".

Puis nous avons abordé les propriétés algébriques de la multiplication. Leur apprentissage est indispensable pour posséder la technique opératoire usuelle qui repose sur l'écriture des nombres mais aussi sur les propriétés de l'opération. Comment les établir en s'appuyant sur les différentes situations multiplicatives étudiées ? Nous avons constaté que c'est parfois impossible pour certaines propriétés du fait même que l'opération porte sur des mesures. Nous avons conclu cette étude en remarquant que, mise à part la situation de calcul d'aire de rectangle, les situations où la multiplication se conçoit comme une addition répétée sont, contre toute attente, les plus adaptées à montrer les propriétés algébriques de cette opération.

Enfin nous avons analysé les possibilités qu'offraient les différentes conceptions des décimaux, suivant leurs écritures, pour élaborer des méthodes de calcul d'un produit de deux nombres. Nous avons montré des différences importantes. La fraction décimale associée à une conception rationnelle est une écriture qui permet d'établir facilement la technique usuelle. Avec la décomposition en la somme d'un entier et de fractions décimales de numérateurs inférieurs à 10 ($n + \sum a_i/10^i$), la technique de calcul la plus adaptée est celle dite "per gelosia". Ces deux méthodes sont bien des techniques opératoires car elles

¹²¹ Nous pensons aux travaux de Janine Rogalski et de Gérard Vergnaud sur la multiplication.

¹²² Nous pensons ici encore aux travaux de Janine Rogalski et de Gérard Vergnaud mais aussi à ceux de Nadine & Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin sur les nombres décimaux et les aires de surfaces planes.

¹²³ VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : Peter Lang [pp 161 et suiv.].

permettent d'effectuer tous les calculs. Ce n'est pas le cas de deux autres méthodes, plus artisanales, qui permettent de traiter seulement quelques exemples : les conversions qu'on utilise avec des décimaux-mesures, et les bandes à double graduation qui reposent sur une conception où les nombres sont des abscisses de points de la droite numérique.

Il apparaît finalement qu'un enseignement de la multiplication des nombres décimaux qui comprendrait à la fois l'étude de situations multiplicatives variées et l'élaboration de la technique opératoire usuelle nécessite une bonne connaissance des nombres décimaux et de leurs écritures ainsi qu'un long travail contextualisé. Un tel enseignement doit-il s'effectuer seulement en sixième ? Un professeur pourrait, au vu des programmes, interpréter la répartition entre l'école primaire et le collège de la façon suivante :

- à l'école, multiplication de deux entiers et multiplication d'un décimal par un entier c'est-à-dire les deux cas où la multiplication s'interprète aisément comme une addition répétée ;

- au collège, multiplication de deux décimaux donc enseignement des situations multiplicatives qui ne relèvent pas de l'addition.

Une telle interprétation ne serait pas forcément défavorable à l'enseignement de la multiplication et des décimaux. Elle n'entrerait pas non plus en contradiction avec l'ambition de l'institution scolaire.

Après en avoir montré les enjeux, nous allons analyser les enseignements proposés de la multiplication des nombres décimaux dans les différentes publications auxquelles les professeurs peuvent avoir accès et qu'ils sont susceptibles d'utiliser pour préparer leurs cours : les manuels, les brochures et les ouvrages à l'intention des enseignants, ainsi que les travaux de recherche en didactique des mathématiques. L'objectif de ce prochain chapitre est d'étudier, compte tenu des résultats que nous venons d'obtenir, les conséquences envisageables de ces enseignements sur l'apprentissage des élèves.

CHAPITRE 3

LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME, QUELLE TRANSPOSITION DIDACTIQUE ?

Sommaire du chapitre 3

1. De la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs

Dans des manuels pour l'école primaire édités avant 1995

Dans des manuels de collège édités après 1995

Des différences entre les manuels de l'école primaire et ceux du collège

2. Des activités, une technique, des problèmes multiplicatifs

Dans un manuel d'arithmétique de 1947

Dans des manuels de collège édités en 1996

3. Construction des connaissances, institutionnalisation et réinvestissements

La multiplication dans deux ingénieries didactiques des décimaux

La multiplication des décimaux dans la thèse de Jeanne Bolon

Une expérience d'enseignement comprenant une phase contextualisée

La multiplication des décimaux dans les publications pour les enseignants

Conclusion : la multiplication, des transpositions divergentes

Le chapitre précédent a permis de montrer quels peuvent être les objectifs d'apprentissages mathématiques visés par un enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième. Ils concernent à la fois les situations multiplicatives et leur variété, les propriétés algébriques de l'opération et les techniques de calcul du produit de deux décimaux. Le réinvestissement des acquis nouveaux doit permettre de résoudre des problèmes numériques contextualisés ou non, donc d'identifier une éventuelle structure multiplicative et de déterminer un produit par un calcul.

Les professeurs consultent différents ouvrages pour préparer leurs cours. Dans ce chapitre, nous analysons, selon des critères liés à l'apprentissage, les différents matériaux publiés qui sont susceptibles de nourrir les projets élaborés par les professeurs pour leur enseignement de la multiplication des décimaux dans leurs classes ¹²⁴ :

Les sources documentaires les plus répandues sur lesquelles s'appuient les professeurs de mathématiques pour préparer leurs cours sont des manuels – celui de leurs élèves (à 90%) et d'autres (à 97%) – ainsi que les compléments de programmes et instructions (à 85%) ; (...) Les publications à l'adresse des élèves, voire à l'adresse des enseignants eux-mêmes, ne sont que faiblement utilisées (respectivement par 11 et 34% des professeurs), encore que, vis-à-vis de ces dernières, les professeurs munis d'une licence, d'un diplôme de troisième cycle ou d'un doctorat de mathématiques aient un penchant plus manifeste que leurs collègues ; il en va de même pour ceux qui ont plus de 15 ans d'ancienneté (.)

Le manuel retenu dans l'établissement pour les classes de sixième sert essentiellement, pour tout le monde ou presque, aux exercices d'entraînement. Dans une moindre mesure, l'introduction d'une notion nouvelle (aux trois quarts) et la recherche d'une information (dans six cas sur dix) sont des objectifs qui justifient l'usage du manuel chez les enseignants.

¹²⁴ Direction de l'Évaluation et de la Prospective (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Nous avons choisi d'écarter les publications antérieures aux années quatre-vingts compte tenu du changement des ambitions institutionnelles marqué par les programmes du 7 juillet 1978, changements dont nous avons montré l'importance au chapitre précédent. En outre, comme nous l'avons déjà signalé, jusqu'aux programmes du 22 février 1995 appliqués en CM2 depuis septembre 1997, la multiplication de deux décimaux figurait au programme de l'enseignement de l'école primaire mais pas en sixième. Depuis cette date, elle est enseignée au collège mais elle ne l'est plus dans le premier degré. Cette modification, récente par rapport à la date de notre recherche, nous a conduit à examiner aussi des manuels destinés aux élèves de CM2 publiés avant le changement de programme. Notons toutefois que ces manuels ne sont pas construits comme ceux qui sont destinés aux élèves de collège, les chapitres y sont beaucoup plus nombreux et beaucoup plus courts, les exercices d'entraînement y sont nettement moins nombreux. Aussi, pour les comparaisons, nous distinguerons les manuels suivant le cycle de l'enseignement concerné.

Nous analysons donc les enseignements proposés dans les publications que les professeurs peuvent consulter : recherches, articles ou brochures, ouvrages pédagogiques, manuels... Nous les comparons en fonction de deux critères imbriqués : celui des savoirs mathématiques travaillés par les élèves (selon les prévisions de ces enseignements) et celui des choix didactiques opérés pour élaborer les scénarios. Pour le premier critère, nous utilisons l'étude des enjeux mathématiques de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux du chapitre précédent, pour le second, nous nous référons aux outils d'analyse élaborés en didactique des mathématiques.

Dans les différents projets d'enseignement disponibles, nous dégageons le contenu mathématique abordé. Ainsi, nous allons repérer les situations multiplicatives desquelles sont issus les problèmes, les propriétés algébriques et leur utilisation dans des exercices de calcul mental ou raisonné, l'élaboration de la technique opératoire et son utilisation dans les calculs écrits puis, d'autre part, les exercices de calcul d'un produit (écrit, mental, approché), et les questions plus théoriques.

Pour analyser les enseignements proposés dans ces publications, nous utilisons des critères développés en didactique des mathématiques et qui, selon les hypothèses généralement admises dans ce champ de recherche, ont une incidence sur l'apprentissage, au moins en tant que processus. Il s'agit de repérer la dynamique savoir ancien/savoir nouveau (notamment dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux) ainsi que les dialectiques contextualisation/décontextualisation des savoirs en jeu (l'opération, ses propriétés et la technique opératoire). Il s'agit aussi de décrire la nature des tâches prévues pour les élèves notamment de distinguer celles qui ne demandent que des applications directes de techniques opératoires (mentales ou écrites) de celles où l'élève doit, soit reconnaître la structure multiplicative de la situation, soit mettre en fonctionnement des propriétés de la multiplication (calcul raisonné). Nous n'étudierons pas l'exposition des savoirs (comme nous le ferons pour analyser les séquences d'enseignement en classe) car les publications analysées sont très

hétérogènes de ce point de vue du fait de l'objectif des auteurs : dans certaines publications destinées aux enseignants, le savoir n'est pas exposé car le lecteur est supposé le maîtriser.

Autrement dit, il s'agit dans ce chapitre d'étudier la transposition didactique de l'objet de savoir multiplication des nombres décimaux dans les différentes institutions que sont les publications qui comportent des propositions d'enseignement pour des élèves de la fin du cycle primaire ou de la classe de sixième : recherches, ouvrages et brochures pédagogiques, manuels scolaires.

Une analyse préalable montre que des choix didactiques globaux partagent les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux en trois catégories :

- les décimaux sont des nombres pour lesquels une opération appelée multiplication est construite par une méthode de calcul du produit, cette méthode est montrée à l'élève, puis elle est utilisée pour calculer les produits obtenus lors de la résolution de problèmes issus de différents contextes. Nous intitulerons “ de la technique opératoire aux problèmes ” les projets inspirés de cette démarche ;

- la multiplication des décimaux est éventuellement rendue nécessaire par l'étude de situations multiplicatives puis, indépendamment de ces situations étudiées, une méthode de calcul du produit est laissée, au moins partiellement, à la charge de l'élève qui doit la découvrir, la formuler et éventuellement la justifier. Enfin, la multiplication est utilisée pour résoudre des problèmes. Nous intitulerons “ des activités, une technique, des problèmes ” les projets élaborés suivant ce choix ;

- la multiplication des décimaux est rendue nécessaire par l'étude de situations multiplicatives, l'étude de la situation permet de déterminer le produit de deux décimaux par une procédure de calcul construite en référence à la situation d'introduction, après décontextualisation et institutionnalisation, la multiplication est enfin réinvestie dans de nouvelles situations pour résoudre des problèmes. Nous intitulerons “ construction des savoirs, institutionnalisation et réinvestissements ” les projets qui suivent cette démarche.

Ces trois catégories organisent le présent chapitre. Après l'analyse des propositions d'enseignements publiées, nous reviendrons sur cette classification pour juger de sa pertinence.

1. De la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs

Parmi les publications parues depuis le changement de programme du 7 juillet 1978 pour l'enseignement élémentaire, qui marque l'abandon de la réforme des “ mathématiques modernes ”, nous n'avons trouvé des projets de cette catégorie que dans certains manuels pour l'école primaire ou pour le collège ; il n'y en a dans aucune brochure pédagogique ni dans aucun ouvrage destiné aux enseignants. En effet, ces ouvrages sont rédigés par des auteurs qui, comme le préconisent les

programmes actuels, envisagent et mettent en œuvre l'acquisition de connaissances nouvelles par la résolution de problèmes ¹²⁵.

(*) D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur des expériences dont disposent les élèves

(**) La résolution de problèmes occupe une place centrale dans les apprentissages mathématiques, à l'école primaire comme au collège, notamment en vue de l'appropriation de connaissances nouvelles par les élèves

Dans ce paragraphe, nous n'aborderons donc pas d'autres publications que des manuels scolaires pour l'enseignement primaire ou secondaire.

Rappelons que nous avons choisi de ne pas tenir compte, dans notre étude, de publications antérieures à 1980 c'est-à-dire antérieures à l'application des programmes de 1978. Certains enseignants qui débutaient ou qui exerçaient au cours de cette période ont pu être définitivement convaincus par les arguments alors développés. Il nous suffit de nous remémorer certains stages de formation continue que nous avons animés sur le thème de la liaison école-collège pour en trouver des exemples. Néanmoins ces enseignants ne sont pas représentés parmi ceux qui ont bien voulu contribuer à notre recherche. Citons, pour mémoire, les conseils pédagogiques qu'on pouvait lire en 1973, une brochure intitulée "*Etudes pédagogiques*" ¹²⁶ où la multiplication de deux décimaux est définie par la technique opératoire, où ses propriétés sont démontrées à partir de celles de la multiplication et de l'addition des entiers naturels et où n'apparaît aucune situation multiplicative :

La circulaire du 22 novembre 1971 indique deux voies parmi celles possibles pour l'étude des décimaux : ou bien supposer connues au départ les conventions d'écriture des décimaux ainsi que les règles opératoires de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{D} , ou bien de faire une véritable construction de \mathbb{D} après une étude des puissances de dix d'exposant entier

(. .) Soient deux décimaux α et β écrits respectivement avec n et p décimales et soient a et b les entiers obtenus après suppression des virgules s'il y en a (c'est-à-dire si n ou p sont non nuls). Le produit $\alpha \times \beta$ des 2 décimaux sera, par définition, le décimal obtenu à partir du produit $a \times b$ en séparant dans le dernier $(n + p)$ décimales

¹²⁵ (*) Instructions pédagogiques pour le cycle moyen, arrêté du 7 juillet 1978

(**) Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

¹²⁶ VIBES J (1973), *Information des maîtres, Décimaux et approche des réels* Reims : INRP - CRDP

Nous verrons qu'il ne reste, aujourd'hui, plus aucune trace de cette conception de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans les différents manuels, qu'ils soient antérieurs ou postérieurs au changement de programme de 1995.

Dans des manuels pour l'école primaire édités avant 1995

Les manuels pour le CM2, publiés avant le changement de programme de 1995¹²⁷ par trois éditeurs importants¹²⁸, proposent une activité préparatoire dont l'objectif est de souligner l'importance de la propriété suivante : en multipliant respectivement par deux nombres a et b les deux facteurs d'un produit, on multiplie ce produit par ab ; les deux nombres a et b étant 10, 100 ou 1000...

Cette propriété permet le calcul du produit de deux décimaux. Ainsi, par exemple, pour connaître le produit $p = 18,5 \times 0,75$, il suffira de calculer $q = 185 \times 75 = 13\,875$, de repérer que $q = p \times (10 \times 100) = p \times 1\,000$ puisque $185 = 18,5 \times 10$ et $75 = 0,75 \times 100$, ce qui permettra enfin de conclure que $p = q \div 1000 = 13,875$. Cette propriété justifie la méthode classique : on calcule sans tenir compte de la virgule puis on place la virgule après avoir totalisé le nombre de décimales des deux facteurs. Remarquons l'utilisation implicite de la commutativité et de l'associativité de la multiplication.

Le manuel de la collection "Objectif Calcul" édité par Hatier

Ce manuel propose un chapitre qui commence directement par l'étude de cette propriété. La méthode classique n'est pas complètement livrée aux élèves. La multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1 000 ainsi que la division d'un entier par 10, 100 ou 1 000 qui ont été vues l'année précédente, ne font pas l'objet de révisions dans ce manuel

Une reproduction de la page d'activités préparatoires de ce manuel figure à la page suivante

Ce chapitre contient, après l'activité de découverte et l'aide-mémoire, huit exercices. Aucun d'entre eux ne fait intervenir de problème multiplicatif, tous portent sur des nombres abstraits. Les deux premiers exercices sont des multiplications de décimaux par 10, 100 ou 1000 ; l'enseignant peut donc les utiliser pour les révisions mais aucun exercice ne propose de division par 10, 100 ou 1000. Le troisième exercice est une liste de multiplications d'un décimal par un entier et les quatre autres portent sur le placement de la virgule dans l'écriture du résultat d'un produit de deux décimaux. Ces exercices sont donc essentiellement des applications techniques.

¹²⁷ Programme de 1985, en vigueur en CM2 jusqu'à la rentrée 1997-98

¹²⁸ *Objectif Calcul* CM2 (1988), Paris : Hatier [pp 28-29].

Diagonale CM2 (1994), Paris : Nathan [pp 86-87]

Math et Calcul CM2 (1988), Paris : Hachette. [pp. 142-147]

Objectif Calcul CM2, Hatier 1988

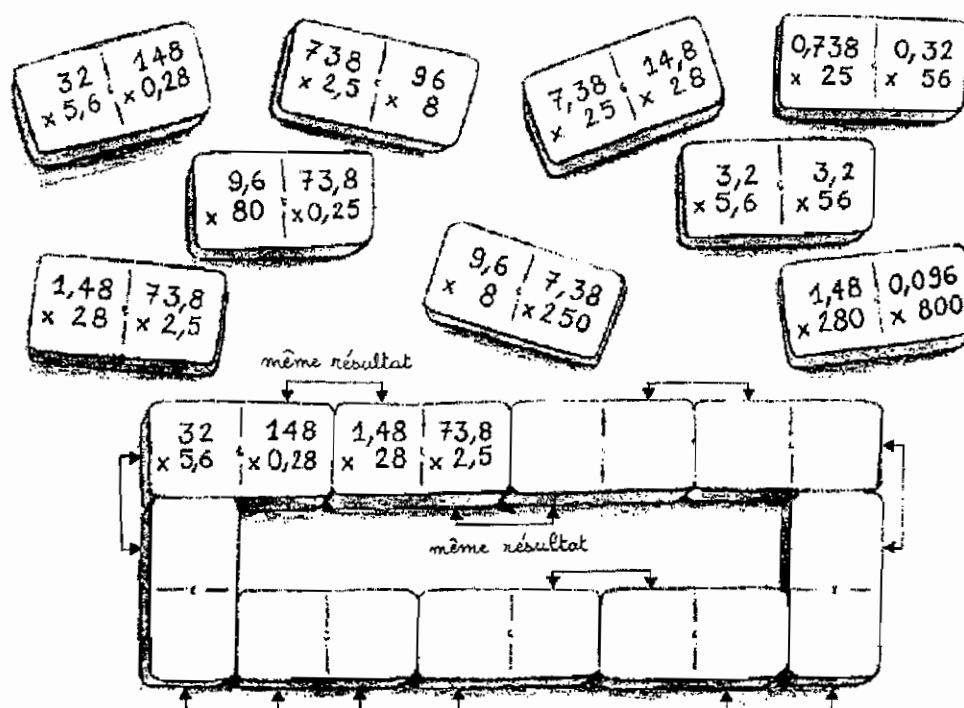
8 MULTIPLICATION des nombres décimaux

Réinvestir la technique de la multiplication dans N à la multiplication dans D

découverte.....

Voici des dominos en désordre. Remplace-les correctement en observant la façon dont on a commencé

Tu n'as pas besoin de compter les opérations, fais seulement bien attention aux produits proposés et au nombre de chiffres après la virgule que doivent comporter les résultats



aide-mémoire

Pour effectuer la multiplication

- d'un nombre entier par un nombre décimal ou
- d'un nombre décimal par un autre nombre décimal,

tu effectues d'abord l'opération comme si les deux nombres étaient entiers puis tu places la virgule. EXEMPLES :

$\begin{array}{r} 38 \\ \times 2,6 \\ \hline \end{array}$	$\xrightarrow{\text{m } 10}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \times 26 \\ \hline 228 \\ 76 \\ \hline 988 \end{array}$
	$\xleftarrow{\text{d } 10}$	

$\begin{array}{r} 147 \\ \times 5,2 \\ \hline \end{array}$	$\xrightarrow{\text{m } 10}$	$\begin{array}{r} 147 \\ \times 52 \\ \hline 294 \\ 735 \\ \hline 7644 \end{array}$
	$\xleftarrow{\text{d } 100}$	

Nous avons pourtant relevé une question susceptible de provoquer un questionnement puis l'utilisation du calcul approché pour répondre : on demande en effet de placer la virgule manquante dans l'égalité $61,8 \times 3,5 = 2163$. La réponse est 216,3 qui ne comporte qu'un chiffre après la virgule alors que le nombre total de décimales des deux facteurs est deux. Cette difficulté n'apparaît pas quand les élèves posent l'opération puisqu'ils trouvent dans un premier temps 21 630 et dans un second temps 216,30 qu'ils peuvent écrire 216,3. Le dernier exercice propose la même difficulté : l'élève doit compléter des égalités sans effectuer de calcul avec l'une des trois propositions :

a) $548 \times 10,5 = \dots$ propositions : 575,4 ; 10 754 ; 5 754.

b) $9\,538 \times 0,95 = \dots$ propositions : 9 061,1 ; 906,1 ; 90 611,1.

Un raisonnement utilisant les ordres de grandeur suffit pour conclure. La question a) propose un nombre avec un chiffre après la virgule 575,4 qui peut être une source d'erreur pour les élèves qui appliqueraient trop strictement la règle de position de la virgule. Ce résultat peut être rejeté facilement par un argument d'ordre de grandeur $500 \times 10 = 5000$.

L'argument de l'ordre de grandeur n'aurait pas été suffisant pour réfuter la réponse 5 754,4 si elle avait figuré parmi les propositions. Cette remarque pour montrer que le manuel ne propose pas de situation pour travailler sur l'origine même de l'erreur commise. Durant le déroulement de la correction de cet exercice, pour convaincre cet élève que sa réponse est fausse, l'enseignant ou un autre élève pourrait utiliser seulement un argument d'ordre de grandeur qui montre que le résultat ne convient pas plutôt que de développer un argument qui réfute la méthode erronée (le nombre de décimale du produit est la somme des nombres de décimales des facteurs). Avec l'énoncé du manuel, l'élève qui aurait proposé 575,4 saurait qu'il avait donné une réponse fausse mais resterait sans réponse sur les véritables raisons de son échec. L'élaboration d'une réponse plus complète, qui permette en particulier de déterminer le dernier chiffre d'un produit, reste donc à la charge de l'enseignant.

Cette séquence est suivie d'une série de douze exercices intitulée "multiplication des nombres décimaux : prolonger le sens de la multiplication." Sur les douze, quatre seulement nécessitent la multiplication de deux décimaux : trois problèmes de prix au kg et un calcul d'aire de rectangle avec rappel de la formule. Tous les autres portent sur la multiplication d'un décimal par un entier. En outre, le titre de la séquence est très inducteur quant au choix de l'opération, de nombreux élèves se trouvent enclins à multiplier les données pour répondre à la question plus par effet de contrat que par une réelle prise de sens de la multiplication. Après cette séquence, six double-pages d'une rubrique "Résolution de problèmes" sont proposées. En fait l'élève n'a jamais à résoudre complètement un problème : sur une double-page il doit repérer les informations, sur une autre il doit repérer la question, etc. Enfin, sur deux double-pages qui comportent vingt-huit énoncés, il doit déterminer l'opération qui donne la solution ; nous nous attendions à ce que les auteurs poursuivent enfin l'objectif de "prolonger le sens de la multiplication" mais aucun des énoncés ne porte sur la multiplication de deux décimaux.

Le manuel de la collection “ Diagonale ” édité par Nathan

Ce manuel ne propose pas d'activité qui porte directement sur la propriété déjà citée : “ en multipliant respectivement par deux nombres a et b les deux facteurs d'un produit ... ”

Une reproduction de la page d'activités préparatoires de ce manuel figure à la page suivante.

Il propose une première tâche portant sur les unités, dixièmes, centièmes, sur la multiplication de facteurs égaux à 10, 100 ou 1000, et enfin sur le produit et le quotient d'un nombre par 10, 100 ou 1000. Il propose ensuite une seconde tâche qui pose le problème du calcul du produit de deux décimaux. La méthode de calcul avec multiplication des facteurs décimaux pour obtenir des facteurs entiers est mise en œuvre parallèlement à la méthode classique, l'élève doit comparer les méthodes et conclure.

Huit exercices sont proposés dans cette séquence, cinq portent sur des calculs ou des décalages de virgule avec des nombres abstraits. Les trois autres sont issues de situations concrètes mais, dans deux d'entre eux, les produits à effectuer ont un facteur entier et peuvent être compris avec une multiplication héritée de l'addition répétée. Le seul exercice qui nécessite le calcul du produit de deux décimaux est la conversion de 4,15 milles en km sachant que 1 mille \approx 1,6 km mais la question est posée après celle de la conversion de 7 milles en km, les élèves peuvent donc procéder par analogie et l'addition répétée reste le seul modèle multiplicatif convoqué. Cette séquence n'est pas suivie d'une séquence de réinvestissement.

Comme dans “ Objectif Calcul ”, dans les séquences de résolution de problèmes, on ne trouve dans le manuel “ Diagonale ” pratiquement aucun problème multiplicatif où les deux facteurs sont directement décimaux. Seulement quelques problèmes de prix au kg sont proposés, pour les autres situations (proportionnalité, calcul d'aire...) les formules sont données ou induites par des questions qui portent sur des nombres entiers avant que les questions qui portent sur les nombres décimaux ne soient posées.

Diagonale CM2, Nathan 1994



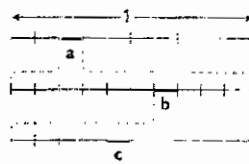
Opérations avec les nombres décimaux (2)

Enlever 2,5 aux nombres 3,7 10,8 3,68 7,05... Avec les nombres...

1 Activités

a Le segment rouge a pour longueur l'unité.

Observe le segment a vu à travers une loupe, puis le segment b vu à travers une loupe :



Écris la longueur des segments a, b et c en prenant le segment rouge pour unité

b En t'aidant du schéma précédent, recopie d'une même couleur les nombres égaux

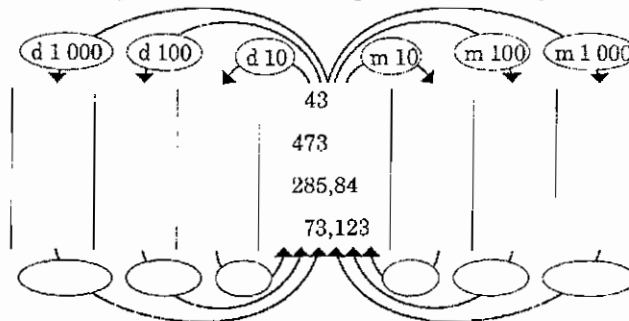
$$10 \times \frac{1}{10} \quad 10 \times \frac{1}{100} \quad 10 \times 0,001$$

$$1 \quad 10 \times 0,1 \quad 10 \times \frac{1}{1\,000}$$

$$10 \times 0,01 \quad \frac{1}{10} \quad 0,01$$

$$100 \quad 100 \times \frac{1}{100} \quad 1\,000 \times \frac{1}{1\,000}$$

c Avec ta calculette, complète les colonnes. Complète ensuite les opérateurs



2

Observe ce qu'ont écrit Thomas et Mathieu pour calculer $7,8 \times 16,14$

Thomas

$$\begin{array}{l} 7,8 \times 16,14 = \square \\ \text{m } 1\,000 \quad \text{m } 10 \quad \text{m } 100 \quad \text{d } 1\,000 \\ 78 \times 1\,614 = \square \end{array}$$

Mathieu

• Je calcule comme s'il n'y avait pas de virgule.

$$1\,614 \times 78 = 125\,892$$

• Je compte le nombre de chiffres après la virgule dans 7,8 et 16,14 → 3

• Dans le produit précédent, je place la virgule à 3 rangs à partir de la droite

$$\text{Donc } 7,8 \times 16,14 = 125,892.$$

- Termine les calculs de Thomas et vérifie que Mathieu trouve le même résultat
- Explique pourquoi les deux élèves procèdent finalement de la même façon.
- Calcule les produits.

$$19,3 \times 8,171 \quad 35 \times 6,07 \quad 20,7 \times 30,01$$

Vérifie les résultats avec ta calculette

Le manuel de la collection " Math et Calcul " édité par Hachette

Ce manuel, plus connu dans la profession par le nom de l'un des auteurs ¹²⁹, ne se distingue pas de ceux que nous venons d'étudier.

L'activité de découverte consiste en un travail de lecture d'une expérience. Le maître a demandé le calcul de $6,45 \times 2,3$ à la calculatrice, un élève obtient 14,835, le maître demande aussi 645×23 , l'élève trouve 14 835. Le maître montre alors au tableau la relation entre les deux calculs puis indique la disposition usuelle du calcul. Il n'y a pas de " cours " sur cette notion. La page de découverte se termine sur un calcul de valeur approchée d'un produit.

Les exercices qui suivent sont des applications de la technique opératoire pour 30% d'entre eux, ils posent des problèmes de prix pour 60% d'entre eux, un exercice propose le calcul de la consommation d'un individu qui boit 7 bouteilles d'eau de 1,5ℓ, les autres exercices sont du calcul mental.

Quel enseignement de la multiplication des décimaux ?

L'étude de ces trois manuels montre une ambition commune de montrer aux élèves les justifications de la technique opératoire de la multiplication des décimaux quand celle de la multiplication des entiers est supposée acquise. Le manuel " Objectif Calcul " propose, en outre, quelques exercices pour faire réfléchir les élèves sur le nombre de chiffres qui figurent après la virgule dans un produit de deux décimaux. Cette ambition était conforme aux instructions officielles en cours au moment de leur publication. ¹³⁰

L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela il devra (...)
maîtriser les techniques opératoires usuelles addition, soustraction,
multiplication des entiers ou des décimaux (...)

Pour répondre à cette ambition de *maîtrise* exprimée dans les programmes, les trois manuels proposent une méthode pour placer la virgule. Elle impose à l'élève une action issue d'une réflexion proche des justifications théoriques alors qu'avec la technique usuelle, les élèves n'ont qu'à compter les chiffres placés après la virgule dans les facteurs du produit. Cette ambition n'est pas nouvelle mais elle n'a pas toujours été partagée, comme le rappelle Denis Butlen ¹³¹ en citant respectivement un extrait du " Manuel du Certificat d'Aptitude Pédagogique " paru en 1904 aux éditions Brossard-Deferdon-Hachette (*) puis un article de J. Tannery intitulé " Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire " paru la même année (**):

(*) On dit souvent : peu ou point de théorie. Que restera-t-il donc ? La routine, le calcul machinal de chiens savants ou des automates. Nous dirons, nous : sans doute, il faut accoutumer les enfants à opérer vite ;

¹²⁹ Ce manuel est souvent appelé le " Eiller " par les enseignants.

¹³⁰ Extrait de la rubrique consacrée aux mathématiques dans les programmes de 1985

¹³¹ BUTLEN D. (1985), *Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*, Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7. [pp 43 à 47]

c'est un but matériel et pratique qu'il est désirable d'atteindre. Mais qu'on ne craigne pas non plus de les accoutumer à se rendre compte de leurs opérations. (...) des enfants du cours moyen ne peuvent-ils pas savoir utilement (...) pourquoi dans un produit, on doit reculer la virgule vers la gauche d'autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ?

(**) Le maître dira : " je vais vous apprendre un moyen d'aller plus vite ; " il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rendra pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplaît en aucune façon. (...) en arithmétique deux points importants : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire au fond bien comprendre les définitions ; puis savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude.

Aujourd'hui, la question est, comme nous le soulignons, tranchée depuis plus de vingt ans ¹³² :

L'étude de la multiplication débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a \times b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté) Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle.

Cet extrait des instructions officielles permet de constater, en revanche, un certain renoncement dans les deux manuels en ce qui concerne les situations de résolution de problèmes multiplicatifs avec des nombres décimaux. Les programmes demandaient que l'élève sache "*reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées précédemment*" c'est-à-dire, entre autres, les problèmes qui mènent à la multiplication de deux décimaux. Nous avons montré que ces trois manuels proposent peu de situations susceptibles de permettre cette acquisition. Les élèves peuvent résoudre les problèmes en ayant l'addition répétée comme seul modèle implicite de la multiplication. Enfin, remarquons que les propriétés algébriques de l'opération ne sont jamais abordées.

Dans des manuels de collège édités après 1995 ¹³³

Les manuels de collèges sont tous organisés, et pour tous les chapitres, de la même façon : des activités préparatoires partagées entre des révisions de prérequis et des situations de découvertes de nouveaux savoirs, un cours partagé entre ce qu'il faut savoir (définitions, règles...) et ce qu'il faut savoir-faire (méthodes, exercices types ...), des exercices d'applications classés dans différentes rubriques (entraînement, approfondissement, soutien...) Ils sembleraient donc tous proposer

¹³² Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978.

¹³³ La première édition postérieure au changement de programme date de septembre 1996, il en a eu une deuxième en septembre 2000 mais nous n'avons pas examiné ces manuels auxquels les professeurs que nous avons observés durant l'année scolaire 1996-1997 ne pouvaient se référer.

des enseignements classés dans la deuxième ou la troisième catégorie. Derrière cette uniformité de présentation, notamment par une analyse de tâches de la partie consacrée aux activités préparatoires, nous avons constaté des différences qui expliquent que nous trouvions des manuels de collège dans cette première catégorie : “de la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs”. Nous montrerons aussi une diversité quant aux justifications de la technique de la multiplication des décimaux et quant aux situations multiplicatives proposées.

Remarquons le manuel “*Triangle*” des éditions Hatier qui, et c’est le seul, propose, dans les activités préparatoires, une série d’exercices dont l’objectif est un repérage “d’obstacles” c’est-à-dire de conceptions ou de procédures à l’origine des erreurs les plus fréquentes, puis une autre série d’exercices “pour franchir les obstacles”. Des annotations marginales permettent la mise en correspondance des exercices qui servent à repérer un obstacle et de ceux qui servent à le franchir.

Nous allons étudier ici les manuels dont l’enseignement est conforme à la première démarche. Nous examinerons d’abord comment la multiplication est présentée puis comment elle est réinvestie.

Présentations de la multiplication de deux nombres décimaux

Parmi les manuels dont les auteurs ont fait le choix de donner une méthode sans laisser l’élève la découvrir ou la formuler, la façon de présenter la multiplication diffère.

Les auteurs du manuel de la collection “*Cinq sur cinq*” des éditions Hachette ont fait le même choix que ceux du manuel “*Diagonale CM2*” des éditions Nathan. Après des activités de révision sur les ordres de grandeur, sur les décalages de virgule dans le produit d’un décimal par un entier, mais sans aborder l’effet de la multiplication par 10 ou 100 de l’un des facteurs d’un produit, une tâche de comparaison de deux méthodes de calcul du produit de deux décimaux est proposée à l’élève : la méthode de décalage de la virgule qui est explicitée complètement et la méthode issue de la propriété “en multipliant respectivement par deux nombres a et b les deux facteurs d’un produit, on multiplie ce produit par ab ; les deux nombres a et b étant 10, 100 ou 1000. .”

Dans le cours les deux méthodes sont présentées parallèlement en utilisant les effets de la disposition dans la page ainsi que des couleurs pour les décimales.

On retrouve, dans les activités préparatoires, des exercices pour que l’élève critique la proposition erronée mais proche de la règle de décalage de la virgule : “le produit de deux décimaux comporte autant de chiffres après la virgule que les deux facteurs.” L’élève doit corriger les trois calculs suivants¹³⁴ et pour deux d’entre eux le produit (pourtant faux) a autant de décimales écrites que les deux facteurs ensemble :

¹³⁴ *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette. [p. 59].

$$\begin{array}{r} 3,8\ 5 \\ \times 2\ 0,6 \\ \hline 2\ 3\ 1\ 0 \\ 6\ 7\ 0\ 0 \\ \hline 9,0\ 1\ 0 \end{array}$$

$$1\ 3,4 \times 0,2 = 2\ 6,8$$

$$\begin{array}{r} 0,1\ 8 \\ \times 4\ 5\ 0 \\ \hline 9\ 0 \\ 7\ 2 \\ \hline 8,1\ 0 \end{array}$$

Les auteurs du manuel de la collection “*Mathématiques*” des éditions Delagrave sont les plus directs : après un rappel – intitulé “*Un bon produit*” – où la multiplication d’un décimal par un entier est définie par une addition répétée ($3,5 \times 4 = 3,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5$), et quatre courts exercices d’application introduisant des écritures littérales, on peut lire ¹³⁵

2. Avec des virgules

Tu sais calculer le produit d’un nombre entier par un nombre décimal

Calcule : $17 \times 0,4$; $7,38 \times 5$; $5,4 \times 236$; $0,05 \times 12$

Tu vas maintenant calculer des produits dont les facteurs ne sont pas des nombres entiers.

Observe : $6,27 \times 3,5 = 21,945$

$$\begin{array}{r} 6,2\ 7 \\ \times 3,5 \\ \hline 3\ 1\ 3\ 5 \\ 1\ 8\ 8\ 1 \\ \hline 2\ 1,9\ 4\ 5 \end{array}$$

Une annotation marginale du manuel (dans sa version spéciale destinée aux professeurs) précise que la multiplication de deux décimaux n’est plus au programme de l’école primaire. Dans le rappel, les auteurs présentent $3,5 \times 4$ comme une somme de quatre termes. Avec cette définition, l’expression $4 \times 3,5$ n’a pas de sens. Dans le deuxième point, ils affirment pourtant que l’élève sait déjà calculer le produit d’un entier par un décimal et ils proposent les deux types de produits. La commutativité reste totalement implicite. De même, dans la présentation de la multiplication de deux décimaux, les chiffres après la virgule – que nous avons indiqués en gras dans la citation – sont imprimés en rouge, la méthode n’est pas écrite. Elle ne figure pas non plus dans le cours si bien qu’elle n’apparaît nulle part dans ce manuel.

Les auteurs du manuel de la collection “*Triangle*” des éditions Hatier, ont fait un choix opposé : aucune méthode de calcul du produit de deux décimaux n’apparaît dans les activités préparatoires alors que la règle de décalage de la virgule figure dans le cours ; trois problèmes de prix à payer conduisant à une multiplication de deux décimaux sont proposés dans les activités préparatoires. Nous pouvons formuler deux hypothèses. Soit les auteurs prévoient que le professeur doit exposer une méthode de calcul avant de proposer les activités préparatoires, ce qui semble contradictoire avec les instructions officielles, soit les

¹³⁵ *Mathématiques 6e* (1996), Paris : Delagrave [p. 33].

auteurs préfèrent laisser les élèves calculer un tel produit avec la calculatrice ou par des méthodes personnelles comme ils le feraient à l'école primaire d'après les indications ministérielles ¹³⁶ :

Bien que le travail concernant le produit de deux décimaux ne figure pas au programme de l'école primaire, les élèves auront pu être confrontés à des problèmes du type :

– calcul de “l'aire du rectangle” ou du “périmètre du cercle” (compétences inscrites dans le programme du cycle des approfondissements), en ayant recours à la calculatrice ;

– recherche du “prix de 3,5 kg de fromage à 80,60 F le kg” où ils auront pu utiliser des procédures personnelles, par exemple liées à la proportionnalité (calcul du prix de 3 kg, puis du prix de 500 g considéré comme un demi-kg).

La seconde hypothèse nous semble plus probable compte tenu des activités des auteurs (formateurs en IUFM, auteurs d'un ouvrage de préparation au concours de professeur des écoles...) mais alors rien n'est prévu dans ce manuel pour passer des procédures personnelles à la technique usuelle qui figure dans le cours.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Les exercices proposés dans les manuels de collège sont bien plus nombreux que dans ceux de l'école primaire. Afin de mieux rendre compte des propositions faites aux professeurs par les auteurs, nous avons relevé, dans un premier temps, tous les exercices qui portent sur la multiplication et, dans un second temps, ceux qui font intervenir le produit de deux décimaux. Pour ceux qui portent sur la multiplication de deux décimaux, nous avons adopté un classement proche de celui qui est utilisé par les auteurs de manuels et qui permet de rendre compte à la fois des distinctions opérées grâce à l'analyse menée au chapitre précédent et des critères liés à l'apprentissage qui nous viennent des outils développés en didactique des mathématiques.

Ainsi avons-nous regroupé les exercices dont l'objectif est de déterminer un produit en distinguant ceux qui demandent une simple application de la technique opératoire, ceux qui demandent de réinvestir des propriétés algébriques de la multiplication (calcul mental ou raisonné) et ceux qui font utiliser les ordres de grandeur des facteurs (problèmes d'approximation qui demandent de mobiliser des connaissances sur l'écriture décimale). Nous avons regroupé ensuite les exercices qui soulèvent des questions plus théoriques, généralement relatives aux propriétés de la multiplication. Nous avons regroupé enfin les problèmes numériques issus de situations multiplicatives (ici problèmes de prix, problèmes de conversion, calcul d'aire de rectangles). Nous pouvons dresser le tableau suivant où les pourcentages sont calculés par rapport aux exercices faisant intervenir une multiplication de deux nombres décimaux :

¹³⁶ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

Tableau 4. Comparaison des exercices proposés par trois manuels de collège

	Cinq sur cinq	Mathématiques	Triangle
Exercices sur la multiplication	35	36	45
Mult. de deux décimaux	18	15	17
Détermination du produit	7 (39%)	8 (46%)	11 (64%)
Technique opératoire	2 (11%)	3 (20%)	5 (29%)
Calcul mental	3 (17%)	2 (13%)	1 (06%)
Ordre de grandeur	2 (11%)	2 (13%)	5 (29%)
Questions théoriques	6 (33%)	5 (33%)	4 (24%)
Situations multiplicatives	5 (28%)	3 (21%)	2 (12%)
Problèmes de prix	4 (22%)	1 (07%)	1 (06%)
Problèmes de conversion	1 (06%)	1 (07%)	1 (06%)
Calcul d'aire de rectangles	0 (00%)	1 (07%)	0 (00%)

On remarque quelques régularités et des tendances différemment affirmées suivant les collections. La multiplication de deux décimaux concerne environ un tiers des exercices portant sur la multiplication dans le manuel "*Triangle*" contre environ la moitié dans les deux autres. Les auteurs de ce manuel ont donné une plus grande importance que les autres aux situations multiplicatives issues de problèmes de dénombrement ; ces situations conduisent à la multiplication de nombres entiers pour calculer le cardinal d'un produit cartésien et qui permettent l'étude de situations multiplicatives difficiles à interpréter par une addition réitérée.

La différence du nombre d'exercices de technique opératoire s'explique plus difficilement : des auteurs ont pu choisir de ne pas en encombrer leur manuel car les professeurs de collège peuvent aisément improviser dans cette catégorie d'exercices en adaptant la difficulté des opérations aux acquisitions de leurs élèves. Remarquons en revanche l'importance accordée par les auteurs aux problèmes portant sur des questions théoriques. Cette importance semble témoigner de l'ambition des auteurs quant à l'acquisition raisonnée de la technique opératoire.

Comparativement à cette ambition, les problèmes issus de situations multiplicatives ne sont pratiquement pas traités. On peut supposer que des problèmes qui nécessitent des calculs d'aires ou des conversions sont abordés dans d'autres chapitres ultérieurs mais il faut alors en conclure que ces problèmes sont plutôt conçus par les auteurs comme des applications de la multiplication des décimaux ou comme des applications de formules que comme une phase de l'enseignement de la multiplication. Un tel choix n'empêche cependant pas un professeur de revenir sur la construction de la notion de cette opération à l'occasion de ces calculs. Mais il peut aussi s'interpréter comme une mise en œuvre du caractère outil de la multiplication à cette période de l'enseignement, plutôt que comme un retour sur l'apprentissage de son caractère objet. Cela constituerait un renoncement par rapport à l'ambition des instructions officielles¹³⁷ :

En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux décimaux, aussi bien pour ce qui concerne la technique

¹³⁷ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

de calcul que pour ce qui concerne le sens (reconnaissance des situations où intervient le produit de deux décimaux). Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition répétée est possible pour accéder à la multiplication.

Il est également possible que les auteurs de ces manuels supposent qu'une bonne acquisition technique de la multiplication suffit à ce que les élèves sachent repérer les situations qui relèvent de la multiplication.

Des différences entre les manuels pour l'école primaire et ceux pour le collège

Dans les manuels dont les auteurs ont choisi d'exposer technique opératoire usuelle puis de proposer des exercices d'application, nous pouvons constater des points communs et des différences entre les ouvrages destinés à l'enseignement élémentaire et ceux destinés au collège.

Les ouvrages du primaire approfondissent plus que ceux du collège les justifications théoriques de la technique opératoire dans les activités préparatoires mais beaucoup moins dans les exercices d'applications. Les exercices de simple technique opératoire sont moins nombreux dans les manuels de collège que dans ceux du primaire (on peut penser qu'ils sont laissés à la charge des professeurs de mathématiques). Les calculs d'approximations et les questionnements théoriques sont plus nombreux dans les manuels de collège que dans ceux du primaire.

Dans les deux types d'ouvrages, les problèmes issus de situations multiplicatives sont délaissés. Ainsi, l'enseignement de la multiplication est décontextualisé, et les auteurs proposent très peu de problèmes qui s'appuient sur des situations multiplicatives. Les programmes préconisent pourtant à la fois l'acquisition de la technique et l'acquisition du sens, ils soulignent la nécessité d'enseigner la multiplication dans des situations qui donnent du sens à cette opération.

Qu'en est-il dans les autres propositions d'enseignement ? Nous allons maintenant étudier les publications de la deuxième catégorie c'est-à-dire dont les enseignements proposent des tâches où la méthode pour multiplier deux décimaux est construite par les élèves (au moins en partie) avant d'être institutionnalisée par l'enseignant puis appliquée dans des problèmes.

2. Des activités, une technique, des problèmes multiplicatifs

Les publications des auteurs qui ont choisi cet enchaînement dans leur projet d'enseignement de la multiplication des décimaux sont rares. Dans les ouvrages ou les brochures destinés aux enseignants ou aux candidats au concours de recrutement des professeurs des écoles, on trouve des propositions de cette catégorie ou de la troisième pour la multiplication de deux entiers. Ces enseignements sont riches de problèmes de dénombrement qui donnent à la multiplication un autre sens que celui de l'addition répétée du fait de la

bidimensionnalité. Différentes techniques de multiplication de deux entiers sont approfondies et comparées (méthode des rectangles appelée aussi multiplication de type égyptien, méthode des réseaux appelée aussi méthode chinoise ou méthode des baguettes, méthode de l'abaque, méthode per gelosia...), situations multiplicatives et techniques opératoires n'étant pas forcément reliées. Différents problèmes multiplicatifs sont proposés. Dans ces ouvrages, la multiplication de deux décimaux n'est jamais traitée, même dans ceux qui ont été publiés avant que cette opération ne disparaisse du programme de l'école primaire. Un titre du type "*Addition, soustraction et multiplication dans l'ensemble des décimaux*" figure parfois dans le sommaire mais, dans ce cas, la multiplication est délaissée au profit de l'addition ou de la soustraction.

Nous avons trouvé des propositions d'enseignement de cette catégorie dans des manuels mais seulement dans ceux pour le collège. Pouvons-nous expliquer leur absence des livres pour l'école par une évolution de ces manuels ? Afin de répondre à cette question, nous avons fait une exception à notre choix de ne pas considérer les ouvrages antérieurs aux années quatre-vingts. Nous allons montrer, par un exemple, comment la multiplication des décimaux était introduite par des activités à l'école primaire avant la réforme des "mathématiques modernes". Puis nous nous pencherons sur les manuels de collège.

Dans un manuel d'arithmétique de 1947

Nous avons choisi un manuel qui nous semble offrir des garanties quant à la l'adéquation des enseignements proposés aux programmes officiels : les auteurs sont trois inspecteurs, un Inspecteur général de l'Instruction publique et deux Inspecteurs de l'Enseignement primaire. Il s'agit du cours d'arithmétique pour le cours supérieur et la classe de fin d'étude édité en 1947 par les éditions Armand Colin¹³⁸. Dans ce manuel, la technique de la multiplication des décimaux est construite à partir d'exercices préparatoires avant d'être formulée puis utilisée dans des problèmes, et les situations de cette construction sont cohérentes avec les utilisations ultérieures

Présentation de la multiplication.

Les auteurs proposent une activité préparatoire puis un énoncé de la règle¹³⁹.

Exercice d'observation : produit de deux nombres décimaux.

1° Vous voulez trouver le prix de 12 kg. de beurre à 43^f,40 le kilogramme. Que vaut le kilogramme en centimes ? Que valent les 12 kg. en centimes ? Que valent-ils en francs ?

2° Vous voulez calculer le poids de 4^l,5 d'huile pesant 0^{kg},92 le litre. Quel est le poids du litre en grammes ? le poids du décilitre ? le poids de 45 dl. ? Donnez ces poids en kilogrammes.

¹³⁸ PUGIBET CH. (1947), *Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire*, Paris : Armand Colin. [pp. 94-108]

¹³⁹ *Ibid* [p. 94].

Pour multiplier deux nombres décimaux, on fait l'opération sans tenir compte des virgules, puis on sépare à la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'en comportent à la fois le multiplicande et le multiplicateur.

Ces exercices d'observation venaient-ils illustrer une explication du maître ou devaient-ils préparer les élèves à aborder la question de la technique opératoire ? Dans la seconde hypothèse, pourquoi la formulation de la règle n'est-elle pas demandée ? Le format très réduit des manuels de l'époque explique peut-être qu'on ne demande pas, par écrit, à l'élève de formuler une règle ; les enseignants ont la possibilité de poser la question oralement et d'organiser une discussion dans la classe. Cette possibilité ne doit pas être écartée, citons l'introduction des programmes du 17 octobre 1945 de l'enseignement du premier degré :

Partout, l'opération manuelle doit précéder l'opération arithmétique ; l'expression du langage courant doit précéder l'expression du langage mathématique.

(...) Il importe également de comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule, soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1000.

On constate que la construction de la technique opératoire repose sur une conception du nombre décimal héritée du nombre entier-mesure avec changement d'unité, en conformité avec les programmes. Cette conception permet de poser autrement la multiplication de deux nombres décimaux qui sont des mesures : on change l'unité de mesure pour obtenir des entiers puis on convertit la valeur de la mesure obtenue dans l'unité issue des unités initiales. Comme les changements d'unité correspondent à des déplacements de la virgule, la méthode est aisément généralisée par la règle énoncée. Nous avons montré néanmoins que cette méthode n'est pas générale¹⁴⁰, la technique opératoire usuelle n'est donc pas construite à proprement parler. Précisons enfin que dans ce manuel, conformément aux instructions, la multiplication de deux nombres entiers est définie par l'addition répétée.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Les réinvestissements de ce chapitre sont principalement des exercices d'application s'appuyant sur des situations multiplicatives, les nombres sont des mesures. Puis suivent trois chapitres portant sur les calculs d'aires (conversion de mesures, aire du rectangle et du carré, applications aux problèmes pratiques : peinture, carrelage, papiers peints, boiseries, doublures) totalisant une centaine d'exercices portant sur les prix, les masses, les longueurs, les aires et les volumes, les poids volumiques...

¹⁴⁰ Dans le paragraphe consacré aux méthodes de calcul du produit de deux décimaux, nous avons étudié le cas des nombres "décimaux-système métrique". Nous avons montré que le prix de 12 kg de beurre à 43,40 F/kg peut se calculer en calculant le prix en F/kg mais que cette méthode ne peut pas s'appliquer pour calculer le prix de 12,450 kg de beurre.

On trouve également des exercices analogues à ceux qui figurent aujourd'hui dans les manuels pour le collège sur les ordres de grandeurs ou qui posent des questions plus théoriques ¹⁴¹ :

Ayant à effectuer le produit $275 \times 4,25$, un élève a trouvé 1 568,75. Pouvez-vous lui prouver qu'il s'est trompé ? Donnez le résultat exact

Ayant à calculer le prix de 4 tonnes et demie de charbon à 530 f. la tonne, ne vous est-il pas possible de remplacer la multiplication $530 \text{ f.} \times 4,5$ par une multiplication portant sur des nombres entiers ? Justifiez votre réponse.

Dans quel cas le produit est-il plus petit que le multiplicande ? Dans quel cas est-il plus petit que le multiplicateur ? Donnez des exemples présentés sous la forme de petits problèmes

Ayant à calculer la surface d'un champ, un élève donne la réponse suivante : 2 365^{m²},477 586. Lisez ce nombre. Que pensez-vous de cette précision ? Quelle réponse auriez-vous donnée ? Pourquoi ?

Que devient la surface d'un rectangle : 1° Lorsqu'on double la longueur sans toucher à la largeur ? 2° Lorsqu'on triple la largeur sans toucher à la longueur ? 3° Lorsqu'on double les deux dimensions ? lorsqu'on les triple ? 4° Lorsque la longueur est doublée et la largeur triplée ? Donnez dans chacun des cas un exemple numérique.

Le côté d'un carré mesure 8m. Quel est le périmètre de ce carré ? Quelle est sa surface ? Cherchez des rectangles ayant le même périmètre. Calculez leurs surfaces. Cherchez des rectangles ayant la même surface. Calculez leurs périmètres. Quelles remarques faites-vous dans chaque cas ?

Quelle évolution jusqu'à nos jours ?

Des projets d'enseignement analogues à celui que nous venons de décrire n'apparaissent dans aucun manuel actuel. Pour mieux comprendre pourquoi, nous nous proposons de montrer, plus précisément que nous l'avons fait dans l'analyse *a priori* menée au chapitre précédent, les évolutions de programme et leurs conséquences sur l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

La méthode de calcul du produit de deux décimaux justifiée par les changements d'unité ne figure plus dans les manuels actuels. Les nombres décimaux ne sont plus systématiquement attachés à des unités de mesure. Ils l'étaient encore durant la période de l'enseignement primaire soumis aux programmes du 2 janvier 1970 où les changements d'unités justifiaient aussi la technique de multiplication de deux décimaux :

Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen ; à ce niveau les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupement d'objets d'un ensemble

(...) Une ville comporte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850

¹⁴¹ *Ibid* [pp. 94-108]

(..) Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. Elle se présente comme une addition de nombres décimaux égaux Exemple :

$$0,2 \times 3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6$$

(..) Multiplication de deux nombres décimaux Un changement d'unité la ramène à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

Rappelons que différents travaux sur les conceptions des nombres décimaux et sur les opérations à l'école primaire ont été publiés qui s'opposent à ce choix. Leurs auteurs justifient leur position en attribuant à ce choix l'origine de mauvaises acquisitions des élèves. Citons par exemple Guy Brousseau¹⁴² :

Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u) : d'une part un entier n d'autre part une division par 10^p , c'est-à-dire un changement d'unité, et une unité u : 3,25 mètres, c'est 325 cm exprimé en mètres. (...) Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 - a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions.

(..) Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule.

De tête, le calcul suivra une autre pente. On calculera le produit de la partie entière et celui de la "partie décimale" et on recollera les morceaux : $(0,4)^2 = 0,16$ mais $(0,3)^2 = 0,9$ et quelquefois $(3,4)^2 = 9,16$

C'est encore l'effet de la mesure : ce qui compte le plus c'est la partie entière, la partie décimale fait ce qu'elle peut.

Depuis les programmes du 7 juillet 1978, la rupture est affirmée entre les nombres-mesures et les nombres décimaux qui doivent être introduits comme de nouveaux nombres ; et depuis, les modifications des instructions officielles n'ont pas touché à ce point de vue.

¹⁴² BROUSSEAU G. (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, in *Théorie des situations didactiques* (115-160), Grenoble : La pensée sauvage [pp. 131-132]

Version révisée de deux articles :

BROUSSEAU G (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165-198), Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques In : Bednarz and C. Garnier (eds.) : *Construction des savoirs – Obstacles et conflits* (41-63) Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE)

Ces programmes de 1978 indiquent aussi une évolution du sens de la multiplication quand on passe de la multiplication par un entier à celle de deux décimaux. Rappelons ce passage déjà cité :

Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière

L'étude de la multiplication débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a \times b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle

En conclusion de cette observation de l'évolution des instructions officielles, nous pouvons distinguer, dans le temps, deux options divergentes pour l'enseignement des nombres décimaux qui ne sont pas sans conséquences sur celui de leur multiplication. Jusqu'en 1970, le nombre décimal est un nombre-mesure, la multiplication de deux décimaux (pour le sens et pour la technique opératoire) est traitée en continuité avec celle des nombres entiers, par le moyen des changements d'unité, et la multiplication est appliquée à des situations qui font intervenir uniquement des nombres-mesures. La continuité n'est qu'apparente en ce qui concerne la technique opératoire puisque, comme nous l'avons montré, la méthode de changement d'unité n'est pas générale. Depuis 1978, le nombre décimal n'est plus seulement un nombre-mesure, ce changement a des conséquences sur la transition de la multiplication des entiers à celle des décimaux. D'une part, l'enseignement de la multiplication des entiers s'effectue seulement en référence aux situations d'isomorphisme de grandeurs qui sont les seules à s'interpréter comme une addition réitérée dans le cas où le multiplicateur est entier. Le sens de la multiplication reste donc partiel. D'autre part, le passage des entiers aux décimaux pour la technique opératoire repose sur l'utilisation de propriétés de la multiplication. Dans les manuels pour l'école primaire édités avant 1995, ces propriétés restaient implicites et par conséquent la technique n'était pas justifiée

Examinons maintenant les propositions des auteurs des manuels de collège qui ont choisi de rédiger des activités où l'élève construit lui-même la multiplication de deux décimaux

Dans des manuels de collège édités en 1996

Trois manuels pour la classe de sixième proposent des tâches où les élèves ont à leur charge l'élaboration de la multiplication des décimaux. Nous étudierons comment leurs auteurs présentent la multiplication ainsi que les réinvestissements proposés dans les pages d'exercices d'applications.

Présentations de la multiplication

Pour deux d'entre eux, cette élaboration repose sur l'utilisation de propriétés de la multiplication, pour le dernier, les élèves sont conduits à multiplier des décimaux avec la calculatrice et à formuler leurs constatations.

Les auteurs du manuel de la collection " *Le nouveau Transmath* " édité par Nathan ont rédigé un premier chapitre de révision des acquis de l'école primaire où les effets de la multiplication par 10, 100, 0,1 et 0,01 sont constatés par l'élève, rappelés par le manuel puis libellés comme des règles de décalage de la virgule. Le chapitre suivant est consacré aux quatre opérations. Une activité composée de deux exercices " à trous " présente la multiplication ¹⁴³ :

Tu sais effectuer à la main le produit de deux entiers,

par exemple : 45×15 comme ci contre.

On se propose maintenant de calculer $4,5 \times 1,5$.

Pour cela, on peut remarquer que :

$$45 = 4,5 \times 10 \text{ et } 15 = 1,5 \times 10$$

$$45 \times 15 = 4,5 \times 10 \times 1,5 \times 10$$

$$45 \times 15 = 4,5 \times 1,5 \times 10 \times 10$$

$$\text{Ainsi : } 675 = \dots \times 100$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 450 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 450 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ \hline \end{array}$$

Et la conclusion s'impose d'elle même... Un autre exercice analogue propose une illustration qui met en parallèle deux multiplications posées : $1,23 \times 6,5$ et 123×65 . Les nombres 1,23 et 123 comme les nombres 6,5 et 65 sont respectivement reliés par les opérateurs $\boxed{\times 100} \rightarrow$ et $\boxed{\times 10} \rightarrow$. Un texte " à trous " commente l'illustration. La présentation de la multiplication du manuel de sixième est donc très proche de celle du manuel de CM2 de ce même éditeur, elle n'est pas issue d'une situation multiplicative.

La règle énoncée dans la page de cours est celle du décalage de la virgule

Dans un chapitre intitulé " *Nombres décimaux* ", les auteurs du manuel de la collection *Décimale* édité par Belin consacrent une partie de leur livre à la multiplication. Après une activité de révision sur les multiplications et divisions par 10, 100 ou 1000, les auteurs proposent une activité sur la multiplication des décimaux organisée en trois étapes :

– constatation sur des exemples numériques de l'effet sur le produit de la multiplication des facteurs par 10 et 100, puis un exercice de formulation à trou ¹⁴⁴

Si on multiplie le premier facteur d'un produit par 100, et le second par 10, le produit est multiplié par...

– une illustration de deux multiplications posées : $3,58 \times 7,2$ et 358×72 avec indication d'opérateurs pour les facteurs à compléter pour les produits ;

– une question sur le nombre de chiffres après la virgule des différents nombres : facteurs et produit.

¹⁴³ *Le nouveau Transmath 6e*, (1996), Paris : Nathan [p. 24].

¹⁴⁴ *Décimale 6e*, (1996), Paris : Belin [p. 85].

La présentation est donc la même que la précédente. La règle énoncée dans la page de cours est celle du déplacement de la virgule, elle est disposée en parallèle avec une illustration analogue à celle de l'activité avec les opérateurs.

Les auteurs du manuel de sixième de la collection *Math* édité par Bordas, ont choisi de présenter la multiplication des décimaux à partir d'une situation de conversion monétaire. L'activité est formulée comme un exercice très directif ¹⁴⁵ :

Pascal fait un voyage scolaire en Allemagne pour améliorer sa pratique de la langue allemande

Son professeur lui a dit : " Tu dois multiplier les prix en marks par 3,5 pour connaître les prix en francs ".

Une montre coûte 37,8 DM et un appareil photos jetable coûte 12,7 DM.

1° Quel est le prix en francs de la montre ? de l'appareil photos jetable ? (Utilise ta calculatrice.)

2° Compare les produits suivants :

a) $12,7 \times 3,5$ et 127×35 . $37,8 \times 3,5$ et 378×35 .

b) $1,34 \times 2,3$ et 134×23 . $2,41 \times 3,27$ et 241×327 .

Quelle règle peux-tu deviner pour multiplier deux nombres décimaux ?

Dans ce problème de conversion monétaire, la question de l'opération qu'il convient d'effectuer n'est pas laissée à l'élève, elle est imposée par l'énoncé (le professeur d'allemand) si bien que la situation n'aide pas à construire le sens de cette opération dans ce contexte. La technique de la multiplication est devinée mais elle n'est pas justifiée, elle reste "dans la calculatrice". Les auteurs ont choisi de limiter la réflexion de l'élève à une conjecture issue d'une simple constatation. Dans la page de cours, la seule règle énoncée est celle du déplacement de la virgule.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Voici un tableau analogue à celui que nous avons présenté pour les autres manuels de sixième. Nous avons repéré les exercices qui conduisent à une multiplication et, parmi eux, nous avons examiné ceux qui conduisent à la multiplication de deux décimaux. Les exercices qui répondent à deux critères (par exemple, calcul d'aire et conversion) sont comptés deux fois. Les pourcentages sont calculés par rapport aux exercices faisant intervenir une multiplication de deux nombres décimaux :

¹⁴⁵ *Math 6e*, (1996), Paris : Bordas [p 41]

Tableau 5. Comparaison des exercices proposés par trois manuels de collège

	Transmath	Décimale	Math
Exercices sur la multiplication	43	77	22
Mult. de deux décimaux	31	54	11
Détermination du produit	22 (71%)	12 (22%)	09 (82%)
Technique opératoire	06 (19%)	05 (09%)	06 (55%)
Calcul mental	14 (45%)	07 (13%)	03 (27%)
Ordre de grandeur	02 (07%)	00 (00%)	00 (00%)
Questions théoriques	03 (10%)	08 (15%)	02 (18%)
Situations multiplicatives	06 (19%)	34 (63%)	00 (00%)
Problèmes de prix	05 (17%)	09 (17%)	00 (00%)
Problèmes de conversion	01 (03%)	07 (13%)	00 (00%)
Calcul d'aire de rectangles	00 (00%)	14 (26%)	00 (00%)
Autres (échelle, L/100km,...)	00 (00%)	04 (07%)	00 (00%)

On remarque une hétérogénéité des résultats très importante. Deux manuels sont assez proches (*Transmath* et *Math*), le troisième est sensiblement différent (*Décimale*)

On constate une variation importante de la quantité d'exercices proposés. De *Math* à *Décimale*, le nombre d'exercices portant sur la multiplication est multiplié par 3,5 et le nombre d'exercices portant sur celle de décimaux est multiplié par 5. Les exercices sur la multiplication de décimaux représentent 70% des exercices de multiplication pour *Transmath* et *Décimale* mais seulement 50% pour *Math*.

On remarque aussi une variation importante de la répartition des exercices proposés à l'élève. Les auteurs des manuels *Transmath* et *Math* concentrent les efforts de l'élève sur la détermination d'un produit (71% et 82% des exercices sur la multiplication de décimaux). Au contraire, ceux de *Décimale* proposent un travail à la fois important et très varié sur les situations multiplicatives (les problèmes représentent 63% des exercices sur la multiplication de décimaux).

Les résultats montrent encore une relative stabilité du pourcentage de questions plus théoriques sur la multiplication des décimaux. Le pourcentage moyen sur les trois manuels est de 14%, il est très inférieur à celui qui a été constaté dans les manuels où l'activité préparatoire se limite à une lecture de la règle et, éventuellement, de sa justification (28%). Peut-être cette différence s'explique-t-elle par une volonté des auteurs de compenser le manque d'activités théoriques dans les activités préparatoires.

Quel enseignement de la multiplication dans ces manuels de sixième ?

Contrairement à la demande institutionnelle, la construction de la multiplication des décimaux n'est, dans aucun de ces manuels de sixième, issue de situations multiplicatives. Néanmoins, la technique opératoire n'est pas toujours réduite à son mécanisme ; certains auteurs la relie à l'effet, sur le produit, de la multiplication de ses facteurs par 10, 100 ou 1000. Pour un autre, elle est le fruit d'une simple constatation des résultats affichés par la calculatrice. Les manuels contiennent aussi quelques exercices qui posent des questions plus théoriques sur l'opération.

Dans tous les manuels, la partie consacrée à ce qu'il faut savoir expose la règle de déplacement de la virgule. Une mise en parallèle avec l'effet, sur le produit, d'opérateurs appliqués aux facteurs est parfois proposée.

Un manuel se distingue nettement par le choix d'exercices d'applications. Alors que *Transmath* et *Math* accordent beaucoup d'importance à la technique opératoire et/ou aux questions théoriques en négligeant les études de situations multiplicatives, *Décimale* propose un choix nombreux et varié d'exercices de ce type en laissant l'entraînement à la technique opératoire à la charge du professeur.

3. Construction des connaissances, institutionnalisation et réinvestissements

Étudions les publications des propositions d'enseignement où la construction de la multiplication des décimaux est liée à la situation multiplicative qui pose le problème de cette multiplication. Leurs auteurs présentent des tâches où la "fabrication" effective du produit des décimaux, issue de différents contextes, est laissée à la charge de l'élève. Citons par exemple, les tâches sur l'agrandissement de figures, sur le calcul d'aire de rectangles, et sur le calcul de prix par l'utilisation de double graduation. Parmi ces publications, on ne trouve aucun manuel scolaire mais seulement des travaux de didacticiens des mathématiques, des ouvrages et des brochures pédagogiques destinés aux enseignants.

En première introduction de la multiplication des décimaux, différents auteurs proposent des situations qui portent sur trois grandeurs telles que les valeurs de la troisième s'obtiennent, sous certaines contraintes concernant les unités, en multipliant les valeurs des deux premières. Ces situations ont déjà été étudiées par les élèves avec des valeurs entières, on leur propose un travail analogue avec des valeurs décimales ou fractionnaires. La multiplication de valeurs entières de deux grandeurs se prolonge aux valeurs décimales de ces grandeurs, la légitimité de ce prolongement reste implicite. Ces activités ont aussi pour objectif d'enrichir le sens de la multiplication car elles ne reposent pas sur l'addition répétée.

Les auteurs centrent leurs exposés sur ces activités d'apprentissage sans développer les réinvestissements des savoirs dans des situations variées, différentes ou non de celles qui sont à l'origine des connaissances. Cependant, ils soulignent leur importance dans l'enrichissement des notions en cours d'acquisition.

Nous commençons par les travaux des didacticiens qui proposent, en fait, une présentation complète de l'enseignement des décimaux mais nous limitons notre étude à la multiplication. Nous présentons ensuite des travaux de chercheurs italiens qui expérimentent un enseignement des mathématiques comprenant une phase contextualisée. Puis nous étudions les publications destinées aux enseignants, elles traitent de points plus particuliers qui reprennent parfois partiellement les travaux didactiques ou qui traitent des difficultés spécifiques d'enseignement.

Dans deux ingénieries didactiques de construction des décimaux

Guy Brousseau et Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin ont élaboré deux ingénieries didactiques de construction des décimaux à l'école et au collège. Parmi les travaux des chercheurs en didactique des mathématiques, les ingénieries sont les publications les plus accessibles aux professeurs. Si, comme l'expose Michèle Artigue¹⁴⁶, ce type de travaux consiste en une méthodologie de recherche en didactique des mathématiques, il comporte une partie destinée à la mise en œuvre de réalisations didactiques en classe que les enseignants peuvent tenter de s'approprier. Nous ne reviendrons pas ici sur les problèmes que peuvent poser ces tentatives et qui ont été étudiés notamment par Michèle Artigue¹⁴⁷.

La multiplication des décimaux chez G. Brousseau

Guy Brousseau¹⁴⁸ propose une ingénierie dans laquelle les décimaux sont des rationnels particuliers. La multiplication de décimaux est introduite dans deux situations d'agrandissement aujourd'hui classiques dans l'enseignement ou au moins dans la formation des enseignants : activités d'agrandissement de puzzles (*) puis activités avec un pantographe (**).

(*) La situation-problème

La première situation d'étude des applications linéaires proposée aux élèves est la suivante.

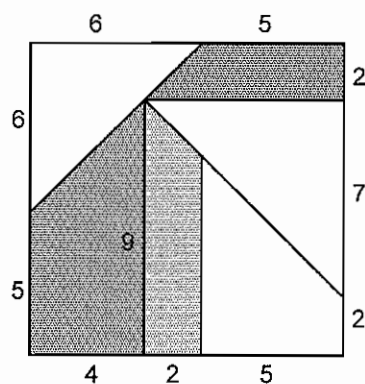


figure 7

Consigne :

¹⁴⁶ ARTIGUE M (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/3 (281-308), Grenoble : La pensée sauvage

¹⁴⁷ ARTIGUE M (1984), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse, Université de Paris 7.

ARTIGUE M (1986), Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/1 (5-62), Grenoble : La pensée sauvage

¹⁴⁸ BROUSSEAU G (1998), Problèmes de didactique des décimaux, in *Théorie des situations didactiques* (201-289), Grenoble : La pensée sauvage [pp 237-241].

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage

“ Voici des puzzles (Exemple Tan-gram, figure 7) vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu’avec le modèle. ”

(**) Dans la séance d’introduction, les élèves apprennent du maître, banalement, comment se servir de l’appareil : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier, la pointe suit le modèle, le crayon dessine l’image. Ils s’essayent à agrandir et à rapetisser des dessins personnels puis mettent en commun leurs observations et leurs hypothèses :

- on peut “ agrandir ” ou “ rapetisser ” en échangeant la pointe et le crayon ;
- l’image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe ; (..)

Le maître annonce aux élèves que dans un moment il choisira une longueur entre 1 et 15 cm : chaque élève ou groupe de deux devra prévoir la longueur correspondante transformée par son pantographe. Cette prévision fera l’objet d’un pari, puis d’une épreuve : on vérifiera avec l’appareil si la valeur annoncée est exacte. En attendant ce moment, les élèves peuvent s’entraîner à prévoir : ils cherchent les images de quelques nombres et vérifient. Ils peuvent venir parier dès qu’ils pensent avoir découvert la loi et s’en sentent assez sûrs.

La première situation, indispensable selon l’auteur, permet de construire le modèle multiplicatif de la situation d’agrandissement : l’addition n’est pas la seule opération qui agrandit les nombres ¹⁴⁹.

Avec peu de modifications, cette situation du pantographe pourrait être prise comme situation initiale dans l’étude des applications linéaires. Mais alors les hypothèses que font les élèves pour interpréter les agrandissements du puzzle avec de simples translations ($x \rightarrow x + a$) seraient envisagées moins sérieusement. Elles seraient rejetées presque sans examen, puisque l’appareil fournirait la bonne image. Au lieu de construire le modèle et de prévoir le résultat satisfaisant les conditions voulues, il suffirait de le découvrir comme une loi de la nature. Or le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif et doit pouvoir lui être opposé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels.

La seconde activité permet d’utiliser la multiplication pour enrichir le sens de l’opération : la composition de deux agrandissements de coefficients quelconques (entiers mais aussi rationnels ou décimaux) engendre un agrandissement dont le coefficient est le produit des coefficients des deux agrandissements composés. Cet enrichissement permet à l’élève de tenir le raisonnement analogue à celui-ci : les agrandissements successifs par les pantographes $[\times 2,5]$ et $[\times 1,25]$ donnent un seul

¹⁴⁹ *Ibid* [p 227].

agrandissement dont le coefficient est $2,5 \times 1,5$ et dont la valeur 3,75 peut être déterminée par des calculs sur des longueurs particulières. Cet enrichissement n'est pas immédiat, il est le fruit d'un véritable travail mathématique. Guy Brousseau insiste sur la nécessité de ce travail ¹⁵⁰ :

Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à "exploiter" le genre de situations didactiques présenté plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte d'un élève : "Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général) ; il s'appelle "composé de deux applications" (sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants .) "

Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie ; elle revient à affirmer implicitement qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept mathématique

On distingue dans ces activités, au sens de Gérard Vergnaud ¹⁵¹, deux types de multiplication dans le cas d'un seul espace de mesure : la multiplication de la longueur d'un côté par le coefficient du pantographe (multiplication d'une mesure par un opérateur scalaire pour obtenir la mesure correspondante) et la multiplication de deux coefficients dans le cas de deux utilisations successives du pantographe (multiplication de deux opérateurs scalaire pour obtenir l'opérateur composé). Dans les deux cas, la multiplication est envisagée dans une situation où le passage des nombres entiers aux nombres décimaux ne se heurte pas à une rupture du sens de l'opération.

La multiplication des décimaux chez R. Douady & M.-J. Perrin

Dans la progression proposée par Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin ¹⁵², la multiplication de deux entiers a deux sens différents suivant que l'un des deux est une mesure et l'autre un nombre sans dimensions ou que les deux nombres sont des mesures. Les calculs du périmètre d'un carré ou de l'aire d'un rectangle illustrent et donnent du sens à ces deux situations. Les décimaux y sont abordés comme des rationnels particuliers, la multiplication de deux décimaux est construite par les élèves dans une situation de calcul d'aire de rectangle.

Il s'agit dans ce chapitre d'utiliser le cadre géométrique pour faire avancer les connaissances sur les nombres : c'est en calculant la mesure de l'aire de rectangles qu'on donnera du sens au produit de fractions, et les fractions décimales seront privilégiées pour approcher la mesure du côté d'un carré dont l'aire est donnée. (...)

Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles. On peut

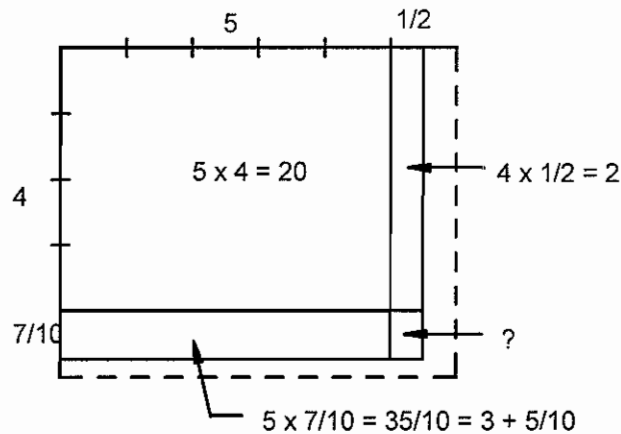
¹⁵⁰ *Ibid.* [pp 234].

¹⁵¹ VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : Peter Lang [pp. 161 et suiv.]

¹⁵² DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux*, brochure n°62, PARIS : IREM de Paris 7

déterminer l'aire de la 4^{ème} partie par référence au pavage. Et l'aire du rectangle est la somme des aires des quatre parties. Finalement la connaissance des dimensions détermine l'aire du rectangle. Par convention, le produit de 2 nombres fractionnaires a et b est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions (a, b) en prenant des unités de longueur et d'aire adaptées.

Exemple : $a = 4 + \frac{7}{10}$ $b = 5 + \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} \left(4 + \frac{7}{10}\right) \times \left(5 + \frac{1}{2}\right) &= 4 \times 5 + \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + \left(5 \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

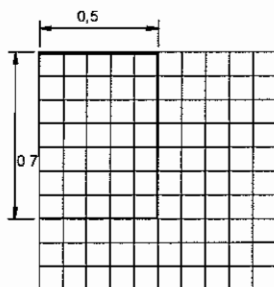
Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimension $\frac{7}{10}$ u et $\frac{1}{2}$ u.

On le reporte dans le carré unité. (...) Finalement la mesure de l'aire cherchée est :

$$\left(4 + \frac{7}{10}\right) \times \left(5 + \frac{1}{2}\right) = 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}$$

(...) L'activité présentée ici est l'occasion de donner du sens à la fois à cette multiplication et au calcul de l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions dans le cas où les mesures ne sont pas entières.

Remarque : Avec des nombres décimaux on aurait le même travail.



Par exemple $0,5 \times 0,7 = 0,35$: on a besoin de 35 carrés de dimension 0,1u pour paver le rectangle de dimension 0,5u et 0,7u. L'aire du carré de dimension 0,1u est donc 0,01C, il en faut 35 pour paver le rectangle de dimensions (0,5u ; 0,7u) donc $0,5 \times 0,7 = 0,35$.

Comme dans l'ingénierie de Guy Brousseau, la connaissance nouvelle est issue, dans une situation multiplicative connue, d'un problème posé par

l'introduction de valeurs décimales. Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin insistent, elles aussi, sur la nécessité d'un travail mathématique ainsi que sur l'importance du réinvestissement des nouvelles connaissances dans différentes situations.

Au fur et à mesure que de nouvelles fractions apparaissent, on les fait intervenir dans des situations différentes de celles où elles ont été créées. De cette manière les fractions vont pouvoir être décontextualisées et prendre le statut de nombre. De plus de nouvelles situations vont permettre aux élèves de produire de nouvelles écritures, qu'on pourra à leur tour utiliser dans de nouveaux problèmes. C'est ainsi que le stock des nombres s'agrandit. Il s'agit d'utiliser les écritures fractionnaires pour traiter des relations de proportionnalité entre des quantités continues.

(...) Nous ne détaillerons pas ici ces situations de proportionnalité. En voici quelques exemples :

- prix payé pour des marchandises en fonction de la masse,
- consommation d'essence en fonction de la distance parcourue,
- distance parcourue en fonction du temps dans un mouvement uniforme.

Remarquons que dans cette ingénierie comme dans celle de Guy Brousseau, la multiplication est envisagée dans une situation où le passage des nombres entiers aux nombres décimaux ne se heurte pas à une rupture du sens de l'opération.

Quelle multiplication dans ces deux ingénieries didactiques des décimaux ?

Dans ces deux ingénieries, les nombres décimaux sont introduits comme des rationnels particuliers. Ce choix de définition a pour conséquence une diversité de l'écriture des décimaux absente des ouvrages que nous avons étudiés : écriture fractionnaire quelconque (la fraction irréductible associée a pour dénominateur le produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5), écriture fractionnaire décimale (le dénominateur de la fraction est une puissance de 10) ou écriture décimale (certains auteurs disent aussi écriture virgulée mais nous pensons que cette dénomination entraîne des confusions pour les nombres entiers). Dans l'enseignement de la multiplication des décimaux, les différentes écritures entraînent des traitements différents dans les procédures de calculs.

Dans l'ingénierie de Guy Brousseau, les coefficients des agrandissements ou des réductions sont des rationnels, quotients de deux longueurs entières, le calcul effectif du produit des coefficients est ramené au calcul du coefficient de l'agrandissement composé.

Dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, les nombres qui mesurent les côtés des rectangles sont des rationnels construits à partir de partages et de reports de l'unité de longueur. Le calcul effectif du produit de deux décimaux en écriture fractionnaire décimale permet de tisser un lien avec la technique usuelle. Ce lien apparaît dans l'extrait cité, il montre qu'en multipliant un nombre de dixièmes par un nombre de dixièmes, on obtient un nombre de centièmes. Un travail spécifique est proposé pour passer de ces procédures "artisanales" à la technique usuelle.

Dans les deux ingénieries, la multiplication des décimaux est construite en continuité avec celle des entiers. Cette continuité est assurée par le choix d'une situation où l'addition réitérée n'est pas une bonne représentation de la multiplication : l'application puis la composition d'opérateurs d'agrandissements sur des mesures pour Guy Brousseau et le calcul de l'aire de rectangles pour Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin. Ce choix évite aux auteurs (et c'était certainement là un de leurs objectifs) de ramener le décimal à un nombre entier par un changement d'unité.

Les nombres considérés dans les deux ingénieries sont de natures différentes, nous distinguons, dans notre étude, les nombres-mesures (rattachés à une unité), les nombres-scalaires (sans unité mais qui opèrent sur des mesures, par exemple le coefficient d'un agrandissement est un scalaire) et les nombres-abstrais (sans unité ni lien avec des mesures, par exemple les nombres des exercices de technique opératoire sont des nombres abstraits).

Dans les situations multiplicatives envisagées par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, les nombres sont des nombres-mesures, si bien qu'il peut être difficile d'éviter que la longueur $0,5 u$ ne soit aussi considérée comme $5 v$ avec $v = \frac{u}{10}$. Cette difficulté n'apparaît pas dans la situation de Guy Brousseau, les nombres-scalaires n'ayant pas d'unité. Ce choix est important pour cet auteur, comme nous l'avons déjà souligné¹⁵³

Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 - a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions

Les passages entre nombres-scalaires et nombres-abstrais sont plus faciles qu'entre nombres-mesures et nombres-abstrais du fait même de l'absence d'unité lors de la composition de deux opérateurs. Nous avons d'ailleurs pu le constater lors d'une expérience d'enseignement de la multiplication de radicaux en classe de troisième¹⁵⁴.

Étudions maintenant comment Jeanne Bolon, dans sa recherche sur l'impact des recherches en didactique des mathématiques sur l'enseignement des nombres décimaux¹⁵⁵, envisage leur multiplication.

¹⁵³ BROUSSEAU G (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, in *Théorie des situations didactiques* (115-160), Grenoble : La pensée sauvage. [p. 131].

¹⁵⁴ RODITI E (1996), *La racine carrée en troisième, étude d'une activité*, cahier didirem n°17, Paris : IREM de Paris 7

¹⁵⁵ BOLON J (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Paris : Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5.

La multiplication des décimaux dans la thèse de Jeanne Bolon

Dans sa thèse, Jeanne Bolon propose une série de douze *suggestions* progressives sous forme de fiches d'activités commentées. Nous distinguons cette progression des deux ingénieries précédentes car la thèse ne présente pas d'évaluation de ces suggestions (fondée sur la comparaison d'une analyse *a priori* et d'une analyse *a posteriori*).

Son objectif était plutôt d'évaluer le parti que les enseignants qui ont participé à son travail de recherche ont tiré de ces suggestions inspirées par les travaux de didactique des mathématiques. Ces suggestions ne sont pas directement utilisables, les objectifs et la trame des activités sont présentés, l'enseignant doit inscrire ces activités dans un déroulement de l'enseignement segmenté en séquences et dans une organisation de la classe, il lui reste encore à élaborer différentes phases du travail : institutionnalisations, applications, évaluations.

L'ensemble de ce travail très riche concerne l'enseignement des décimaux à l'école primaire (CM2) et au collège (6^e). Nous y avons relevé les activités qui concernent implicitement ou explicitement la multiplication des décimaux.

Ordre de grandeur du produit de deux décimaux

Dans la suggestion 1 qui concerne le calcul approché sur les entiers et les décimaux, l'auteur propose des tâches où les élèves doivent choisir, parmi une liste de nombres, celui qui est le plus proche d'un produit donné. Par exemple :

38×109 qui doit être associé à 4 038 parmi 234, 5 002, 4 038, 512 et 84 ;

$45,92 \times 0,2$ qui doit être associé à 10 parmi 90, 10 et 30.

Il est difficile, à la lecture de la suggestion, de savoir quelles procédures les élèves sont censés mobiliser à ce niveau. En référence aux programmes, les élèves peuvent engager les procédures suivantes :

– utiliser des approximations de 38 et 109 par excès (40 et 110) et en déduire $38 \times 109 \approx 4\,400$; utiliser ensuite une approximation de 109 par défaut (100) et en déduire $38 \times 109 \approx 38 \times 100 \approx 3\,800$. D'où le choix de 4 038 ;

– approcher 45,92 par 50. Ainsi $45,92 \times 0,2 \approx 50 \times 0,2$ et on obtient $45,92 \times 0,2 \approx 10$ en calculant $50 \times 0,2$.

Il n'est pas facile, à ce niveau de la progression proposée par les suggestions, de comprendre comment l'élève effectue $50 \times 0,2$. Il semble que la multiplication d'un entier par un décimal est, comme dans les manuels de CM2, un des prérequis de la progression proposée.

Nous remarquons la volonté implicite "d'intégration" de nouveaux nombres qui émerge de cette activité : les procédures mises en œuvre pour les nombres entiers sont analogues à celles qui concernent les décimaux ; les nombres changent mais l'opération, elle, ne change pas. L'ordre de grandeur est un moyen de la mise en œuvre de cette intégration.

De la multiplication des entiers à celle des décimaux

La suggestion 2 concerne les grandeurs familières. Dans ce contexte, l'auteur pose le problème de l'interprétation des résultats affichés par la calculatrice. Une

situation porte sur les trois grandeurs : masse, prix au kg, prix. Les nombres décimaux sont écrits en respectant le format social qui correspond à l'unité : les francs sont écrits avec deux décimales, ce qui permet de lire 5,80 F comme 5 F 80 c, les masses sont écrites avec trois décimales, ce qui permet de lire 0,620 kg comme 0 kg 620 g. La situation montre que les balances du commerce n'indiquent pas le produit de la masse par le prix au kg, que l'élève peut déterminer à la calculatrice et que Jeanne Bolon appelle le "vrai" nombre. Elles indiquent son arrondi à cinq centimes près. A cette étape de la progression proposée, les élèves ne sont pas censés savoir calculer le produit de deux décimaux, ils doivent l'effectuer à la calculatrice

La pertinence de ce prolongement du produit des grandeurs au cas où les valeurs sont décimales est admise mais elle est questionnée par la situation, et cela nous semble être un objectif pédagogique de l'auteur : ce questionnement permet de soulever un problème contribuant à enrichir le sens de l'écriture des nombres décimaux ainsi que celui de la multiplication.

La multiplication ne conserve pas le format social des nombres

Le même énoncé de la suggestion 2 pose aussi le problème de l'écriture d'un résultat soumise à un format social : le produit de la masse en kg par le prix au kg donne la "vraie" valeur du prix qui n'est pas celle que la balance affiche.

Au-delà de la constatation de la perte du format social des nombres, un travail est suggéré au professeur qui peut être entrepris en classe pour faire comprendre le sens des décimales affichées par la calculatrice. Par exemple, dans l'étude de la ligne d'un ticket de caisse de poissonnier¹⁵⁶

Maquereau
0,550 kg 29,90 F/kg 16,45F

la calculatrice affiche 16,445 pour le produit $0,550 \times 29,90$. Des procédures personnelles peuvent conduire à ce résultat : 1 kg coûte 29,90 F donc 100g coûtent 2,99 F. Ainsi 500 g coûtent $2,99 \text{ F} \times 5 = 14,95 \text{ F}$. 50 g coûtent la moitié de 2,99 F

Or $2,99 \text{ F} = 299 \text{ c}$, $299 \div 2 = (298 + 1) \div 2 = 149 + \frac{1}{2}$, cela permet d'interpréter le demi-centime qui apparaît dans le résultat de la multiplication ainsi que le demi-centime supplémentaire qui est demandé à l'acheteur par la pratique de l'arrondi.

La multiplication n'est pas qu'une addition répétée

Dans la suggestion 7, Jeanne Bolon propose une série d'activités de production d'énoncés de problèmes où l'on devrait effectuer certaines multiplications et certaines divisions. Les multiplications proposées sont :

$$13 \times 9 \qquad 13 \times 1058 \qquad \frac{14}{6} \times \frac{9}{13} \qquad 13 \times 10,58 \qquad 0,13 \times 10,58$$

¹⁵⁶ Ibid. [p. 221].

Les énoncés sont affichés puis les problèmes qui se ressemblent sont regroupés. L'auteur rappelle au professeur, dans un langage courant, une classification des problèmes multiplicatifs inspirée de celle de Gérard Vergnaud ¹⁵⁷ : transformation par un opérateur linéaire, composition de deux transformations par des opérateurs linéaires, composition de deux grandeurs, comparaison de deux grandeurs homologues, conversion d'unité.

L'ambition de l'auteur est affichée au début de la suggestion ¹⁵⁸.

Les sens de la multiplication se sont enrichis depuis l'addition répétée du cours élémentaire. Mettre de l'ordre dans les différents types de problèmes est le but des activités suivantes.

On retrouve ici la préoccupation déjà citée et partagée par tous les auteurs : prolonger la multiplication des entiers aux décimaux en reprenant les situations multiplicatives qui mettent en jeu des grandeurs qui avaient des valeurs entières et en leur attribuant des valeurs décimales. Dans cette suggestion plus que dans la précédente, le prolongement est implicite.

Multiplication/division par 10, 100 ou 1000 et changements d'unités

La suggestion 9 porte sur les grandeurs et unités conventionnelles, principalement celles de longueur, d'aire, de volume et de masse. Elle fait suite à une série d'activités où les élèves manipulent ces grandeurs, procèdent à différents partages et à l'expression des mesures des grandeurs par un couple nombre / unité. Ils ont constaté, en changeant les unités de référence, que plus l'unité est grande, plus le nombre qui exprime la mesure est petit.

La suggestion 9 reprend ces activités avec les unités conventionnelles, le premier objectif est d'installer quelques repères physiques sur les unités usuelles. Le deuxième objectif est de comparer les unités et les sous-unités usuelles. Ici encore, l'auteur propose de recourir à des manipulations matérielles ¹⁵⁹

Il est très important de faire voir aux enfants 1 cm^3 , 1 dm^3 , 1 m^3 , fait avec des armatures (baguettes de bois). Il est alors impossible de dire que $10\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3$. On voit tout de suite que c'est faux.

Nous émettons une réserve toutefois, cette manipulation n'est pas suffisante pour régler tous les problèmes liés aux conversions d'unités et rendre impossible l'écriture : $V = 12\text{ dm}^3 = 1,2\text{ m}^3$.

D'autres activités traitent des changements d'unité usuelle de longueur et de masse, toujours à partir de manipulation effective des élèves. L'auteur dresse le bilan de ces séances ¹⁶⁰ :

¹⁵⁷ VERGNAUD G (1981), *Op. cit.* [pp 161 et suiv.]

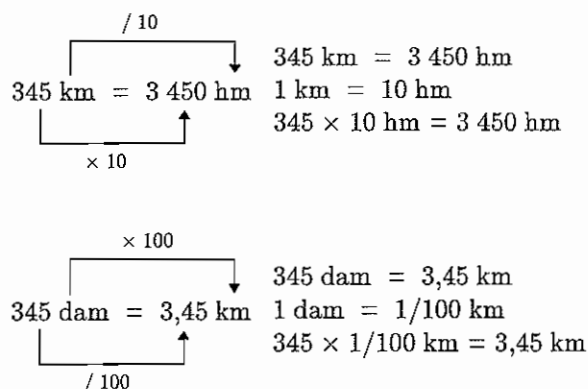
¹⁵⁸ BOLON J. (1996), *Op. cit.* [p 236]

¹⁵⁹ *Ibid.* [p. 239]

¹⁶⁰ *Ibid.* [p. 240].

Quand on mesure un objet avec deux unités, on trouve deux nombres pour le mesurer ; le nombre le plus grand est celui qui correspond à l'unité la plus petite.

On peut représenter par un schéma ou par un calcul :



On retrouve, et c'est la première fois depuis notre étude du manuel d'arithmétique de 1947, les multiplications et divisions par 10, 100 et 1000 directement liées aux changements d'unité : 3,4 est un nombre qui mesure un segment en cm, il signifie la même longueur que 34 mm. Mais cet éclairage n'est pas celui qui domine dans les suggestions de Jeanne Bolon, elle ne l'utilise pas, par exemple, pour la multiplication des décimaux. Sans doute pour éviter d'enfermer l'élève dans une représentation du nombre décimal qui, selon Guy Brousseau que nous avons déjà cité à ce sujet, le conduit à commettre des erreurs.

Multiplication et agrandissement

Dans la suggestion 10, l'auteur reprend des activités analogues à celle du puzzle de Guy Brousseau en choisissant des mesures entières ou décimales. Nous ne détaillerons donc pas l'analyse.

Dans la suggestion 11, l'auteur reprend les premières étapes de l'activité avec le pantographe de Guy Brousseau où des dessins de maisons sont agrandis ou réduits. L'objectif de Jeanne Bolon n'est pas de passer d'un agrandissement à deux agrandissements pour multiplier les coefficients. Il est d'utiliser les imprécisions pour, sans aborder une quelconque théorie de l'approximation, amener les élèves à distinguer les valeurs obtenues par mesure directe (VMD), les valeurs obtenues par un calcul sur des VMD, et les valeurs obtenues par un calcul sur des résultats de calculs qui ont pu être arrondis.

Dans cette activité le professeur annonce que l'agrandissement de la maison correspond à la multiplication de ses longueurs par 1,5. La hauteur de la porte mesure 3 cm, sa largeur 1,7 cm... Les procédures attendues par l'auteur sont ¹⁶¹

- Utiliser un opérateur additif
- Partir des nombres entiers, prendre le nombre et ajouter sa moitié ou passer par l'image de 1.

¹⁶¹ Ibid [p 245].

- Partir d'une mesure décimale, convertir en millimètres, passer par l'image de 1
- Partir d'une mesure décimale, convertir en dixièmes, calculer l'image d'un dixième.
- Pour des élèves de niveau plus élevé, utiliser le multiplicateur fractionnaire

Remarquons que l'auteur n'envisage pas que les élèves multiplient directement deux nombres en écriture décimale.

Multiplication, aire et périmètre de rectangles

La suggestion 12 qui est la dernière de la progression, reprend le travail de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin. Le calcul d'aire porte sur des rectangles dont les dimensions ne sont pas écrites sous forme décimale mais sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction : $3 + \frac{1}{2}$, $2 + \frac{3}{4}$, $4 + \frac{6}{10}$. Pour déterminer le produit de deux fractions l'auteur envisage des procédures de pavages ou le recours aux nombres en écriture décimale et le calcul à la main ou à la calculatrice.

Il semblerait donc que la compétence calculatoire sur les décimaux soit envisagée comme pouvant être acquise ou non à ce dernier niveau de la progression. L'enseignement de la technique opératoire n'est pas explicité.

Quelle multiplication des décimaux dans les suggestions de Jeanne Bolon ?

La multiplication des décimaux est pratiquement omniprésente dans les suggestions qui figurent dans la thèse de Jeanne Bolon. La multiplication est implicitement présente dans les écritures des nombres décimaux ainsi que dans les changements d'unité. Nous pouvons distinguer deux types de situations : celles qui mettent en avant les ruptures de sens entre la multiplication des décimaux et la multiplication des entiers et celles qui assurent une continuité de sens avec un "écrasement" des nombres par l'opération. Les situations-ruptures sont très minoritaires, la seule rupture qui soit vraiment soulevée est celle de la non-conservation du format social des nombres. Les autres situations assurent plutôt une continuité de sens : associer l'opération à des problèmes indépendamment des nombres, prolonger les situations multiplicatives sur des entiers à des décimaux, utiliser les ordres de grandeurs ou des approximations pour approcher un produit. Les modèles multiplicatifs utilisés qui permettent le prolongement de l'opération des entiers aux décimaux sans rupture de sens, sont ceux que nous avons repérés dans les deux ingénieries didactiques : l'agrandissement ou la réduction de figures sans déformation et le calcul d'aire de rectangles.

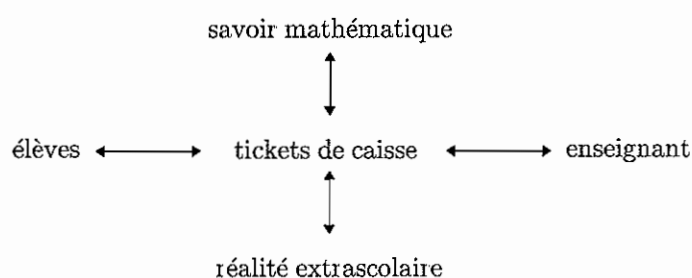
L'analyse détaillée que nous venons de terminer de ces suggestions montre en outre que l'auteur ne prend pas en charge explicitement l'enseignement de la technique de la multiplication de deux décimaux. Sans doute pouvons-nous avancer que l'auteur cherche à privilégier la construction du sens de cette opération plutôt que le côté technique. Comment tisser un lien entre sens et technique ? L'auteur laisse la réponse à la charge du professeur.

Une expérience d'enseignement comprenant une phase contextualisée

Bien qu'il soit peu probable que les enseignants français construisent leurs projets d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en référence à des recherches en cours en Italie, nous voudrions mentionner une expérience de chercheurs italiens dont les résultats ont été publiés en septembre 1996.

Plusieurs chercheurs italiens mènent des travaux sur des projets d'enseignement à long terme où le savoir mathématique est contextualisé en dehors du domaine mathématique : en économie, en technologie, en astronomie... De tels projets d'enseignement reposent sur des hypothèses de construction des connaissances à travers la contextualisation du savoir mathématique¹⁶² : la "motivation" de l'élève est d'autant plus grande que le problème l'intéresse, le rapport avec des "pratiques extra-scolaires familières à l'enfant" lui permet de recourir au sens de la situation pour effectuer sa tâche et pour contrôler cette effectuation, la rencontre avec les objets et les pratiques sociales liés au "domaine d'expérience" réalise une médiation avec le savoir incorporé dans ces objets et dans ces pratiques sociales, la mise en place de stratégie de résolution de problèmes contextualisés participe à la construction de schèmes, les activités de résolution de problèmes liés au "domaine d'expérience" mobilisent "naturellement" des opérations mentales multiples et coordonnées.

Milena Basso & Cinzia Bonotto¹⁶³ ont réalisé une expérience d'enseignement de la multiplication des décimaux et de la proportionnalité en introduisant des tickets de caisse de supermarchés, de primeurs, de bouchers... dans le contexte scolaire. L'expérience rejoint les travaux du *Nucleo di Padova* sur les problèmes de l'enseignement des nombres rationnels à l'école élémentaire. Cette expérience d'enseignement s'est déroulée durant une année scolaire à raison de deux heures hebdomadaires. Les auteurs ont montré que ces tickets de caisse matérialisaient un moyen de médiation entre le savoir contextualisé d'une réalité extrascolaire et le savoir mathématique, qu'ils étaient un instrument de médiation entre les élèves et le savoir. Les auteurs schématisent ainsi la situation :



¹⁶² BOERO P. (1994), Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergence et divergence dans les perspectives de recherche, in *Vingt ans de didactique des mathématiques* (17-50), Grenoble : La pensée sauvage.

¹⁶³ BASSO M. & BONOTTO C. (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 19A N 5* (424-449), Paderno del Grappa TV : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin

D'après les auteurs, cette situation a généré des questionnements et des raisonnements, elle a favorisé des contrôles, elle a permis d'accéder à des savoirs mathématiques (contextualisés, décontextualisés puis institutionnalisés) autour de plusieurs activités : lecture "fonctionnelle" des données inscrites sur les tickets, approximation d'une donnée, recherche de la valeur d'une donnée manquante (effacée par l'enseignant), mise en relation des grandeurs numériques (émergence du concept de proportionnalité), recherche d'algorithmes pour multiplier et diviser avec des nombres décimaux.

Cette expérience qui relate des résolutions de problèmes dont les énoncés sont analogues à ceux qui figurent dans les manuels français pour la classe de sixième, montre que des apprentissages mathématiques peuvent être construits à partir de problèmes posés dans le contexte extrascolaire et qu'ils permettent de les résoudre. L'enseignement qui émerge des manuels français suit un chemin inverse : le savoir mathématique est enseigné à travers des activités du contexte scolaire, il est appliqué pour la résolution de problèmes posés par des situations extra-scolaires auxquelles les élèves ne sont pas nécessairement familiarisés.

Si les enseignants sont peu familiers des productions de la didactique des mathématiques dont les publications sont rédigées à l'attention des chercheurs, certains professeurs consultent des publications qui leur sont adressées. Nous allons maintenant étudier les propositions qui y figurent pour enseigner la multiplication des décimaux.

La multiplication des décimaux dans les publications pour les enseignants

Les auteurs des manuels proposent un enseignement très décontextualisé pour privilégier la technique opératoire. Les situations multiplicatives ne sont pas exploitées pour introduire la multiplication ou pour déterminer le produit de deux décimaux. Au mieux, elles sont utilisées dans des problèmes de réinvestissement. A l'opposé, les enseignements élaborés par les didacticiens sont très riches en tâches qui permettent à la fois un prolongement de la multiplication des entiers à celle des décimaux, et une élaboration de procédures variées pour obtenir le produit de deux décimaux. Nous savons, d'après une enquête de la DEP¹⁶⁴ déjà mentionnée, que les professeurs utilisent les manuels principalement pour y choisir des exercices d'entraînement, un tiers d'entre eux utilisent d'autres sources pour préparer leurs cours. Les publications pour les enseignants constituent-elles un relais entre la recherche en didactique et les professeurs ? Répondent-elles aux problèmes d'enseignement laissés en suspens dans les recherches ? Présentent-elles les activités préparatoires contextualisées qui font défaut dans les manuels ?

¹⁶⁴ Direction de l'Évaluation et de la Prospective (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

Comment ces publications s'adressent-elles aux enseignants ?

Nous avons consulté les publications à l'intention des enseignants. Trois d'entre elles abordent la multiplication des décimaux. Ce sont par ordre chronologique d'édition¹⁶⁵ : *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, *Nombres décimaux* (1986), *Apprentissages mathématiques en 6e* (1991) et *Travaux numériques 6e* (1998). Leurs conceptions sont très différentes. Après les avoir brièvement présentés, nous les comparerons suivant les critères déjà utilisés : dans quelles situations s'inscrivent les activités de construction de la multiplication des décimaux et quelle continuité est établie avec la multiplication des entiers ? Comment est pris en charge le passage des procédures personnelles à la technique usuelle ? Comment passe-t-on des situations multiplicatives de découvertes aux autres situations et comment dans ce passage sont traitées les ruptures de sens de la multiplication ?

Aides pédagogiques a été rédigé par des membres de différents IREM. Il propose une cinquantaine de pages pour éclairer l'enseignement des décimaux en évoquant les avantages et les inconvénients des différentes présentations classiques puis une centaine de pages où sont développées quatre présentations réalisées en classe. Un extrait d'article de Guy Brousseau et une "bibliographie sommaire" terminent cet ouvrage. Sa présentation et son style sont proches de ceux d'un recueil d'articles didactiques regroupés autour d'un thème commun.

Apprentissages mathématiques est un prolongement pour la classe de sixième des ERMEI bien connus à l'école élémentaire. Il a été mis au point par une équipe regroupant des chercheurs de l'INRP, des professeurs d'IUFM, des professeurs de collège et une institutrice. Sa conception est assez proche de celle d'un livre du maître : buts et objectifs déclarés et argumentés, scénarios d'activités commentés, organisation matérielle du déroulement précisée. Néanmoins sa structure n'est pas caractéristique de celle des livres du maître où les chapitres sont plus nombreux, analogues à ceux qu'on trouve dans un manuel pour la classe. Les auteurs recourent à de nombreux schémas, les développements théoriques sont assez denses et le langage utilisé recourt à du vocabulaire et à des concepts didactiques tout en restant assez proche du langage courant.

Cet ouvrage propose deux progressions, une en calcul et une en géométrie qui couvrent une partie importante du programme de la classe de sixième. La progression consacrée au calcul débute par deux situations de "révision" de la multiplication qui figurait, à l'époque de la publication, au programme de l'école élémentaire. L'objectif de ces révisions est de revenir sur des conceptions sources d'erreurs bien connues des enseignants.

Travaux numériques est un ouvrage rédigé par deux professeurs de collège. Sa conception est très proche de celle d'un livre du maître, les titres des chapitres

¹⁶⁵ APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, *Nombres décimaux*, Paris
PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier/INRP.
DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan Pédagogie.

reprennent ceux des manuels de sixième. Chaque chapitre présente des objectifs pédagogiques en référence à des résultats de recherches et aux évolutions des programmes. Des indications concernent le rôle du professeur. Les activités sont présentées et commentées : objectif, présentation, matériel, consignes, déroulement... elles se terminent par "L'essentiel" qui résume l'intérêt de l'activité.

Les auteurs s'adressent à des collègues. Le professeur-lecteur est parfois confondu avec l'auteur-professeur comme nous le soulignons dans les citations suivantes ¹⁶⁶ :

Notre rôle consiste donc à nous inscrire dans le développement de ce processus engagé depuis le cours préparatoire.

(.) les évaluations de début de 6e, même si elles montrent que nos élèves ont des acquis.

Les concepts issus des recherches en didactique des mathématiques y sont utilisés modérément.

Quelles situations pour enseigner la multiplication des décimaux ?

Parmi les quatre propositions qui figurent dans *Aides pédagogiques*, trois traitent de la multiplication des décimaux. Deux d'entre elles considèrent le nombre décimal comme un rationnel particulier et la multiplication des décimaux est considérée comme un cas particulier de la multiplication des rationnels. Elle est présentée par le calcul d'aire de rectangles à l'aide de pavages rectangulaires comme dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin. Une proposition analogue figure dans *Travaux numériques*.

Une situation plus formelle qui met en jeu des opérateurs et qui repose implicitement sur les propriétés des fonctions linéaires, est décrite dans *Aides pédagogiques* ¹⁶⁷. Les décimaux restent, à ce niveau de l'exposé, écrits sous forme

fractionnaire décimale avec la convention d'écriture $\frac{n}{10} = n \div 10$.

1) En utilisant la fonction "diviser par 10", on peut introduire les nombres décimaux, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ..., $\frac{27}{10}$, les comparer, les additionner et les multiplier par un naturel (.)

2) Si on compose la fonction "diviser par 10" avec elle-même, on se trouve confronté à la recherche de l'image des nombres $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ... (.)

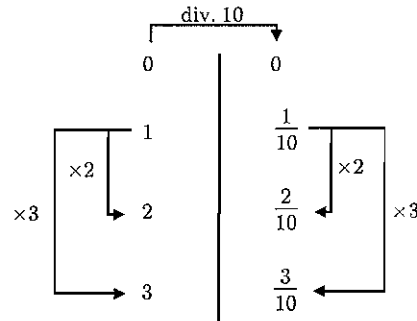
Une réponse peut être apportée en remarquant que "div 10" suivie de "div 10" est équivalente à "div. 100" (.)

3) A l'aide des fonctions réciproques "multiplier par 10", ... il est facile d'observer que $\frac{11}{100} \times 10 = \frac{11}{10}$ (.)

¹⁶⁶ DUPÉ C. & HILLION M (1998), *Op cit* [pp 47-48]

¹⁶⁷ APMEP (1986), *Op cit* [pp 158-161]

4) Les propriétés de la fonction “div. 10” nous permettent d’établir le tableau suivant :



Ainsi $\frac{1}{10} \times n = \frac{n}{10}$ ce qui permet, en acceptant la commutativité de construire ce nouveau tableau : multiplier par $\frac{1}{10}$. (..)

En comparant ces deux tableaux on constate que multiplier un entier par $\frac{1}{10}$ équivaut à diviser cet entier par 10. On étendra cette règle à la multiplication d’un décimal par $\frac{1}{10}$.

Par exemple pour calculer $\frac{2}{100} \times \frac{1}{10}$, on divisera $\frac{2}{100}$ par 10.

Comment donner un sens à $\frac{2}{10} \times \frac{3}{100}$?

$$\begin{aligned} \frac{2}{10} \times \frac{3}{100} &= \frac{2}{10} \times \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{2}{1000} \times 3 \text{ (..)} \end{aligned}$$

L’auteur précise¹⁶⁸ :

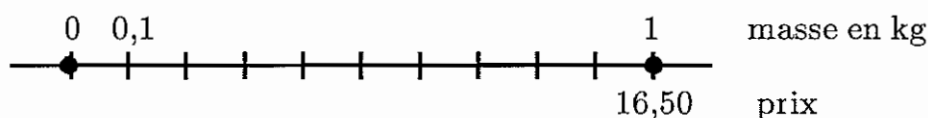
Cette présentation ne peut se faire sans un travail préalable et parallèle sur des situations de proportionnalité (par exemple réalisation de maquettes à une échelle donnée)

Finalement, on retrouve les deux principales situations multiplicatives utilisées dans les ingénieries de Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, les agrandissements - réductions et les calculs d’aires de rectangles. Ces situations permettent de ne pas changer de conception de la multiplication en la prolongeant des entiers aux décimaux.

Les auteurs de *Travaux numériques* proposent aussi une activité que nous avons déjà présentée de double graduation de droite pour déterminer le produit de deux décimaux¹⁶⁹ :

¹⁶⁸ *Ibid.* [p. 162]

¹⁶⁹ DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Op. cit.* [p. 61]



Etudions la correspondance entre la masse et le prix du pain pour 16,50 F par kg. Compléter les deux graduations figurant sur la feuille, puis à l'aide de ces données, déterminer le prix d'un bâtard de 200 g et le prix d'un pain de campagne de 500 g.

Les auteurs de *Apprentissages mathématiques* utilisent la même situation dans des problèmes de proportionnalité non pour permettre le calcul du produit ni pour mettre en évidence la structure multiplicative mais seulement pour proposer à l'élève¹⁷⁰

un nouvel outil permettant de résoudre des problèmes de proportionnalité : la bande à double graduation (..)

Cette dernière fournit un support visuel pour les grandeurs en question (plus exactement pour leurs mesures relatives à des unités précises).

Des procédures personnelles à la technique usuelle

Ce passage n'est pas développé dans ces ouvrages. Les auteurs en laissent la charge aux enseignants ; ou estiment-ils qu'il ne pose pas de difficulté ? Les auteurs de *Travaux numériques* sont les seuls à mentionner ce passage, ils se contentent d'une remarque à la fin de deux activités où seules des procédures personnelles permettent de déterminer des produits¹⁷¹ :

L'étude des deux cas permet de découvrir une règle de calcul du produit de deux nombres décimaux en utilisant deux entiers :

Transformons le produit de 0,2 par 16,5 en un produit d'un entier par un entier. On choisit le produit de 2 par 165. A l'aide du produit de 2 par 165, trouver une règle permettant de calculer $0,2 \times 16,5$

A partir des deux exemples précédents, les élèves vérifieront cette règle sur d'autres produits.

Les réinvestissements dans de nouvelles situations multiplicatives

Ces activités ne figurent pas dans les ouvrages à destination des enseignants. Certains auteurs signalent la nécessité des réinvestissements. Mais ils sont toujours laissés à l'initiative des professeurs

Néanmoins, des situations multiplicatives différentes convoquent des conceptions différentes de la multiplication. Des auteurs signalent les difficultés que rencontrent certains élèves pour résoudre des problèmes et les expliquent par des conceptions inadaptées. Ils suggèrent alors des activités dites de "remédiation" qui permettraient de modifier les représentations que ces élèves ont de la multiplication

¹⁷⁰ PRESSIAT A. (1991), *Op. cit.* [p 98].

¹⁷¹ DUPÉ C. & HILLION M (1998), *Op. cit.* [p 61]

Apprentissages mathématiques (*) comme *Travaux numériques* (**) proposent des situations liées à l'ordre entre les facteurs et le produit, leurs présentations sont très ressemblantes ¹⁷² :

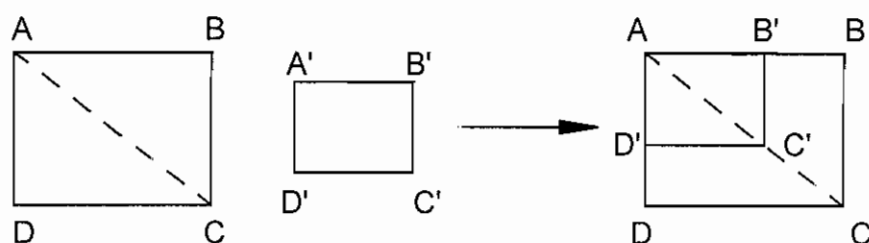
(*) Buts

- Amener les élèves à modifier leur conception courant de la multiplication comme “opération qui agrandit toujours” (Obstacle)
- Amener les élèves à savoir anticiper la place d'un produit par rapport à chacun de ses facteurs.

(...) amener les élèves à remettre en cause le modèle additif dans un problème d'agrandissement.

(**) Il s'agit, par des situations simples, d'amener les élèves à modifier la conception selon laquelle la multiplication agrandit toujours. La multiplication peut aussi réduire

Les deux ouvrages contiennent une activité où l'élève doit éliminer, parmi plusieurs résultats proposés pour des produits, ceux qui sont faux. Il utilise pour cela le calcul approché, ou la prise en compte du dernier chiffre, ou la prise en compte du nombre de chiffres après la virgule, ou enfin la place de l'un des facteurs par rapport à 1. Ces ouvrages contiennent également une activité d'agrandissement et de réduction. *Apprentissages mathématiques* a choisi l'activité du puzzle de Guy Brousseau. *Travaux numériques* propose d'effectuer une réduction A'B'C'D' d'un rectangle ABCD avec la diagonale [AC] tracée.



Après une superposition qui fait coïncider les deux sommets A et A', les deux longueurs [AB] et [A'B'] et les deux largeurs [AD] et [A'D'], l'appartenance du sommet C' à la diagonale [AC] est un critère qui permet de distinguer l'utilisation d'un modèle additif et l'utilisation d'un modèle multiplicatif.

Conclusion : la multiplication, des transpositions divergentes

Les professeurs, pour préparer leurs cours, utilisent des manuels, beaucoup d'entre eux consultent les programmes officiels et, certains d'entre eux lisent des

¹⁷² PRESSIAT A. (1991), *Op. cit.* [pp 54 et 64].

DUPÉ C. & HILLION M (1998), *Op. cit.* [p 58]

ouvrages destinés aux enseignants¹⁷³. Nous avons, dans ce chapitre, analysé les transpositions didactiques de la multiplication des nombres décimaux dans les différentes institutions que sont les publications de recherches, les ouvrages et les brochures à l'intention des enseignants et les manuels scolaires. Nous avons constaté des différences importantes.

Trois catégories d'enseignement, quelle pertinence ?

Nous avons débuté cette étude des publications en les distinguant suivant plusieurs catégories déterminées en fonction de choix didactiques : la multiplication est-elle présentée d'abord de façon contextualisée, la technique opératoire est-elle construite au moins en partie par les élèves et, si ces deux conditions sont réalisées, la technique est-elle construite en référence à la situation du contexte initial ? Les textes officiels semblent préconiser un enseignement comprenant une phase contextualisée¹⁷⁴ :

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans les apprentissages mathématiques, à l'école primaire comme au collège, notamment en vue de l'appropriation de connaissances nouvelles par les élèves

Mais l'utilisation du mot *problème* en mathématique est tellement diverse que les interprétations possibles de ce fragment de texte nous semblent nombreuses.

Nous avons réparti, par une première lecture, les publications suivant trois catégories que nous avons analysées successivement. Les enseignements proposés dans les deux premières catégories sont décontextualisés, ils se distinguent par l'existence d'une phase de construction de la technique opératoire laissée, au moins en partie, aux élèves. Les publications de la troisième catégorie proposent un enseignement comprenant une phase contextualisée. Nous pouvons à présent conclure sur la réelle pertinence de cette classification pour différencier les enseignements proposés.

Les manuels scolaires appartiennent tous à l'une des deux premières catégories. L'organisation des chapitres présente trois phases, quel que soit l'éditeur : des activités de révision et de découverte des nouveaux savoirs, un cours avec des exemples développés, des exercices d'application. Malgré cette apparente homogénéité, les propositions d'enseignement de la première catégorie ne proposent aucune construction de la technique opératoire dans les pages étiquetées "*activités préparatoires*", les élèves devant seulement lire un exposé du cours. En outre, nous avons montré que les activités préparatoires des manuels de la deuxième catégorie se distinguaient seulement des précédentes par une

¹⁷³ Rappelons quelques chiffres. Les enseignants consultent les manuels à 97%, les programmes à 85% et les publications à 34%. Ces chiffres sont tirés de

Direction de l'Évaluation et de la Prospective (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

¹⁷⁴ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

formulation plus ouverte, la place réservée au travail de l'élève étant toujours très limitée et insuffisante pour permettre une complète construction de la technique. Les propriétés algébriques de l'opération sur lesquelles repose la technique restent notamment toujours implicites. En cela, rien ne distingue les manuels de collège de ceux du primaire. Tout se passe comme si la distinction des deux premières périodes de l'enseignement était aménagée dans les livres par une maquette mais n'était pas assumée par les auteurs autrement que par une introduction au cours, ce que proposaient déjà des manuels scolaires anciens comme celui que nous avons analysé et qui a été publié en 1947...

Les autres publications, ouvrages et brochures à l'intention des enseignants et recherches en didactique des mathématiques, appartiennent toutes à la troisième catégorie. Le bilan de notre étude montre que les auteurs qui s'adressent aux professeurs n'ont pas cherché à tisser un lien entre le sens de la multiplication et la technique opératoire. Nous pourrions résumer ainsi la situation : soit la publication est une documentation pédagogique et alors le sens est privilégié mais les auteurs en restent à des procédures personnelles de détermination du produit, soit la publication est une ingénierie didactique et alors l'enseignement est d'abord contextualisé et il comprend la construction d'une technique de calcul qui s'appuie sur la situation du contexte.

Quant aux situations multiplicatives de réinvestissement dont l'objectif est d'enrichir à la fois le sens de l'opération, celui des nombres et de leurs écritures, elles sont globalement délaissées par les auteurs, même par ceux des manuels scolaires qui proposent de nombreux exercices mais qui, à une exception près, accordent une importance écrasante aux problèmes de prix. Il nous semble que cette constatation est à relier à la disparition de l'enseignement des grandeurs usuelles que nous avons signalée dans le chapitre précédent. Peut-être les prix sont-ils les seules grandeurs qui soient familières aux élèves sans que l'école ait à se charger de leur enseignement. L'expérience italienne d'enseignement à partir de tickets de caisse réalisée par Milena Basso & Cinzia Bonotto montre toutefois qu'une réelle expérience sociale des situations liées au calcul des prix n'est pas acquise par les élèves de cet âge. Elle montre aussi qu'à partir d'un tel domaine d'expérience peuvent émerger et se construire, dans le cadre scolaire, des savoirs mathématiques décontextualisés.

Nous pouvons maintenant répondre à la question de la pertinence de la distinction des trois catégories d'enseignement. Le critère dominant qui discrimine le contenu des publications est l'appartenance ou non à la catégorie "manuel scolaire" dont les auteurs proposent un enseignement qui "démarré" avec la technique opératoire puis proposent éventuellement des activités d'argumentation et de réflexion sur cette technique. Nous retrouvons là l'opposition constatée par Jeanne Bolon entre les programmes et les travaux issus de la didactique des mathématiques¹⁷⁵ :

¹⁷⁵ BOLON J. (1996), *Op. cit.* [pp 327-328]

Or les programmes officiels de sixième (.) Dans ces conditions (. .)
On peut se demander si le processus des progressions de référence,
contextualisation puis décontextualisation puis recontextualisation, est
compatible avec la gestion du temps didactique des classes de collège.

De plus, les publications à l'intention des enseignants ne prévoient pas une construction de la technique opératoire qui s'appuie sur la situation d'introduction de la multiplication des nombres décimaux, elles n'aménagent pas de lien entre des procédures personnelles " artisanales " de calcul et la technique usuelle.

Multiplications des décimaux, quels nombres avec quelles écritures ?

Les deux ingénieries introduisent les nombres rationnels avant les nombres décimaux, envisagés comme des rationnels particuliers. Les nombres et les opérations sont introduits par des situations. Ainsi, dans ces travaux, lors de l'étude de la multiplication des décimaux, les nombres sont soit des nombres-mesures soit des nombres-scalaires et leurs écritures sont multiples (fractionnaires, fractionnaires décimales ou décimales) bien que l'écriture fractionnaire soit privilégiée, ce qui est exploité.

Dans les manuels, à une exception près, les nombres décimaux sont traités, dans le chapitre de la multiplication, sans lien avec les fractions ; la seule écriture est l'écriture décimale. Lors de l'introduction de l'opération, les nombres sont abstraits, ils le sont encore dans les premiers exercices posés qui portent sur la technique opératoire et sur des questions plus théoriques. Quelques problèmes sont posés (presque uniquement de prix) où les nombres sont des nombres-mesures ou des nombres-scalaires.

Les occasions de changements de registres dans les publications sont rares. On en trouve principalement dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, où le calcul de $0,5 \times 0,7$ est considéré comme le calcul de $\frac{7}{10}u \times \frac{5}{10}u$, ce qui permet aux auteurs de recourir à des pavages rectangulaires dans un calcul d'aire pour déterminer le produit (changement de cadres).

Multiplication des entiers et des décimaux, rupture ou continuité ?

Les textes officiels déjà cités ¹⁷⁶ signalent une difficulté d'enseignement de la multiplication des décimaux : la reconnaissance des situations où intervient le produit de deux décimaux " est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition répétée est possible pour accéder à la multiplication. "

Les auteurs privilégient pourtant les situations assurant une continuité de sens dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux. Soit, et c'est le cas des ingénieries didactiques comme de certaines publications destinées aux professeurs, une situation multiplicative est étudiée qui préserve le sens de l'opération dans le passage des entiers aux décimaux : agrandissements de figures

¹⁷⁶ Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

planes, calculs d'aires de rectangles ou utilisation d'une double graduation. Soit, et c'est le cas de tous les manuels, la technique opératoire est étudiée à partir de celle de la multiplication des entiers sans référence à une situation multiplicative.

La relation entre la multiplication et l'addition n'est vraiment questionnée que dans les activités de calcul d'aire de rectangle où la distributivité apparaît simplement. Ce n'est pas le cas avec l'activité d'agrandissement de puzzles qui tend à opposer les deux opérations. En effet, la première étape de l'enseignement consiste à écarter l'addition qui ne répond pas à la situation pour cause de déformation des pièces. Puis les élèves apprennent d'une part que pour augmenter on peut aussi multiplier, et d'autre part que dans les situations d'agrandissements de figures sans déformation c'est plutôt du côté de la multiplication qu'il faut aller chercher. Enfin, les activités se succèdent, nombres et opérations se construisent en référence à la situation d'agrandissement, le modèle additif n'est plus questionné.

Avec les programmes actuels, toutes les situations multiplicatives étudiées à l'école élémentaire ont au moins l'un des facteurs entiers. Quatre années durant, les problèmes posés avec ces situations, à l'exception des problèmes de dénombrement, auront pu trouver leur solution en référence à l'addition répétée. Dans un problème de prix, nous prenons cet exemple du fait de l'importance qu'il lui est accordé dans les manuels, le calcul de 3 kg de pommes à 12 F/kg peut être traité par une procédure additive, celui de 0,284 kg de merlan à 69,90 F/kg ne le peut pas. La situation est la même mais l'opération qui fait référence doit changer. Elle doit changer parce que les nombres ont changé. La multiplication doit remplacer l'addition mais ne saurait la faire disparaître. Nous avons donc affaire, non pas à une situation de rupture, mais à une situation de prolongement "à deux dimensions". Un prolongement des entiers aux décimaux : tous les entiers sont intégrés aux décimaux mais il y a des décimaux qui ne sont pas des entiers. Un prolongement de l'addition à la multiplication : toutes les additions répétées sont des multiplications mais il y a des multiplications qui ne sont pas des additions répétées.

L'étude de la transposition didactique de la multiplication des nombres décimaux montre des divergences entre les institutions qui en publient des propositions d'enseignement : manuels scolaires, publications à l'intention des professeurs, recherches en didactique des mathématiques. Pour préparer leurs cours, les enseignants utilisent différents matériaux publiés. Leurs choix s'effectuent en fonction de multiples composantes personnelles dont notamment leurs conceptions sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. Leur choix est aussi déterminé par des contraintes globalement partagées par tous les professeurs et qui viennent de l'exercice même du métier : ils doivent tenir compte de leurs élèves (de ce qu'ils savent déjà et des difficultés d'apprentissage connues de la notion enseignée), ils doivent aussi prévoir un enseignement qui s'intègre dans le programme de l'année scolaire. Aussi, avant d'analyser l'enseignement proposé par les professeurs que nous avons observés dans leur classe, nous allons procéder à une évaluation de ces contraintes et de leur portée sur les projets que les enseignants peuvent élaborer.

1. Introduction

2. Methodology

3. Results

4. Discussion

5. Conclusion

6. References

7. Appendix

8. Acknowledgments

9. Author Biographies

10. Index

11. Glossary

12. Notes

13. Figures

14. Tables

15. Supplementary Materials

16. Correspondence

17. Contact Information

18. Copyright

19. Disclaimer

20. Publisher's Note

21. Additional Information

22. References

CHAPITRE 4

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE À L'ÉPREUVE DE L'EXERCICE DU MÉTIER

Sommaire du chapitre 4

1. Quelles sont les difficultés d'apprentissage ?

Difficultés d'apprentissage des nombres décimaux

Difficultés d'apprentissage de la multiplication

2. Intégration de l'enseignement de la multiplication dans une progression annuelle

L'objet multiplication des décimaux dans l'ensemble du programme

L'objet multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

3. Quel projet élaborer compte tenu des contraintes ?

La technique opératoire dans le cas d'un enseignement décontextualisé

La technique opératoire enseignée à partir d'une situation multiplicative

Retour au programme : maîtrise de l'opération et durée de l'enseignement

Conclusion : les projets que les professeurs peuvent élaborer

Un projet d'enseignement pour atteindre les objectifs fixés par le programme

Elaborer un projet d'enseignement adapté aux élèves

Intégrer l'enseignement de la multiplication dans la progression annuelle

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné des propositions de différents auteurs pour enseigner la multiplication des nombres décimaux. Certaines d'entre elles sont directement adressées aux enseignants. D'autres, qui à l'origine étaient adressées aux chercheurs, ont été reprises dans des brochures pédagogiques ou dans des ouvrages de formation des professeurs. Nous avons étudié ces différentes propositions afin de reconstituer ce que pourraient être les connaissances d'un professeur fictif expérimenté qui aurait la charge d'une classe de sixième et donc celle d'enseigner la multiplication des nombres décimaux.

Ce professeur peut sembler fictif à plus d'un titre. Premièrement, le travail de recherche et de lecture de tous ces documents est certainement beaucoup trop important en regard du temps dont dispose un enseignant pour préparer ses cours, un tel travail se concevrait plutôt de la part d'un formateur qui aurait l'intention de transmettre, après s'en être approprié le contenu, l'essence de ces documents à des enseignants en formation initiale ou continue. Il n'est donc pas impossible que quelques professeurs connaissent ces publications. Deuxièmement, la lecture d'un professeur est sélective. Il recherche des outils pour préparer ses cours donc il va spontanément éliminer tout ce qui lui semblera ne pas répondre à cet objectif. Dans sa thèse, Jeanne Bolon montre que les enseignants reprennent les propositions d'activités sous certaines conditions¹⁷⁷ :

En proposant aux enseignants des suggestions, sans obligation pour eux de les employer (en totalité ou en partie), nous avons cherché à fabriquer une sorte de test d'acceptabilité : selon les cas, les enseignants (...) pouvaient être conduits à ne pas tenir compte de ces suggestions pour des raisons diverses : difficulté à comprendre les tenants et les aboutissants d'une suggestion, difficulté à l'insérer dans la progression en cours, manque de temps ou manque de sécurité pour le faire, doute sur le bien-fondé de la suggestion pour leurs élèves. Quel qu'ait pu être le motif ressenti, il permettait de faire émerger les raisons qui fondaient les choix des enseignants. Inversement, l'acceptation d'une suggestion prouvait qu'elle

¹⁷⁷ BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Paris : Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5. [pp 323-324].

était perçue comme compatible ou cohérente avec la progression adoptée et possible ou facile à mettre en œuvre immédiatement, sans surcroît de travail démesuré

Ainsi, l'auteur propose trois critères pour analyser cette sélection : la difficulté d'enseignement, l'adaptation aux élèves, et l'adaptation à la progression choisie (qui comprend la durée). Explicitons-les davantage.

Le premier critère est la difficulté d'enseignement. Un professeur a l'expérience de la classe, il connaît les projets qu'il anime facilement et ceux qui l'ont embarrassé. La difficulté vient parfois du contenu enseigné : lors d'une précédente recherche¹⁷⁸, nous avons montré, par une analyse des pratiques d'un professeur en classe, que certaines questions mathématiques plus délicates repérées *a priori* ont été l'occasion d'un travail spécifique de la part de l'enseignant durant le déroulement des séances. La difficulté peut venir aussi de l'animation requise par un projet et dont le professeur n'a pas l'habitude : travail en groupe, autonomie de la recherche des élèves, manipulations concrètes... Ces causes ne sont pas identiques pour tous les professeurs, même expérimentés. Elles dépendent à la fois de certaines conditions personnelles liées aux conceptions des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement, et d'autres qui sont moins directement liées à la discipline étudiée.

Le deuxième critère de sélection à l'œuvre en cours de lecture de documents pédagogiques est la difficulté d'apprentissage des élèves que le professeur perçoit d'une part durant l'enseignement d'une notion (par la conduite de ses élèves, les questions qu'ils posent, les réponses qu'ils produisent), et d'autre part quand il examine les productions orales ou écrites à des questions d'évaluations.

Le troisième critère de sélection d'une proposition par le professeur qui prépare ses cours, est lié à l'intégration de cette proposition dans la programmation annuelle de son enseignement. Une notion figure dans un programme officiel. Cette notion fait partie d'un ensemble que le professeur doit gérer dans sa totalité. Le temps dont il dispose pour prévoir son enseignement intervient aussi pour l'intégrer dans cet ensemble. Une analyse de type écologique¹⁷⁹ permet une étude préalable de cette intégration au niveau des contenus

L'objectif de ce chapitre est de croiser l'analyse précédente de la transposition didactique en sixième de la multiplication des nombres décimaux et les contraintes sur l'élaboration d'un projet d'enseignement que représentent l'adaptation de l'enseignement aux élèves et l'intégration dans la progression annuelle, contraintes à l'origine des deux derniers critères que nous venons de citer. Le premier critère

¹⁷⁸ RODITI E (1995), *DEA de didactique des disciplines, Didactique des mathématiques – Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques*, Cahier DIDIREM n°30, Paris : IREM de Paris 7.

¹⁷⁹ CHEVALLARD Y (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsas et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp 135–180), Grenoble : La pensée sauvage éditions

dépend de conditions personnelles des professeurs, il n'est pas utilisable pour cette analyse préalable. En revanche, nous l'utilisons dans le chapitre suivant pour interpréter les projets des professeurs que nous avons observés. Ici, nous considérons seulement des professeurs fictifs qui posséderaient une solide expérience professionnelle et qui auraient la charge d'une classe de sixième de niveau standard. Le chapitre pourrait donc s'intituler : la transposition didactique à l'épreuve de l'exercice "virtuel" du métier.

Dans le premier paragraphe, nous abordons les difficultés des élèves à travers les résultats de différentes évaluations disponibles des compétences dont l'acquisition est attendue par l'institution. Nous avons accordé une place importante à l'examen des évaluations nationales à l'entrée en sixième qui se déroulent depuis une dizaine d'années¹⁸⁰. Deux raisons expliquent ce choix. D'une part, pour notre recherche, nous bénéficions de données fiables car ces évaluations ont porté sur un effectif très important d'élèves. D'autre part, les professeurs, et en particulier ceux que nous avons observés, font passer ces évaluations à leurs élèves de sixième en début d'année, ils en recueillent les résultats, et l'institution leur recommande de les utiliser pour adapter leur enseignement aux acquis de leurs élèves. Nous avons complété parfois avec les évaluations qu'organise l'APMEP¹⁸¹ depuis 1987 qui portent aussi sur un effectif suffisant d'élèves.

Dans le deuxième paragraphe nous précisons les attentes institutionnelles concernant l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième. Des résultats ont déjà été obtenus au chapitre 2 où les programmes officiels sont utilisés. Nous les complétons par une analyse écologique de l'objet multiplication des décimaux au sein du curriculum, en primaire et au collège. Nous tentons enfin de formuler des hypothèses quant aux projets que les professeurs peuvent élaborer en tenant compte des programmes et des publications mais aussi de contraintes liées à l'exercice du métier c'est-à-dire, pour cette première approche, des difficultés d'apprentissage et de l'intégration dans une programmation annuelle.

¹⁸⁰ Les résultats de ces évaluations figurent dans des brochures éditées par le Ministère de l'Éducation nationale. Les références de ces brochures sont :

DEP (depuis 1989), *Évaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective

¹⁸¹ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Depuis 1987, cette association développe un dispositif d'observation du système d'enseignement des mathématiques, il repose en partie sur des enquêtes régulières comprenant des évaluations des compétences des élèves et des opinions et conceptions des enseignants. Pour plus de détail sur ce dispositif, on consultera par exemple :

BODIN A (1994), Un observatoire du système d'enseignement des mathématiques - La situation de l'observatoire EVAPM, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (395-402), Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

1. Quelles sont les difficultés d'apprentissage ?

Depuis 1989, le ministère de l'Education Nationale propose aux enseignants des outils d'évaluation à l'entrée en classe de sixième. Certaines des questions posées portent sur les nombres décimaux et la multiplication. Les performances des élèves à ces évaluations nationales ainsi qu'à d'autres évaluations comme celles organisées par l'APMEP révèlent certaines de leurs compétences et de leurs difficultés d'apprentissage. Les enseignants peuvent en tenir compte dans leurs préparations et dans leurs pratiques de la classe.

Pour évaluer l'influence qu'ils peuvent avoir sur l'enseignement, les résultats à ces évaluations doivent être rapportés à la taille du groupe d'élèves auquel un professeur s'adresse. Sur une classe de trente élèves, 10 % correspondent environ à trois élèves. Mais nous savons que des données statistiques ne donnent aucune indication à l'échelle d'une classe réelle, la répartition des élèves n'y est pas analogue à la répartition nationale. Ainsi, quand une erreur porte sur 10 % des élèves à l'entrée en sixième, certains professeurs peuvent n'avoir qu'un élève qui l'a commise alors que d'autres pourront en avoir une dizaine, et même plus !

Dans ce paragraphe, nous cherchons les contraintes qu'exercent les difficultés des élèves sur la préparation d'une séquence d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux dans une classe de sixième de niveau standard. Nous retiendrons donc comme pertinents les résultats qui concernent un nombre significatif d'élèves, c'est-à-dire au moins quinze pour cent. Toutefois, en classe, les professeurs que nous avons observés ont peut-être été amenés à gérer une difficulté rencontrée par un ou plusieurs élèves alors qu'elle n'apparaissait pas de manière significative dans les résultats des évaluations.

Nous allons analyser les performances des élèves qui concernent la multiplication des décimaux, y compris les prérequis nécessaires à son apprentissage. Ainsi, seront étudiées les compétences relatives aux nombres décimaux et à la multiplication tant du point de vue technique que du point de vue de sa reconnaissance dans une situation décrite par l'énoncé d'un problème. Afin de montrer certaines relations entre l'enseignement et l'apprentissage, nous proposerons, quand cela sera possible, des interprétations des erreurs des élèves en référence aux enseignements des décimaux et de la multiplication que nous avons étudiés dans le chapitre précédent.

Les questions tirées des évaluations nationales à l'entrée en sixième sont référencées par EVA6 suivi de la date de passation de l'épreuve, du numéro de l'exercice et du numéro de la question. Ces évaluations et les résultats des élèves ont été publiées par le Ministère de l'Education nationale. Les questions tirées des évaluations organisées par l'APMEP sont en général référencées par EVAPM6 suivi de la date de passation de l'épreuve, la lettre référence du questionnaire et le numéro de la question.

Difficultés d'apprentissage des nombres décimaux

Nous avons trouvé de nombreuses questions d'évaluation sur les nombres décimaux. L'analyse des propositions d'enseignement a montré l'importance de

certaines acquisitions suivant les projets qui reposent sur des conceptions différentes du nombre décimal.

Les décimaux et les rationnels

Les programmes de 1995 (*) et ses documents d'accompagnement (**) pour la classe de sixième précisent la nature de l'enseignement des fractions à l'école primaire :

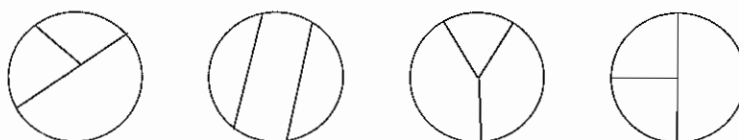
(*) A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage

(**) L'écriture fractionnaire n'est apparue que dans des exemples très simples à l'école primaire

L'existence même de ces précisions dans les programmes indique que l'institution attend des professeurs qu'ils tiennent compte des acquis des élèves sur les nombres rationnels pour élaborer leur enseignement. Quels sont ces acquis ?

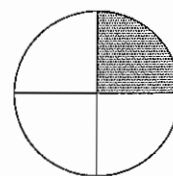
En demandant à des élèves scolarisés en classe de CM2, 6^e, 5^e ou 4^e, ce qu'ils diraient et ce qu'ils dessineraient à un camarade de CE2 pour expliquer $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ et 2,3, Marie-Jeanne Perrin¹⁸² montre que le partage de "galettes" constitue la référence majoritaire et presque unique des nombres rationnels, la deuxième étant la représentation "baguette" issue d'activités de partage ou de graduation. Elle montre aussi certaines erreurs suffisamment fréquentes pour laisser à penser qu'elles ne sont pas accidentelles.

Si de nombreux élèves partagent un disque en trois parts pour représenter un tiers, les parts ne sont pas toujours équivalentes. Partager équitablement un disque en trois parts n'est pas facile pour un jeune élève. Mais les parts sont suffisamment différentes pour qu'on puisse conclure que l'élève ne cherchait pas à obtenir des parts équivalentes. En voici quelques exemples :



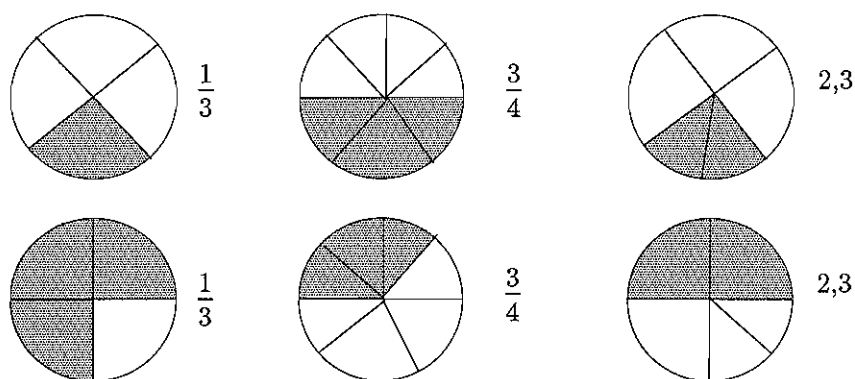
Mais nous ne devons pas en déduire que les parts resteraient différentes si le partage équitable était plus facile à réaliser

La confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ est la plus répandue. Elle ne doit pas toujours être rapprochée d'un partage en parts inégales comme le suggère le dernier partage de la figure précédente. Certains élèves expliquent : "il le coupe en demi et la moitié il la coupe en 2. Une des parties sera le tiers".



¹⁸² PERRIN M.-J. (1984), *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège*, Cahier de didactique des mathématiques n°24, Paris : IREM de Paris 7.

Une représentation comme celle qui est proposée ci-contre montre une source de confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. L'élève a colorié une part sur quatre, mais il a aussi colorié une part et en a laissé trois blanches. Nous décrivons là une confusion entre une part coloriée pour trois blanches et une part coloriée pour trois parts. C'est-à-dire une confusion entre le rapport partie / partie-complémentaire et le rapport partie / tout. On retrouve peut-être cette confusion, cumulée à celle de l'inégalité des parts, dans certaines représentations en parts de galettes que Marie-Jeanne Perrin décrit comme issues d'une "conception que l'on pourrait appeler 'juxtaposition de deux entiers' ". En voici deux exemples :



Quand les élèves représentent $\frac{3}{4}$, les partages inégaux sont plus rares. Toutefois, certains élèves se contentent de dessiner trois morceaux, éventuellement étiquetés $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ mais sans préciser le tout.

D'autres élèves confondent trois quarts et le troisième quart : un segment est partagé en quatre segments de même longueur, et le troisième segment est hachuré. Peut-être y a-t-il confusion avec les activités de graduations, l'élève ne sait plus bien si l'on mesure ou si l'on repère. A ce propos, remarquons que si en mathématiques, le tiers sert à désigner la partie d'une unité divisée en trois parties égales et se distingue du troisième, il n'en est pas ainsi dans la langue ordinaire où tiers signifie aussi troisième, comme on le trouve dans plusieurs expressions : tiers monde, se moquer du tiers comme du quart, principe du tiers exclu, un testament fait à un tiers... La confusion avec les ordinaux est toujours présente pour le cinquième, le sixième, etc. Elle trouverait son origine dans une pratique qui consiste, pour prélever un sixième d'une quantité discrète, à compter les objets un à un jusqu'à six, à écarter le sixième, et à recommencer ainsi jusqu'à épuisement de la quantité.

Les choix et les erreurs commises pour représenter $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ nous renseignent sur ce que savent les élèves des fractions : des écritures numériques à deux nombres, associées à des actions de partage et de prélèvement de parts. Les rôles respectifs du numérateur et du dénominateur dans ces actions ne sont pas toujours clairement définis.

Une question différente a été posée en 1987 dans le cadre de l'EVAPM¹⁸³ aux élèves de sixième, on leur a demandé de partager un disque représentant un gâteau en huit parts égales puis de colorier une part représentant $\frac{3}{8}$ du gâteau et une part représentant $\frac{1}{4}$ du même gâteau. 76% des élèves réussissent le partage, 71% réussissent à colorier les trois huitièmes et 45% réussissent à colorier le quart. Si l'on ramène les deux derniers pourcentages aux élèves qui ont partagé le disque en huit parts égales on obtient respectivement 93% et 59% de réussite. La chute importante du "score" indique à la fois la bonne association entre trois parts sur huit et la fraction $\frac{3}{8}$ mais aussi la difficulté de plus de quatre élèves sur dix à colorier deux parts pour représenter un quart du disque.

Dans cette même évaluation, on demandait aux élèves, sans calculatrice, de donner l'écriture décimale des fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{4}$. La réussite conjointe n'est que de 15% ce qui montre, compte tenu de la simplicité des divisions à effectuer, que l'écriture fractionnaire n'est pas, pour la plupart des élèves en fin de sixième et dans ce contexte, disponible en tant qu'écriture d'un quotient. La question "inverse" a aussi été posée, il fallait écrire sous forme d'une fraction les nombres 0,1, 0,6, 3,7 et 0,03. La réussite conjointe est de 34%, la réussite à au moins trois des quatre monte à 45%. On retrouve des erreurs mentionnées par Marie-Jeanne Perrin : $\frac{2}{5} = 2,5$, $0,03 = \frac{0}{03}$ ou $0,03 = \frac{03}{0}$...

Les décimaux et les nombres composés

Avant de rencontrer les nombres décimaux, les élèves rencontrent des "nombres composés" d'heures et de minutes, de francs et de centimes, de mètres et de centimètres par exemple. Les deux entiers qui figurent dans ces nombres sont perçus par certains élèves comme étant relativement indépendants. Cette conception rejoint celle de "juxtaposition de deux entiers" que décrit Marie-Jeanne Perrin et qui explique des erreurs dues au traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale.

Dans les écritures décimales. Comment les élèves passent-ils d'un "nombre composé" à un nombre décimal ? Dans la question [EVA6,95 Ex 2. a.], la consigne est de compléter un chèque par le montant en écriture décimale alors que le montant rédigé en toutes lettres apparaît : quarante-huit francs cinq centimes. La moitié des élèves répond 48,5 francs alors que la forme de l'exercice n'a pas dérouté les élèves (1,3% d'absence de réponse à cet exercice), les unités monétaires étant d'un usage courant

¹⁸³ APMEP-IREM de Besançon (1987), *EVALuation du Programme de Mathématiques fin de sixième*, Paris : APMEP [p. 42, 43]

Dans les calculs en ligne. Le traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale dans des calculs apparaît notamment lorsque l'opération est donnée en ligne. Ainsi, par exemple, 7,8% des élèves répondent 3,21 à la question [EVA6,95. Ex 17. b.] où il fallait calculer $7,24 - 4,3$

Dans les comparaisons. Nous avons déjà cité les travaux de Catherine Grisvard et François Léonard sur les règles utilisées par certains élèves dans la comparaison des nombres décimaux positifs. Dans la question [EVA6,91. Ex 19. c.] les élèves devaient compléter l'inégalité $6,23 > \dots$ en choisissant un nombre parmi 6,4, 31,7, 53, 6,13, 31,07 et 65,2. Ces nombres avaient déjà servi pour des consignes analogues dans les questions a. et b. Alors que la valeur 6,13 est proposée et non 6,137 qui aurait été moins attractive, 14,1% des élèves répondent 6,4. Et parmi ceux qui répondent 6,13, combien aurait pu aussi bien écrire 6,4 ?

Les décimaux, abscisses de points de la droite graduée

Nous avons vu qu'une approche des nombres décimaux consiste à partager, sur une droite numérique, l'unité en dix parties égales repérées par 0,1, 0,2, ..., en reliant éventuellement la démarche à la conception du système métrique. Cette méthode facilite les comparaisons pour les élèves qui savent placer un nombre sur la droite numérique. Elle produit aussi, en phase d'apprentissage, certaines erreurs dont voici un exemple.

Dans les questions [EVA6,95. Ex 23. a. b.] les élèves devaient associer un nombre à une flèche pointant sur une marque de graduation d'une droite graduée en dixièmes où les nombres 0, 1 et 2 étaient indiqués. Un exemple leur était fourni : 0,4. Deux associations étaient demandées : 0,8 et 1,6. Les élèves ont trouvé 0,8 à 93,9% mais 1,6 à 76,8%. Certains ont compté 0,8, 0,9, 0,10, 0,11, ... et ils ont proposé 0,16 au lieu de 1,6. D'autres ont compté à partir de 2, l'entier le plus proche, mais ils n'ont pas inversé l'ordre et ils ont proposé 2,4

Les décimaux et l'écriture décimale

Quand l'accent est mis sur l'écriture, le nombre décimal est décrit par une forme. Elle est constituée de chiffres, le chiffre des unités est identifié par la virgule qui le suit et l'on repère alors les autres chiffres : le chiffre des centaines, des dizaines, des dixièmes, des centièmes, etc. Les élèves doivent alors gérer un vocabulaire complexe et une virgule mobile. Le vocabulaire est complexe : ils sont nombreux à confondre dizaine et dixièmes, un dixième cardinal et le dixième ordinal, à écrire dizième ou diziaine... Quant à la virgule, elle n'est pas toujours associée au repérage du chiffre des unités mais souvent à un séparateur de la partie entière et de la partie décimale. Cela renforce la conception "*juxtaposition de deux entiers*". Et la virgule est mobile dans certaines formulations de règles... Cette complexité pose des difficultés, en voici quelques exemples.

♦ *Le vocabulaire.* La complexité du vocabulaire entraîne des erreurs, dans les questions [EVA6,91. Ex 18. a. à d.], les élèves devaient :

– a. écrire le chiffre des centaines de 127,753. Ils sont 16% à répondre 7, négligent-ils la virgule, confondent-ils dixième et centième ou sont-ils induits en

erreur par la lecture orale du nombre ? Ils sont 3,4% à répondre 5 ce qui semble correspondre à une confusion entre centaine et centième ;

– b. écrire le chiffre des dixièmes de 180,254. Ils sont alors 26,6% à répondre 5 (le chiffre des dizaines de la partie décimale) et 12% à répondre 8 ;

– c. compléter la phrase “ Dans le nombre 13,456 le chiffre 4 est celui des...”
Ils répondent correctement pour 42,2% d'entre eux et 21,0% répondent centaines.

♦ *La gestion de la virgule.* Parler de gestion de la place de la virgule peut sembler mathématiquement réducteur, néanmoins de nombreuses règles de calcul sont formulées en deux parties, la première en considérant les nombres entiers obtenus en supprimant la virgule et la seconde en plaçant la virgule au résultat.

Pour l'addition ou la soustraction de deux décimaux, on place les nombres en disposant les virgules les unes sous les autres, on effectue l'opération sans tenir compte des virgules puis on place la virgule au résultat sous les autres virgules. A condition de ne pas l'oublier... Dans la question [EVA6,97. Ex 15. c.] les élèves devaient effectuer l'addition posée $168,75 + 42,50$. Ils sont 10,7% à trouver les bons chiffres de la somme mais à oublier (à ne pas écrire) la virgule ou à ne pas bien la placer.

Pour la multiplication de deux décimaux, on effectue le calcul sans tenir compte de la virgule, on obtient le produit cherché en plaçant correctement la virgule. Il peut y avoir confusion avec la méthode décrite pour l'addition quand les deux facteurs sont disposés comme dans une addition. Ainsi, la consigne de [EVA6,91 Ex 23. b.] était d'effectuer la multiplication posée $11,4 \times 5,3$ et les virgules étaient disposées l'une sous l'autre. Après avoir obtenu les bons chiffres du produit, les élèves oublient (n'écrivent pas) la virgule pour 14% d'entre eux et ne la placent pas correctement pour 7,1% d'entre eux. Soit au total plus d'un élève sur cinq. Mais la virgule n'est pas la seule cause des erreurs des élèves, nous y reviendrons plus précisément à propos des difficultés d'apprentissage relatives à la multiplication des décimaux.

Les décimaux et les ordres de grandeur

Les élèves savent-ils donner l'entier le plus proche d'un nombre décimal donné ? La question [EVAPM6,87 B 17.] propose trois nombres décimaux “ donnés par la calculatrice ” (c'est affirmé par l'énoncé) et demande d'écrire à côté de chacun d'eux, l'arrondi à l'unité la plus proche. Un exemple est fourni : 36,859 réponse : 37. Les trois nombres donnés sont 123,45, 3,95459 et 0,23456. En fin de sixième, 24% répondent correctement pour les trois nombres, 46% pour deux des trois.

D'autres évaluations ont proposé d'inscrire cette question d'approximation dans un contexte de calcul. Voyons par exemple [EVA6,94 Ex 15. 1) 2)] :

Tu feras cet exercice sans poser d'opération

1) Martine affirme que : “ $72 \times 1,9$ est proche de 140. ”

Es-tu d'accord avec Martine ou non ? Explique pourquoi.

2) Une classe de collège compte en moyenne 25 élèves. Le nombre d'élèves dans un collège de 21 classes est proche de : 300 400 500

a. Entoure la réponse qui te semble la plus proche du résultat.

b Explique ton choix.

Les résultats permettent de comparer l'utilisation des approximations suivant que les nombres sont décimaux ou entiers. A la première question, 32% des élèves répondent "oui" (c'est-à-dire la bonne réponse) avec ou sans explication. A la seconde question 44,7% des élèves entourent 500 (c'est-à-dire la bonne réponse) avec ou sans explication. La performance des élèves montre que la détermination d'approximations par des entiers n'est pas acquise à l'entrée en sixième mais aussi qu'elle est plus difficile quand elle porte sur des nombres décimaux plutôt que sur des nombres naturels.

Les décimaux et les grandeurs usuelles

Nous avons vu que de nombreux exercices qui portent sur la multiplication de nombres décimaux sont issus de situations d'isomorphisme de grandeurs, les décimaux sont alors des mesures de ces grandeurs, une unité étant choisie. Mais les élèves disposent-ils de quelques références de mesures de grandeurs usuelles ? C'est la question posée par [EVA6,93 Ex 3] :

Pour chaque phrase, entoure la bonne réponse.

a) La surface d'un timbre-poste ordinaire mesure :

5 mm² – 5 cm² – 5 dm² – 5 m²

b) Un pot de yaourt individuel contient :

2,5 ml – 12,5 cl – 12,5 dl – 12,5 l

c) Le diamètre d'une roue de vélo d'adulte est :

10 mm – 50 mm – 150 mm – 700 mm

d) Un œuf de poule pèse environ :

0,65 g – 6,5 g – 65 g – 650 g

Les pourcentages de bonnes réponses à ces questions sont respectivement : 43,0%, 66,8%, 47,3% et 36,6%. Ainsi, à l'entrée en sixième, dans le contexte de questions scolaires¹⁸⁴, un élève sur deux ne possède aucun moyen de contrôle de la pertinence des données de l'énoncé ou de la réponse qu'il produit à un problème qui porte sur ces grandeurs usuelles.

Conclusion : une maîtrise encore insuffisante du nombre décimal

Les élèves abordent les nombres décimaux à l'école primaire, ils en voient différents aspects. Chaque aspect doit contribuer à ce que les élèves comprennent le sens des décimaux et à ce qu'ils puissent mobiliser certaines techniques liées à la numération et aux opérations. Les performances des élèves à différentes évaluations montrent que les nombres entiers sont bien mieux acquis que les nombres décimaux. Les élèves ont des difficultés pour approcher un décimal par un entier, que la question soit posée ou non en référence à une situation. A la fin de l'école primaire, les nombres décimaux restent, pour certains élèves, deux entiers séparés par une virgule, ces entiers ayant éventuellement des statuts différents

¹⁸⁴ Nous précisons l'importance du contexte scolaire car, en dehors de la classe, les enfants trouveraient peut-être d'autres manières de contrôler leurs réponses

Les pourcentages d'erreurs qui correspondent à cette conception varient entre 10 % et 50 % suivant les questions posées.

Ces résultats montrent que les professeurs ne peuvent envisager d'enseigner la multiplication des décimaux en s'appuyant sur la notion de nombre décimal avec seulement les connaissances des élèves à l'entrée en sixième. Les deux ingénieries didactiques de construction des décimaux sont des exemples d'enseignement qui ne peuvent être repris sans que cette notion soit travaillée. Comment les professeurs de sixième pourraient-ils prendre en compte cette réalité quand ils préparent leurs cours sur la multiplication des décimaux ? Nous tenterons de répondre à cette question après avoir, comme nous venons de le faire pour les nombres décimaux, montré quelles sont les compétences des élèves sur la multiplication.

Difficultés d'apprentissage de la multiplication

L'analyse des propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux a montré que nombre d'entre elles qui figurent dans les manuels scolaires s'appuient sur la multiplication de deux entiers et sur la multiplication d'un entier par une puissance de dix. Après avoir examiné ces deux cas particuliers, nous étudions les résultats concernant la multiplication de deux décimaux. Nous cherchons à déterminer des démarches qui traduisent des difficultés d'apprentissage et dont les professeurs tiennent sans doute compte lorsqu'ils préparent leurs cours. Puis nous analysons les performances des élèves quant à la résolution de problèmes multiplicatifs.

Technique de la multiplication de nombres entiers

On pourrait penser *a priori* que les décalages et la présence de zéros au multiplicateur sont les causes des erreurs les plus fréquentes des élèves. En fait les évaluations montrent que la première des difficultés des élèves est la méconnaissance des tables de multiplications, surtout celles de six à neuf. Voyons quelques exemples pour lesquels nous présentons, dans l'ordre, le questionnaire et l'année de passation de l'évaluation, la question, le pourcentage de réussite et des remarques complémentaires éventuelles.

• IREM & CRDP, 78¹⁸⁵

312×24	Réussite : 81,5 %	543×26	Réussite : 71,0 %
236×403	Réussite : 57,4 %		

• EVA6,92

231×305	Réussite : 77,8 % ; décalage correct mais erreurs de calcul : 9,1 % ; pas de décalage avec ou sans erreur de calcul : 4,6 %
------------------	--

¹⁸⁵ L'académie de Haute Corse, associée à l'IREM de Nice, a publié en 1981 une brochure sur le nombre décimal. Elle contient une enquête qui a été réalisée en 1978, elle a porté sur 303 élèves de sixième. Parmi les questions posées, figurent dix multiplications de difficulté variable.

IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal*, Bastia : CDDP de la Haute Corse

- EVA6,93

452×107 Réussite : 68,3 % ; décalage correct mais erreurs de calcul : 15,6 % ;
pas de décalage avec ou sans erreur de calcul 3,2 %

- EVA6,91

759×109 Réussite : 51 % ; décalage correct avec erreurs de calcul : 29,3 % ;
décalage faux avec ou sans erreur de calcul : 2,9 %

420×30 Réussite : 75,3 % ; erreur de zéro : 9,9 %

L'enquête menée par l'académie de Haute Corse et l'IREM de Nice montre la décroissance de la performance des élèves quand on passe d'une multiplication sans retenue à une multiplication avec retenue (81,5 % à 71,0 %) et quand on passe d'une multiplication avec retenue sans zéro intercalé au multiplicateur à une multiplication avec retenue et un zéro intercalé au multiplicateur (71,0 % à 57,4 %)

Les trois premières multiplications citées à partir des évaluations nationales à l'entrée en sixième montrent aussi l'importance de la méconnaissance de certains produits de la table de multiplication parmi les causes des difficultés des élèves. Ces multiplications sont comparables du point de vue technique : elles contiennent des retenues, elles portent sur deux facteurs à trois chiffres avec un zéro intercalé comme deuxième chiffre du multiplicateur. Mais dans la première, les facteurs ne comportent pas de chiffre "supérieur" à 5, dans la deuxième, un des facteurs en contient un, et dans la troisième, les deux facteurs en contiennent. L'augmentation des erreurs de calcul est sensible : elles sont respectivement de 9,1 %, 15,6 % et 29,3 % parmi les élèves qui décalent correctement les produits partiels.

Néanmoins, les erreurs dues à la présence d'un zéro au chiffre des unités du multiplicateur ne sont pas à négliger, comme le montrent les 9,9 % d'erreurs à la multiplication 420×30 .

Les multiplications par 10, 100, 1 000 .

Deux raisons pour étudier ces multiplications par 10, 100 ou 1 000 . D'une part, elles forment un cas particulier des multiplications d'un décimal par un entier qui sont enseignées à l'école primaire et, d'autre part, elles sont utilisées dans de nombreuses propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux : pour calculer $3,2 \times 5,17$, on calcule 32×517 (ce qui revient à multiplier respectivement par 10 et par 100 les deux facteurs) puis on divise le produit par 1 000 (pour compenser les deux multiplications).

Nous remarquons des difficultés des élèves qui sont liées à celles qu'ils éprouvent avec les nombres décimaux et plus exactement avec l'écriture décimale. Ils apprennent à l'école primaire que, par une multiplication par 10, le chiffre des unités du multiplicande devient le chiffre des dizaines du produit ou que la virgule est décalée d'un cran vers la droite. Soit on retrouve les difficultés liées à la complexité du vocabulaire, soit les élèves décalent indistinctement vers la gauche ou vers la droite, soit encore ils sont gênés quand la virgule "disparaît". Et l'on trouve aussi des traces de règles apprises pour multiplier un nombre entier par 10,

certaines élèves "ajoutent" des zéros à l'écriture du multiplicande. Voyons en quelques exemples issus des évaluations.

– *Multiplications par 10*

- EVA6,91 et 95 63×10
Réussite 94,3 % en 1991 et 91,5 % en 1995
- EVA6,92 $38,45 \times 10$
Réussite 60 %
- EVA6,94 $2,3 \times 10$
Réussite 77,4 %, 10,4 % répondent 20,3 ou 2,30 et 6,3 % répondent 230.

On remarque que la technique de multiplication d'un entier par 10 est mieux acquise que celle d'un décimal. Le dernier exercice montre que plus de 15 % des élèves appliquent "comme ils peuvent" la technique qu'ils connaissent le mieux pour multiplier un décimal.

– *Multiplications par 100 ou 1 000*

- EVA6,95 $7,14 \times 100$
Réussite 63,3 %, des élèves utilisent une règle analogue à celle qui concerne les entiers : 9,9 % répondent 7,1400, 4,5 % répondent 700,14 ou 700,1400, enfin 7,8 % effectuent un mauvais déplacement de virgule.
- EVA6,92 $27,1 \times 100$ Réussite 47,3%
- EVA6,94 $35,2 \times 100$
Réussite 59,5%, 9,7% répondent 3500,2 ou 35,200 et 15,7% répondent 352.

Même constatation que pour la multiplication par 10 : la technique de multiplication d'un entier par 100 est mieux acquise que celle d'un décimal. On remarque aussi que près d'un élève sur 6 est en difficulté quand, pour effectuer $35,2 \times 100$, il a décalé la virgule d'un rang, que la virgule disparaît et qu'il devrait la décaler d'un autre rang vers la droite c'est-à-dire ajouter un zéro. L'enchevêtrement des techniques semble à l'origine de ces erreurs.

Les multiplications par 1 000 conduisent aux mêmes constatations, avec une chute des résultats quand l'élève doit supprimer la virgule et ajouter des zéros : seulement 48,0% d'entre eux réussissent à effectuer $18,7 \times 1000$ (EVA6,92).

Les divisions par 10, 100, 1 000...

Comme nous venons de le rappeler, ces divisions d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000 sont utiles pour certains enseignements de la multiplication des nombres décimaux. En outre, elles sont à rapprocher de la multiplication par une puissance entière négative de dix.

– *Divisions par 10*

- EVA6,95 $630 \div 10$ Réussite 81,4%
- EVAPM6,89 $287 \div 10$ Réussite 80%

• EVA6,91	$325,6 \div 10$ Réussite 62,1%	• EVA6,92	$38,45 \div 10$ Réussite 63,8%
• EVA6,93	$0,1034 \div 10$ Réussite 30,5%		

Les performances des élèves montrent que la division d'un nombre entier par 10 est mieux acquise que celle d'un décimal, et ceci que le chiffre des unités soit zéro ou non. Les réussites chutent de plus de 15% en passant d'un entier à un décimal lorsque ce dernier comporte au moins deux chiffres à la partie entière, c'est-à-dire lorsqu'un simple décalage de virgule est possible. Les résultats chutent de plus de 30% lorsque la partie entière est nulle.

– *Divisions par 100 ou 1 000*

• EVA6,95	$67 \div 100$ Réussite 53,9%	• EVA6,93	$8006 \div 100$ Réussite 42,5%
• EVA6,92	$27,1 \div 100$ Réussite 47,7%	• EVA6,94	$936,7 \div 100$ Réussite 53,6%

Les performances des élèves indiquent que la division par 100 est plus difficile que la division par 10. Que le diviseur soit entier ou non ne semble pas influencer les résultats. En revanche, la division par 1 000 quand il y a plus d'un zéro à "ajouter" à gauche fait chuter les scores :

• EVA6,95	$3000,6 \div 1000$ Réussite 47,3%	• EVA6,92	$18,7 \div 1000$ Réussite 37,0%
-----------	--------------------------------------	-----------	------------------------------------

Les multiplications de deux décimaux

Le fait que le changement de programme, qui a fait passer la multiplication de deux décimaux de CM2 en 6e, soit récent nous permet d'avoir des résultats d'évaluations de la multiplication d'un décimal par un entier mais aussi de deux décimaux à l'entrée en sixième.

Parmi les résultats aux multiplications de décimaux, il faut différencier les opérations données en lignes de celles qui sont posées car, comme le fait remarquer l'équipe de l'APMEP chargée de la rédaction de la brochure EVAPM 6e 1987, "La lecture non-courante des nombres crée des erreurs de copie quand une opération est proposée en ligne et qu'elle doit être effectuée en colonne"

♦ *Opérations données en ligne*

• IREM-CDDP,78 ¹⁸⁶		
$543 \times 0,12$	$17,9 \times 32$	$1246 \times 2,5$
Réussite 64,4 %	Réussite 61,1 %	Réussite 62,7 %
$2,6 \times 0,25$	$912,4 \times 5,123$	$37,35 \times 2,34$
Réussite 47,2 %	Réussite 43,6 %	Réussite 42,9 %

¹⁸⁶ IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal*, Bastia : CDDP de la Haute Corse.

	86,34 × 340	Réussite 34,7 %
• EVAPM6,87	54,15 × 3,02 Réussite 57%	73,9 × 60,2 Réussite 55%
• EVAPM6,89	40,75 × 6,20	Réussite 51%
♦ Opérations posées		
• EVA6,91	11,4 × 5,3 Réussite 58%, chiffres exacts mais faute de virgule 21,1% ¹⁸⁷	
• EVA6,92	7,46 × 3,1 Réussite 52%, chiffres exacts mais faute de virgule 20,1%	
• EVA6,94	63,4 × 2,12 Réussite 49,6%, chiffres exacts mais faute de virgule 21,2%	

L'examen des performances des élèves montre que les causes d'erreurs sont variées. Il semble que – à une exception près – si l'on fixe la difficulté liée au choix des chiffres des facteurs, la performance des élèves baisse quand on passe de la multiplication de deux entiers à celle d'un décimal par un entier puis à celle de deux décimaux où les fautes de virgule avoisinent 20% ; l'exception est le cas où l'entier multiplicateur a le chiffre zéro pour chiffre des unités

Comment les élèves se trompent-ils au moment de placer la virgule du produit ? Il y a ceux qui l'oublient ou qui ne l'écrivent pas parce qu'ils ne sont pas sûrs de sa place. Certains comptent le nombre de décimales mais placent la virgule au produit en comptant les chiffres de gauche à droite et non de droite à gauche. Des élèves alignent les chiffres (les unités sous les unités ...) quand ils posent la multiplication et placent la virgule comme s'il s'agissait d'une addition ; on remarquera que cette disposition des chiffres est inévitable lorsque les facteurs ont le même nombre de décimales et qu'on termine toujours une multiplication par une addition, celle des produits partiels. Lorsque les deux facteurs n'ont pas le même nombre de décimales, notamment lorsque le multiplicateur en a une de plus que le multiplicande, certains élèves, comme dans une addition, complètent mentalement par un zéro pour obtenir le même nombre de décimales, calculent avec ce zéro mais ne le comptabilisent pas au moment de placer la virgule¹⁸⁸ :

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \times \\
 \hline
 \\
 \\
 \\
 \\
 \hline
 1 \\
 1 \\
 \hline
 1 \\
 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

¹⁸⁷ Tous les pourcentages se réfèrent à l'effectif total des élèves

¹⁸⁸ Nous avons souligné le zéro qui n'est pas écrit par l'élève mais dont il tient compte pour calculer

Les évaluations ci-dessus permettent encore de montrer que s'il n'apparaît pas, dans l'utilisation des tables de multiplication, deux facteurs supérieurs à 5, alors la " taille " des chiffres ne contribue pas aux erreurs des élèves. Le fait que le multiplicande et le multiplicateur aient ou non le même nombre de décimales (à condition qu'ils en aient) ne contribue pas non plus à une variation des performances des élèves. Ni encore le fait que le multiplicateur soit inférieur à 1.

Tous ces résultats contribuent à expliquer le changement de programme : la multiplication de deux décimaux pose des difficultés techniques aux élèves pour le calcul du produit, en particulier la gestion de la virgule, difficultés qui surgissent notamment lorsqu'on passe de la multiplication d'un décimal par un entier à celle de deux décimaux.

Les problèmes issus de situations multiplicatives

Pour terminer cette approche des difficultés des élèves, nous allons examiner celles qu'ils rencontrent pour résoudre un problème issu d'une situation multiplicative. Afin de ne pas entrer dans une étude d'autres difficultés, nous nous restreindrons aux problèmes que l'on peut résoudre en effectuant une et une seule opération : une multiplication. En classe, les élèves rencontrent aussi des problèmes de complexité plus grande.

- ♦ *Produit de deux entiers ou d'un décimal par un entier*

- EVA6,91 & 95 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

A la récréation de 10 heures, 83 petits pains ont été vendus par un groupe de 4 élèves. Chaque petit pain a été vendu 3F. Quel est le montant de cette vente ?

en 91 Réussite 81,2%, utilisation d'une donnée parasite : 3,4%

en 95 Réussite 75,9%, utilisation d'une donnée parasite : 13,1%

- EVA6,95 & 97 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

Un carton d'eau minérale contient 6 bouteilles de 1,5 litre

Le magasinier range 25 de ces cartons sur son rayon.

Indique par une croix l'opération qui convient pour trouver le nombre de bouteilles rangées

$25+6$	25×6	$1,5 \times 6$	$25-6$	$25 \times 1,5$	$6-1,5$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

en 95 Réussite 77,6%, réponse faisant intervenir 1,5 : 16,6%

en 97 Réussite 80,2%, réponse faisant intervenir 1,5 : 15,0%

- EVA6,92 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

On achète 7,20 m de fil électrique à 4 F le mètre.

Combien a-t-on payé ?

Réussite 69,4% Traitement séparé partie entière / partie décimale (28,20) : 2,8 %

• EVA6,94 (addition répétée)

Entoure l'opération qui permet de calculer la distance de A à B dans chacun des cas suivants :

	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->	<-2,7->
A								B
	$2,7 \div 9$		$9 : 2,7$		$9 - 2,7$			
	$2,7 \times 10$		$2,7 \times 9$		$2,7 - 9$			

Réussite 76,4 %

• EVAPM6, 97 (en fin de sixième, situation d'isomorphisme de grandeurs)

Un ticket de cantine coûte 14,75 F.

Quel est le prix d'un carnet de 10 tickets ?

Réussite 82 %. Et 7 % des élèves répondent 140,75 F

Ces exemples montrent une bonne reconnaissance du modèle multiplicatif dans le cas d'une situation d'isomorphisme de grandeurs où l'une d'entre elles a pour valeur un nombre entier. Toutes ces situations sont interprétables avec le modèle de l'addition répétée. Voyons quelques résultats qui concernent le calcul de l'aire d'un rectangle, pour les autres situations multiplicatives, nous ne disposons pas de sources issues des évaluations nationales déjà citées. Nous interprétons cette absence comme le témoignage du fait que l'institution scolaire privilégie, dans l'enseignement, les situations d'isomorphisme de grandeur et de calcul d'aire de rectangles.

• EVA6,93 (aire d'un rectangle)

Un terrain a la forme d'un rectangle. Les dimensions sont

longueur : 60 m

largeur : 40 m

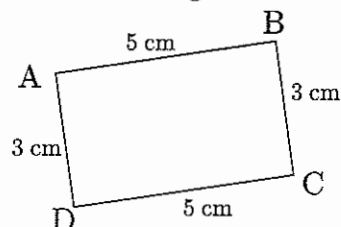
Quelle est l'aire de ce terrain ?

Réussite (réponse 2 400 m² ou 2 400) : 38,5%

Erreur d'unité de mesure (2 400 m) : 4,6%

• EVA6,95 & 97 (aire d'un rectangle)

Voici le rectangle ABCD



L'aire du rectangle est ... cm²

en 95 Réussite 29%, confusion avec le périmètre (réponse 16) : 35,4%

en 97 Réussite 27,3%, confusion avec le périmètre (réponse 16) : 34%

Ces deux exercices montrent que l'association entre l'aire du rectangle et la multiplication des côtés n'est acquise que par un tiers environ des élèves à l'entrée

en sixième. La confusion avec le périmètre existe, elle est renforcée dans le second exercice où les quatre mesures sont indiquées, ce que certains élèves interprètent peut-être comme une invitation à les utiliser toutes. La faiblesse de ces résultats laisse à penser que le choix d'activités de calculs de l'aire de rectangles pour faire travailler les élèves sur la multiplication se heurte à l'importance de la durée nécessaire à l'acquisition de la notion d'aire. Les enseignants privilégieraient alors (comme les manuels) les situations d'isomorphisme de grandeurs et d'addition répétée.

♦ *Produit de deux décimaux, reconnaissance du modèle*

Pour en terminer avec les difficultés d'apprentissage de la multiplication, abordons un point particulièrement important pour notre recherche : la reconnaissance du modèle multiplicatif d'un problème lorsque les données sont décimales. Nous ne disposons, hélas, que d'un exercice d'évaluation de la résolution de problèmes conduisant à une multiplication de deux décimaux.

• EVA6,93 (repris d'une évaluation de 1980, *isomorphisme de grandeurs*)

J'achète 3,70 m de tissus à 9,50 F le mètre.

Combien dois-je payer ?

en 93 Réussite 35,2%, recours à une démarche multiplicative : 80,5%

en 80 Réussite 45,5%, recours à une démarche multiplicative : 77,5%

Ces chiffres montrent un écart important entre le recours à la bonne démarche et l'obtention du résultat attendu. Les élèves identifient-ils la structure multiplicative même s'ils ne savent pas effectuer la multiplication ? C'est le cas de ceux qui, en 1993 (1980) apparaissent dans les 80,5% (77,5%) des élèves qui recourent à une démarche multiplicative et qui n'apparaissent pas dans les 35,2% (45,5%) qui réussissent le problème. Remarquons, sur cet exemple, une évolution qui peut sembler paradoxale : de 1980 à 1993 la reconnaissance du modèle multiplicatif progresse de 3% alors que la réussite au problème baisse de plus de 10%. En 1993, les élèves calculeraient plus mal qu'en 1980 mais cette baisse n'aurait pas d'influence sur la reconnaissance du modèle multiplicatif. Ces résultats, trop partiels pour qu'on puisse en tirer des généralités posent tout de même une question : la compétence technique contribue-t-elle ou non à la reconnaissance de la situation ? Cette indépendance entre l'habileté technique et la reconnaissance du modèle a été étudiée, en particulier par l'APMEP¹⁸⁹ :

On peut penser, et cela est souvent affirmé dans le public, que la maîtrise des techniques opératoires classiques est une condition nécessaire à la maîtrise des situations de problèmes du domaine numérique. En fait toutes les études de dépendances et de corrélation conduisent à infirmer fortement cette idée

¹⁸⁹ APMEP (1991), *Évaluation du programme de mathématiques – Sixième 1989 – Cinquième 1990*, Paris : APMEP. [p. 48].

La place manque pour développer cette question. Nous donnerons simplement deux exemples en insistant sur le fait qu'ils sont généralisables :

- Les réussites aux items C25 (effectuation d'un produit) et P32 (résolution d'un problème multiplicatif) sont indépendantes.

Rappelons que cela signifie qu'un élève qui a réussi C25 n'a pas plus de chance de réussir P32 qu'un élève qui aurait échoué à C25.

- Les réussites aux items C25 (effectuation d'un produit) et C29 (produit d'un nombre par une fraction) sont indépendantes. Ce dernier point tend à montrer que la dépendance n'est même pas assurée lorsqu'on passe d'un type d'algorithme à un autre

L'institution pose les mêmes questions ¹⁹⁰ :

D'un point de vue utilitaire, on peut se demander si une bonne capacité à effectuer des calculs par écrit est un objectif important aujourd'hui, alors que l'on a toujours une machine à portée de main. Dans ces conditions, il peut apparaître que les connaissances vraiment utiles aujourd'hui soient d'une part le sens des opérations à effectuer, d'autre part le contrôle des ordres de grandeur par du calcul mental approché.

Pourtant, l'indépendance entre la reconnaissance du modèle et l'habileté opératoire ne semble pas si claire. Les recherches, plus récentes que celles de l'APMEP, menées par Denis Butlen & Monique Pézard ¹⁹¹ sur les rapports entre l'habileté calculatoire et la "prise de sens" dans la résolution de problème ont donné des résultats plus nuancés. Une amélioration de la résolution de problèmes numériques est parfois obtenue par une meilleure habileté calculatoire, cela dépend de la structure des problèmes – additive ou multiplicative –, de la complexité du problème et du type de résolution demandée – orale ou écrite. En ce qui concerne la multiplication, citons leurs conclusions ¹⁹² :

Essayons de mesurer l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution *mentale* de problèmes en fonction du degré de complexité du problème posé. (.)

En conclusion, nous allons essayer de préciser l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution *écrite* de problèmes selon le degré de complexité de la structure sous-jacente. (..)

Un entraînement régulier au calcul mental semble donc avoir un impact positif lors de la résolution écrite d'une certaine catégorie de problèmes : ceux-ci doivent être relativement familiers aux élèves sans

¹⁹⁰ DEP (1996), *Évaluation CE2 – 6ème, Résultats nationaux Septembre 1995*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective. [p. 149].

¹⁹¹ BUTLEN D & PEZARD M (1996), *Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire*, Cahier de DIDIREM n°27, Paris : IREM de Paris 7.

¹⁹² *Ibid.* [pp 23 et 30-31].

toutefois l'être trop ; leur degré de complexité ne doit être ni trop faible ni trop fort.

La nature des erreurs concernées par cet impact dépend du degré de complexité du problème : quand la structure est simple, ce sont les erreurs de calcul et de données ; quand la structure est plus complexe, l'impact porte sur tous les types d'erreurs. Il ne porte sur la reconnaissance du modèle que dans les cas des structures additives complexes lorsque la passation s'inscrit dans une pratique régulière de calcul mental.

Citons enfin, pour illustrer des difficultés de reconnaissance du modèle multiplicatif, l'expérience avec un groupe d'élèves instituteurs (de formation Bac +3, c'est-à-dire correspondant actuellement à des étudiants en première année d'IUFM préparant le concours de Professeur des Ecoles) réalisée par Marie-Alix Girodet¹⁹³ :

Nous avons demandé, au cours d'une tâche où il s'agissait de vérifier la facture ci-après, de lire les données, puis de contrôler le prix à payer en calculant mentalement un ordre de grandeur puis en donnant le résultat exact à l'aide d'une calculatrice.

BOEUF MERLAN		
		CODE 135
SATISFAIT OU REMBOURSÉ		
A consommer avant le		
		22 fev 86
Prix Unitaire	Poids net	Prix à payer
69,90 F/kg	0,284 kg	19,85 F
<hr/>		
EMB 92800 La Défense		

Tous ont lu sans difficulté la somme à payer : 19 francs 85, et le prix au kilo : 69 francs 90 centimes ou 6 990 (anciens) francs ; et les deux tiers ont bien lu 284 grammes. Mais le savoir "social" peut ici assister la compétence en calcul : quand on achète de la viande chez un boucher et que l'on paye environ 20 francs, on sait bien qu'il ne peut s'agir que de grammes. Certains ont d'ailleurs évoqué leur véritable expérience en remarquant qu'ils n'achètent jamais de viande à un prix aussi élevé.

Un seul sujet réussit la tâche en totalité, effectuer une vérification par un ordre de grandeur puis calculer exactement le prix et noter l'arrondi effectué, la calculatrice affichant 19,8516. Quatre arrivent à en réaliser une partie.

Deux élèves instituteurs sur trois sont en difficulté :

"Alors un kilo donc mille grammes coûte 69 francs 90. Euh ! alors je vais avoir 1000 divisé par 284, je vais voir combien cela fait

¹⁹³ GIRODET M.-A. (1996), *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes des calculs*, Paris : CREDIF ENS de Fontenay-St Cloud DIDIER

- Prenez la calculatrice
- Alors pour voir si le prix est exact je divise 69,90 par 3,52 ($1000 \div 284 = 3,52$) et je trouve 19 francs 90. ”
- “ Euh ! on peut faire deux choses 0,284, je sais qu'il faut diviser ou multiplier. Elle tape sur la calculatrice $0,284 \times 19,85 =$ et reste saisie du résultat affiché (5,6374). Elle recommence en tapant sur la calculatrice $284 \times 19,85 = 5\,637,4$ Elle semble encore plus étonnée
- Vous ne croyez pas que vous faites quelque chose qui ne va pas ?
- Si, si, c'est clair Euh ! pourtant, je l'ai fait cela, en plus. Pourquoi je ne comprends plus ! ”

Les difficultés rencontrées par ces étudiants montrent qu'ils ne mettent pas en fonctionnement la structure multiplicative de ce problème de prix. Ils l'auraient certainement mieux reconnue si le poids net avait été de 3 kg, ce qui laisse à penser que le prolongement aux valeurs décimales n'est pas facile. Surtout, comme c'est le cas ici, lorsque le décimal choisi est inférieur à 1, ce qui donne un prix à payer inférieur au prix initial et ce qui peut induire un calcul par division ou par soustraction. Comme le fait remarquer l'auteur, la bonne lecture des données ne témoigne pas nécessairement d'une bonne lecture des décimaux qui peuvent être perçus comme une variante d'écriture des nombres entiers. Le prolongement de la situation à des valeurs décimales ne suffirait pas à faire acquérir le prolongement de l'opération à des valeurs décimales notamment quand le multiplicateur est inférieur à 1. Cela explique sans doute la perplexité de l'étudiant : “ *Pourquoi je ne comprends plus !* ”.

Conclusion : des difficultés qui portent sur la technique et sur le sens

La multiplication de deux nombres entiers est effectuée avec succès par environ trois élèves sur quatre, cette proportion étant modulée suivant le choix de certaines variables comme la présence d'un zéro au multiplicateur ou la nécessité d'utiliser un produit de deux facteurs supérieurs à cinq de la table de multiplication. Nous avons retrouvé approximativement cette proportion pour la multiplication d'un décimal par un entier ou pour la division par dix d'un nombre entier compris entre cent et mille alors que le résultat est un nombre décimal.

Les questions qui portent sur des multiplications de deux décimaux ne sont réussies que par 35 % à 55 % des élèves. Les compétences techniques sont donc moins bien acquises avec les nombres décimaux. Ces résultats pourraient surprendre quiconque limiterait ce prolongement de la multiplication d'un décimal par un entier à la multiplication de deux décimaux à une affaire de comptage de décimales... Ils montrent, au contraire, que les difficultés concernant les nombres décimaux (qui sont eux-mêmes moins bien acquis que les nombres entiers à l'entrée en sixième) surgissent au moment de placer la virgule du produit. Il semblerait donc que la tâche du professeur de sixième soit importante s'il souhaite atteindre l'objectif fixé par les programmes : la compétence “ multiplier deux nombres décimaux ” est exigible.

De l'analyse des questions qui portent sur la reconnaissance du modèle multiplicatif dans différentes situations, et des productions des élèves, nous dressons trois constats différents.

Le premier constat est que deux types de situations seulement sont évaluées : les situations d'isomorphisme de grandeurs et le calcul de l'aire d'un rectangle. L'institution légitime-t-elle que l'enseignement se limite à ces situations ou bien se dessine-t-il un objectif du collège : élargir le sens de la multiplication ? Nous n'avons trouvé aucune réponse dans les programmes.

Le deuxième constat est que le calcul de l'aire d'un rectangle est une source de difficultés pour plus de la moitié des élèves qui confondent l'aire et le périmètre ou bien leurs formules respectives. Cette faible performance correspond-elle à un manque de formation des élèves ou à une difficulté d'acquisition ? Toujours est-il que de tels résultats ne peuvent être sans conséquence sur les choix d'un professeur pour enseigner la multiplication des décimaux : s'il programme une activité qui doit reposer sur une situation multiplicative et s'il souhaite que cette situation ne soit pas un obstacle au déroulement de la séance, alors il aura intérêt à ne pas choisir un calcul d'aire de rectangle qui le conduirait inmanquablement à l'émergence de difficultés supplémentaires.

Le troisième constat est que, dans les situations multiplicatives, la dépendance entre la reconnaissance du modèle et la maîtrise technique semble globalement assez faible. Le manque de maîtrise technique handicape les élèves pour le calcul de la solution et ce d'autant plus qu'au collège les élèves sont moins sollicités qu'à l'école primaire pour poser leurs opérations, la calculatrice étant souvent utilisée. L'institution elle-même paraît accepter une régression des compétences techniques des élèves à condition qu'ils apprennent à contrôler les résultats fournis par la calculatrice.

Les résultats obtenus, tant sur les décimaux que sur la multiplication, attestent que la tâche récemment confiée aux professeurs de sixième est importante. Il s'agit de compléter l'acquisition de la notion de nombre décimal, d'élargir le sens de la multiplication et d'enseigner une technique opératoire sur laquelle de nombreux élèves trébuchent. La combinaison des difficultés d'apprentissage à ces trois niveaux (nombre décimal, sens de l'opération et technique opératoire) constitue une contrainte sur l'enseignement qui peut être présente chez les enseignants dès la préparation des cours. Une autre contrainte est l'intégration de cet enseignement dans la progression annuelle compte tenu du reste du programme et des moyens horaires disponibles, nous allons l'étudier maintenant.

2. Intégration de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans une progression annuelle

La tâche prescrite au professeur est définie par le programme : un contenu mathématique associé à des compétences que les élèves doivent acquérir. Un document d'accompagnement précise les intentions de l'institution scolaire afin d'aider les professeurs à programmer leur enseignement dans "l'esprit" du programme. La nécessité de ces documents montre que la tâche du professeur est complexe. L'institution lui laisse la responsabilité de concevoir un enseignement

(une procédure de réalisation de la tâche prescrite) qui permettra d'atteindre le but qu'elle lui a fixé. Le professeur de mathématiques décide, en particulier, de l'ordre dans lequel il traitera les différentes notions au programme ainsi que de la durée de l'enseignement de chacune d'elles¹⁹⁴.

On distingue, en ergonomie, les tâches pour lesquelles la procédure de réalisation peut être finement décrite par le prescripteur de celles, qu'on appelle mission, qui sont seulement définies par leur but¹⁹⁵. Dans l'enseignement, le but n'est pas seulement celui que le professeur doit atteindre, le but comprend aussi des acquisitions de savoir par les élèves au terme de l'année en cours ainsi qu'à moyen terme. D'une part l'institution définit les thèmes qui seront traités en précisant éventuellement quelques pratiques auxquelles les élèves doivent être habitués comme le calcul écrit, le calcul mental, la recherche... Tout cela relève bien de l'activité professionnelle de l'enseignant. D'autre part, l'institution fixe des compétences exigibles en fin d'année ou en fin de cycle. Ces compétences sont celles qui doivent être acquises par les élèves, elles ne définissent pas l'activité de l'enseignant mais imposent une contrainte d'efficacité.

Le professeur doit donc comprendre le programme c'est-à-dire reconstituer le plus précisément possible, à partir de ce texte, la tâche qui lui est prescrite. Les documents d'accompagnement peuvent l'y aider mais aussi les stages de formation continue et les manuels qui proposent chacun une reconstitution possible de la tâche du professeur. Toutefois, la reconstitution reste partielle puisque le professeur doit encore choisir parmi les propositions des auteurs : il n'est pas envisageable, au collège, avec les horaires prévus, d'exploiter toutes les activités proposées dans un manuel de mathématiques. Afin d'évaluer les contraintes que le programme impose à l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième, nous allons examiner la place que lui réserve l'institution, c'est-à-dire à la fois où cette notion apparaît dans les programmes et quelle est sa fonction dans les activités mathématiques correspondantes. Nous comparerons nos résultats à ceux qui émergent des choix des auteurs des manuels scolaires. Puis nous déterminerons les projets que les professeurs pourraient élaborer pour enseigner la multiplication des décimaux en sixième en tenant compte des résultats que nous avons obtenus jusqu'ici.

L'objet multiplication des décimaux dans l'ensemble du programme

Nous allons repérer, dans l'ensemble du programme de la classe de sixième du 22 novembre 1995, où apparaît la multiplication des décimaux et quelle est sa fonction. Cette analyse permettra de déterminer la tâche qui est prescrite aux enseignants et de dessiner les premiers contours des enseignements possibles. Autrement dit, nous cherchons à définir quel est, dans la période qui concerne nos

¹⁹⁴ Nous précisons ici la discipline car certains programmes d'autres disciplines indiquent l'ordre et la durée à respecter pour traiter chacune des notions.

¹⁹⁵ LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail – Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF. [p 21.]

observations, le rapport institutionnel à l'objet multiplication des décimaux. Pour atteindre cet objectif nous allons procéder à une approche écologique au sens de Yves Chevallard¹⁹⁶

Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce

Nous avons donc fixé l'habitat de l'objet multiplication des décimaux (le programme de sixième) et nous allons examiner sa niche. Ce programme est rédigé en trois parties. La première précise les objectifs généraux, la seconde décrit l'organisation de l'enseignement et la troisième explicite les contenus et les compétences exigibles. C'est dans cette troisième partie que nous allons chercher où il est question de multiplication des décimaux et quelle est sa fonction. Les savoirs y sont organisés autour de trois thèmes : les *travaux géométriques*, les *travaux numériques*, l'*organisation et la gestion de données*.

La multiplication des décimaux, un outil pour les travaux géométriques

Dans le thème consacré aux *travaux géométriques*, la multiplication des décimaux n'est pas mentionnée. Elle figure néanmoins implicitement au paragraphe n°2 qui traite des surfaces planes : mesure, comparaison et calcul d'aires et de périmètres. Citons les compétences exigibles :

Calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle.
Evaluer, à partir du rectangle, l'aire d'un triangle rectangle.
Calculer la longueur d'un cercle

Le fait qu'elle ne figure pas explicitement laisse penser que les auteurs des programmes n'envisageaient pas, lors de la rédaction, le calcul d'aire de rectangles comme une activité qui donne du sens à l'objet multiplication mais comme une activité qui permet la mise en fonctionnement du caractère outil de cet objet mathématique.

La multiplication des décimaux pour apprendre le sens de l'écriture décimale

Dans le paragraphe *Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations*, on peut lire, avant le titre *Techniques opératoires*, deux compétences exigibles :

Utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens.
Multiplier et diviser un décimal par 10 ; 100 ; 1000
ou par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

Un commentaire précise : “ *La multiplication et la division par une puissance de dix sont à relier à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités* ”. L'absence d'indication quant au niveau de maîtrise technique laisse à penser qu'une maîtrise parfaite doit être visée. La place de cette multiplication dans le

¹⁹⁶ CHEVALLARD Y. (1994), *Op cit* [p 142]

programme indique l'intention de ses auteurs : elle ne doit pas être conçue comme une technique opératoire mais être enseignée et pratiquée en relation la plus étroite possible avec le sens de l'écriture décimale. Nous avons vu qu'une multiplication par 10, 100 ou 1000 est réussie suivant le choix du multiplicande par 95 % à 50 % des élèves ; une division par 10, 100 ou 1000 par 80 % à 30 % d'entre eux. Il semble donc que ces activités opératoires et l'acquisition du sens de l'écriture décimale soient pensées par l'institution comme allant de pair, l'une profitant à l'autre et réciproquement.

Cette relation est confirmée par les documents d'accompagnement des programmes :

Les évaluations faites en 6e ont montré combien la signification des écritures décimales échappe encore à beaucoup d'élèves à l'entrée en 6e. Il est nécessaire de conduire un travail sur la signification de l'écriture décimale et de la relier au travail sur les opérations et à la multiplication et la division par 0,1 ; 0,01 ou 0,001.

La fonction de ces multiplications est donc double, être un outil pour répondre à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités mais aussi être un moyen, comme doit l'être en général le travail sur les opérations, pour apprendre la signification de l'écriture décimale.

On retrouve implicitement ces multiplications dans le paragraphe consacré à l'extension des écritures fractionnaires aux quotients de décimaux. Une autre fonction de ces multiplications est de permettre des modifications d'écritures

comme $\frac{5,24}{2,1} = \frac{524}{210}$.

La multiplication, un outil pour résoudre des problèmes numériques

Dans la deuxième partie, consacrée aux *travaux numériques*, la multiplication des décimaux apparaît explicitement mais aussi implicitement dans les passages relatifs à la résolution de problèmes et au calcul numérique. Le préambule précise :

Cette partie du programme s'appuie principalement sur la *résolution de problèmes* (...) ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le *sens des opérations* et des équations figurant au programme

Ce paragraphe du programme porte sur les *nombre entiers et décimaux : écriture et opérations*. Avant d'aborder les compétences exigibles, les commentaires précisent les limites de ces compétences : " *On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.* " Une fonction des opérations est définie : être un outil pour la résolution de problèmes. Nous reviendrons plus longuement sur cette fonction quand nous envisagerons comment le professeur peut la traduire dans son enseignement.

La multiplication des décimaux, une technique à connaître

L'apprentissage de la technique opératoire est prévu dans des situations suffisamment simples, l'utilisation de la calculatrice fait partie des compétences techniques prescrites :

Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique

Les programmes excluent donc que la multiplication des décimaux provoque l'apparition de séances répétées de calculs à la main sauf éventuellement si les élèves éprouvaient des difficultés "avec les nombres courants et pour des opérations techniquement simples "

En conclusion, rappelons que le travail sur la technique opératoire doit permettre une maîtrise suffisante pour la résolution de problèmes. Son apprentissage doit contribuer à l'acquisition de l'écriture décimale. On remarquera qu'aucune mention n'est faite des propriétés algébriques de l'opération sur lesquelles repose pourtant la technique opératoire

La multiplication des décimaux et les fractions décimales

Les compétences exigibles sur les fractions décimales ne concernent pas les opérations mais les changements d'écriture. Toutefois, les commentaires suggèrent que les opérations sur les nombres décimaux soient abordées avec les deux types d'écriture :

Les écritures fractionnaires et décimales pourront être utilisées comme des moyens de contrôle mutuel des opérations sur des nombres décimaux. C'est dans ce seul cas que seront rencontrées les opérations

(+, -, ×) en écriture fractionnaire telles que $\frac{32}{10} + \frac{7}{100} = \frac{327}{100}$.

Une nouvelle fonction de la multiplication des décimaux est ici définie dans le programme, c'est un outil pour vérifier les multiplications de deux fractions décimales.

La multiplication des décimaux et la gestion de données

Dans l'organisation et la gestion de données, on retrouve implicitement la fonction de la multiplication des décimaux "être un outil pour résoudre les problèmes numériques." Les situations à l'origine de ces problèmes sont énumérées : l'application d'un pourcentage, l'usage des opérateurs constants de la calculatrice, le calcul de l'aire d'un rectangle et enfin celui de la longueur d'un cercle puisque c'est une approximation décimale de π que les élèves utilisent

Bilan : fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de 6^e

Pour conclure cette approche écologique de la multiplication des nombres décimaux dans le programme de sixième, nous remarquerons que la "niche" est répartie dans les trois parties du programme (travaux géométriques et numériques, gestion de données) et que sa "fonction" est multiple. Ainsi, nous distinguons, dans le programme de sixième, neuf fonctions de la multiplication des

décimaux (ces fonctions sont indiquées entre parenthèses dans la liste qui suit) ; plusieurs d'entre elles peuvent être regroupées dans une fonction plus vaste d'apprentissage du nombre décimal :

- contribuer à l'apprentissage des nombres décimaux :

Les multiplications par 10, 100, 1 000 ou 0,1, 0,01, 0,001... permettent de travailler les unités et les changements d'unités le système décimal (1), les écritures fractionnaire (2) et décimale (3) ;

La technique opératoire permet de travailler les écritures fractionnaires par le calcul sur les fractions décimales (4) et de travailler l'écriture décimale (5) ;

La lecture des données d'un problème multiplicatif et l'écriture de la solution nécessitent parfois d'effectuer des changements d'unité (6), l'estimation de la solution demande de déterminer les ordres de grandeur de ces données (7) ;

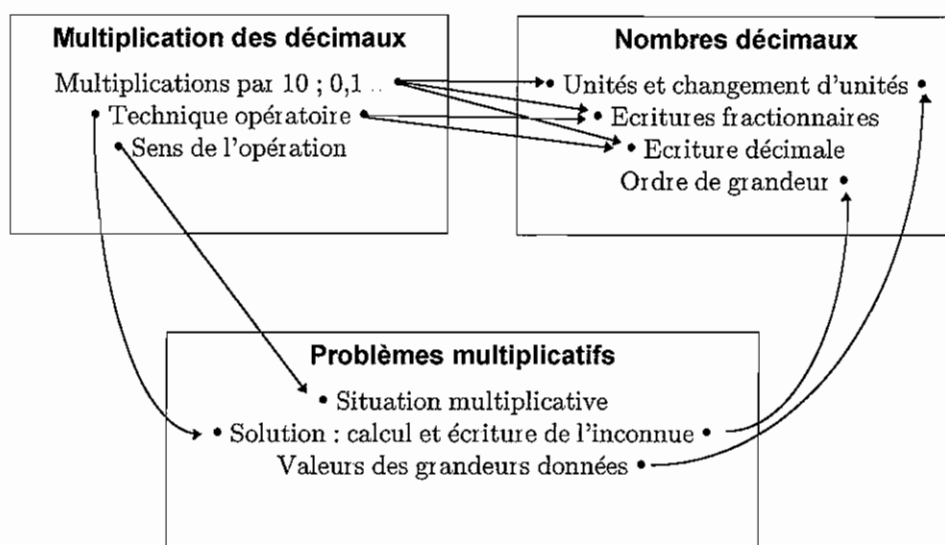
- modéliser certaines situations qui donnent du sens à la multiplication :

L'élaboration du sens de la multiplication repose sur l'étude de situations multiplicatives et les connaissances construites lors de cette étude sont réinvesties pour résoudre les problèmes numériques lorsque la résolution passe par le calcul d'un produit (8) ;

- calculer la solution de problèmes numériques :

La technique opératoire permet de calculer la solution de problèmes multiplicatifs (9)

Ces neuf fonctions de l'étude de la multiplication des nombres décimaux dans le programme de la classe de sixième sont indiquées dans le schéma suivant où, conformément au programme nous distinguons les nombres, l'opération et les problèmes qui conduisent à l'opération.



Graphique 1. Les neuf fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de sixième

L'opération, les problèmes et les nombres sont l'objet de différents points du programme :

- Pour l'opération, nous avons distingué les cas particuliers que sont les multiplicateurs égaux à 10 ; 100 ; 1 000 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001... la technique opératoire usuelle et le sens de l'opération.

– Pour les problèmes multiplicatifs, nous avons distingué la situation (des situations multiplicatives apparaissent dans les trois parties du programme : travaux géométriques, travaux numériques et gestion de données), les données et la solution qui peut s'obtenir par des méthodes artisanales ou par l'utilisation de la technique opératoire.

– Pour les nombres décimaux, nous avons distingué quatre aspects différents mais liés : les unités et les changements d'unités, les écritures fractionnaires, l'écriture décimale et l'ordre de grandeur

Enfin, chaque flèche représente une des neuf fonctions de l'objet multiplication des décimaux dans le programme de sixième de 1995.

L'objet multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Les professeurs utilisent les programmes mais plus encore les manuels scolaires. Comparons la niche et les fonctions de la multiplication des décimaux dans les manuels de cette classe avec celles que nous venons de déterminer dans les programmes de sixième.

La niche de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Changeons d'*habitat* pour l'objet multiplication des décimaux, quelle est sa *niche* dans les manuels ? Ces ouvrages sont tous rédigés en reprenant le plan du programme, chacune des notions y est abordée. Ainsi, la niche est la même dans les manuels et dans le programme de sixième.

Les fonctions de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Reprenons les conclusions de l'étude que nous avons menée sur les propositions des auteurs de ces ouvrages. Les trois grandes fonctions que nous avons identifiées dans les programmes correspondent aux catégories que nous avons dégagées pour comparer les manuels. Nous avons dressé un tableau des exercices qu'ils proposent, les catégories qui nous permettaient de distinguer ces exercices étaient : *détermination du produit*, *questions théoriques* et *situations multiplicatives*. Nous trouvons la correspondance suivante :

– la fonction de contribution à l'apprentissage des nombres apparaît dans les exercices des *questions théoriques* et dans les exercices de calcul mental de la catégorie *détermination du produit* ;

– la fonction de modélisation de situations apparaît dans les exercices des *situations multiplicatives* ;

– la fonction de calcul de la solution de problèmes numériques apparaît dans les exercices de technique opératoire et d'ordre de grandeur de la catégorie *détermination du produit*.

Les résultats quant à l'importance accordée à ces différentes fonctions ont montré une certaine hétérogénéité des manuels scolaires. Deux fonctions ne sont vraiment exploitées dans aucun de ces ouvrages : l'utilisation des ordres de grandeurs ou des fractions décimales pour aider à l'apprentissage de la multiplication. Il faut rappeler que, dans les programmes ces deux fonctions n'apparaissent pas explicitement comme telles, les ordres de grandeurs servent à

contrôler les résultats (mais comment apprend-on à manipuler les ordres de grandeurs ?), et les opérations sur les décimaux servent à contrôler celles qui sont effectuées avec les fractions décimales. En outre, nous avons constaté une certaine pauvreté des situations multiplicatives étudiées, celles qui apparaissent dans les chapitres qui ne sont pas directement consacrés à la multiplication des décimaux ne sont pas exploitées pour retravailler le sens de la multiplication mais seulement pour utiliser la technique opératoire. Aussi, l'évaluation de l'importance de l'étude de ces situations sur l'apprentissage du sens de la multiplication reste difficile.

Finalement, les manuels ont, dans leur ensemble, attribué à l'objet multiplication des décimaux la même niche et les mêmes fonctions que les programmes. Mais cette apparente convergence ne doit pas masquer l'hétérogénéité, que nous avons constatée dans l'ensemble des manuels, due à la différence d'importance accordée par chacun d'eux à chacune de ces fonctions

3. Quel projet élaborer compte tenu des contraintes ?

Terminons notre étude de la transposition didactique, en sixième, de la multiplication des nombres décimaux par la prise en compte, dans l'élaboration d'un projet d'enseignement, des connaissances antérieures des élèves et des demandes de l'institution scolaire. Prenons donc la place d'un professeur qui doit élaborer un projet pour enseigner cette notion dans sa classe. Nous en resterons aux grandes lignes de ce projet car ce professeur est fictif : il n'aurait pas d'autre particularité que d'avoir de l'expérience du métier, de devoir enseigner en classe de sixième de niveau standard en étant soumis aux exigences institutionnelles de l'enseignement public et en disposant des moyens qu'elle attribue

Le programme distingue deux objectifs différents pour l'enseignement de la multiplication des décimaux : le sens de l'opération, indispensable pour la reconnaissance des situations dans les problèmes, et la technique opératoire, pour calculer la solution d'un problème. Ces deux directions de travail pour les enseignants peuvent être plus ou moins reliées dans le projet du professeur. En outre, l'enseignement de la multiplication doit permettre de compléter l'apprentissage du nombre décimal.

La technique opératoire dans le cas d'un enseignement décontextualisé

La technique peut être étudiée indépendamment du sens de l'opération, c'est le scénario proposé par tous les manuels scolaires. Le professeur pose le problème de trouver un résultat à la multiplication de deux décimaux après avoir éventuellement justifié cette question par une situation. Prenons par exemple le produit $3,4 \times 4,75$. L'enseignant peut créer une situation qui conduise à ce calcul ou demander aux élèves d'en produire. Nous supposons dans ce paragraphe que le projet n'est pas d'utiliser la situation pour déterminer le produit. Le problème technique est résolu de façon abstraite, décontextualisée.

L'objectif est d'aboutir à la technique usuelle : calculer 34×475 et obtenir 16 150, compter trois décimales dans les deux facteurs du produit, puis placer une

virgule après le chiffre 6, c'est-à-dire en laissant trois décimales après la virgule. Eventuellement simplifier l'écriture obtenue 16,150 en éliminant le zéro inutile et obtenir 16,15.

Rappelons rapidement les différents moyens qui permettent de justifier l'égalité : $3,4 \times 4,75 = 16,15$. Le professeur pourra développer un ou plusieurs d'entre eux

Avec les fractions décimales

L'écriture fractionnaire des décimaux et la multiplication de deux fractions décimales sont des prérequis à un enseignement qui reposerait sur les fractions. Nous avons vu que les élèves éprouvent quelques difficultés à l'entrée en sixième avec les changements d'écriture des nombres décimaux. Ces difficultés pourraient disqualifier cette façon de procéder, néanmoins l'acquisition des pratiques de changement d'écriture étant un des objectifs de l'année de sixième, certains professeurs pourraient tout de même l'envisager :

$$3,4 \times 4,75 = \frac{34}{10} \times \frac{475}{100} = \frac{34 \times 475}{1\,000} = \frac{16\,150}{1\,000} = \frac{1\,615}{100} = 16,15.$$

Remarquons que la technique usuelle peut se retrouver assez facilement à partir de ces égalités ce qui constitue un avantage. Le sens de l'écriture décimale est mobilisé. Néanmoins, rappelons que le programme envisage la multiplication des décimaux comme un moyen de contrôle du produit de deux fractions décimales, ce qui peut laisser à penser que la chronologie des enseignements envisagée par l'institution risque de ne pas être respectée. Aucun manuel ne procède ainsi.

Avec les unités de mesures

Rappelons que la méthode du changement d'unité consiste à transformer les facteurs du produit $3,4 \times 4,75$ en deux nombres entiers en changeant d'unité. Mais cette transformation s'effectue en relation avec les unités de mesure et le sens de la situation qui lie ces deux facteurs. Elle n'entre donc pas dans les projets où la technique précède la résolution de problèmes. Précisons néanmoins qu'aucun manuel ne procède ainsi.

Avec un encadrement du produit ou l'ordre de grandeur des facteurs

Nous avons vu que les programmes permettent d'envisager un enseignement de la multiplication en liaison avec les approximations et les ordres de grandeurs. Une telle méthode n'a pas encore été vue car elle n'apparaît dans aucune publication. On peut envisager néanmoins qu'un professeur présente le produit $3,4 \times 4,75$ comme celui de 34 dixièmes par 475 centièmes. On obtient alors 16 150 sous-unités qu'il faut déterminer. Cela revient à placer une virgule à 16 150 pour trouver le produit, ce qui est conforme à la pratique usuelle de la technique opératoire.

Sans utiliser la multiplication des fractions décimales, on peut proposer la recherche d'un encadrement du produit ou l'utilisation de l'ordre de grandeur du produit. Procédons par encadrement : le produit est compris entre 3×4 et 4×5 c'est-à-dire entre 12 et 20 donc $3,4 \times 4,75 = 16,15$. Avec les ordres de grandeurs :

les facteurs ont pour ordre de grandeur 3 et 5 donc une estimation du produit est 15 ; parmi les nombres que l'on peut écrire en plaçant une virgule à 16 150, le plus proche de 15 est 16,15 donc $3,4 \times 4,75 = 16,15$ ¹⁹⁷. Ces méthodes visent conjointement l'objectif du contrôle des affichages de la calculatrice par le calcul approché. Aucun manuel ne procède ainsi.

Avec les opérateurs

La méthode utilisant l'effet sur le produit d'opérateurs multiplicatifs appliqués aux facteurs est la seule méthode exposée dans les manuels. Rappelons qu'elle repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication, ce qui est masqué par une disposition judicieuse :

$$\begin{array}{rclcl} 3,4 & \times & 4,75 & = & ??? \\ \downarrow \times 10 & & \downarrow \times 100 & & \uparrow \div 1\,000 \\ 34 & \times & 475 & = & 16\,150 \end{array}$$

On en déduit le produit cherché. Cette méthode a l'avantage de rendre compte aisément de la technique usuelle. L'inconvénient majeur est que les nombres obtenus par les opérateurs ne trouvent pas de signification dans la situation où interviennent les décimaux.

Avec l'écriture décimale

Une méthode reprend celle des fractions décimales mais sans imposer de changement d'écriture. Elle utilise implicitement la distributivité de la multiplication sur l'addition : on pose la multiplication et on l'effectue en attribuant une unité à chaque produit partiel. Cette méthode a l'avantage de permettre une révision de la multiplication d'un décimal par un entier et d'envisager la multiplication de deux décimaux sans changer de technique. Elle suppose que les élèves aient appris à multiplier entre elles les différentes unités : centièmes, dixièmes, unités, dizaines, centaines...

4,75	On commence par 4×5 , on multiplie des dixièmes par des
$\times 3,4$	centièmes donc on obtient 20 millièmes. C'est-à-dire
1,900	0 millième et 2 centièmes. On pose 0 millième et on retient
14,25	2 centièmes $4 \text{ dixièmes} \times 7 \text{ dixièmes}$ font 28 centièmes,
16,150	plus 2 centièmes de retenue qui font 30 centièmes.

Ainsi, la méthode restitue le sens de chaque produit partiel et de chaque chiffre des écritures décimales. Elle convient pour toutes les multiplications de décimaux, que les facteurs soient entiers ou non. Elle permet aussi de retravailler le sens de l'écriture décimale. Mais elle est assez lourde à utiliser pour un élève car elle impose de penser à beaucoup de choses à la fois et pourrait entraîner des erreurs dues à une surcharge cognitive...

¹⁹⁷ La conclusion pose des difficultés théoriques qui sont étudiées en annexe, voir le chapitre intitulé : ordre de grandeur et multiplication des décimaux

Remarquons enfin que cette méthode met l'accent sur les chiffres du nombre alors que dans l'ensemble du programme du collège, les chiffres et leur valeur ne sont plus travaillés. Toutes les techniques opératoires qui sont étudiées (calcul fractionnaire, calcul algébrique, calcul sur les radicaux) portent directement sur les nombres. La seule exception est le critère de divisibilité par 2, 3 ou 5 qui fait explicitement mention des chiffres du nombre mais la valeur de ces chiffres n'est pas prise en compte puisque ce critère n'est pas établi. Cette méthode s'inscrit donc assez mal dans l'ensemble du programme du collège qui est précisément celui que les professeurs de sixième enseignent quelles que soient les autres classes qu'ils ont en charge¹⁹⁸.

Après avoir enseigné la technique opératoire, le professeur peut envisager de proposer des problèmes issus de situations multiplicatives. Si le professeur se limite aux problèmes d'isomorphisme de grandeurs, il sait que les élèves reconnaîtront assez facilement la situation multiplicative (c'est un résultat des évaluations nationales), ils n'auraient donc plus qu'à appliquer la technique opératoire pour résoudre le problème. Comme nous l'avons montré, à une exception près, ce choix est celui de toutes les équipes d'auteurs de manuel de sixième.

La technique opératoire enseignée à partir d'une situation multiplicative

Certaines propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux ne ressemblent pas à celles des manuels. Leurs auteurs ne proposent pas d'élaborer une technique indépendamment des situations où intervient la multiplication. Bien au contraire, c'est la situation qui donne du sens à la technique opératoire. Cette démarche est conforme au programme. Les objectifs généraux¹⁹⁹ rappellent que la démarche d'enseignement doit être de "*bâtir des mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour, d'utiliser des savoirs mathématiques dans les spécialités diverses*". Ils ajoutent que la résolution de problème et le calcul permettent aux élèves "*de mieux prendre en compte le caractère 'd'outil' des mathématiques*". Un projet qui reprendrait des propositions d'enseignement comprenant une phase contextualisée est donc envisageable par un professeur, bien qu'aucune d'entre elles ne soit relayée par les manuels.

Nous avons vu trois propositions qui envisagent la multiplication des décimaux comme un outil pour résoudre un problème s'appuyant sur une situation multiplicative, celles de Guy Brousseau, de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin et de celle Milena Basso & Cinzia Bonotto. Les situations multiplicatives utilisées sont respectivement l'agrandissement de figures planes, le calcul d'aire de rectangles et les problèmes de prix. Rappelons comment ces situations permettent de construire la multiplication des décimaux.

¹⁹⁸ Nous ne prenons pas en compte ici les rares professeurs dont le service est réparti à la fois dans un collège et dans un lycée

¹⁹⁹ Programme de mathématiques de la classe de sixième, 22 novembre 1995

Multiplication des décimaux dans le contexte des problèmes de prix

Les nombres décimaux qui interviennent dans les problèmes de prix sont des mesures. La méthode de calcul du produit repose sur des changements d'unités directement liés à la situation. Soit, par exemple, la question : combien paiera-t-on 3,4 mètres de ruban à 4,70 francs par mètre ? Les conversions $3,4 \text{ m} = 34 \text{ dm}$ et $4,70 \text{ F/m} = 47 \text{ c/dm}$ permettent de résoudre le problème avec des nombres entiers. Mais nous avons vu que cette méthode n'est pas efficace pour toutes les valeurs. Ici par exemple, si le prix du ruban est 4,75 F/m alors on achète 34 dm de ruban qui coûte 47,5 centimes par dm, on doit se contenter d'un seul facteur entier. La méthode n'est pas suffisante pour constituer une technique, elle ne conduit pas non plus à la technique usuelle qui serait simplement constatée pour des valeurs adaptées. Aucun manuel actuel ne procède ainsi.

Multiplication des décimaux dans le contexte du calcul d'aire de rectangles

Comme l'ont montré Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, le calcul d'aire de rectangle peut être conduit en étudiant parallèlement la multiplication des décimaux écrits avec les fractions décimales ou avec la notation décimale. Une telle étude permet d'atteindre d'autres objectifs du programme de sixième comme le sens de l'écriture décimale en liaison avec les fractions décimales, le calcul d'aires et les conversions d'unités d'aires.

Nous avons montré que cette situation est la plus efficace pour illustrer les propriétés de la multiplication. Mais nous avons aussi montré que le calcul d'aire de rectangles pose des difficultés aux élèves à l'entrée en sixième, même quand les mesures des côtés sont des nombres entiers. Deux hypothèses contradictoires peuvent alors être formulées. Soit le professeur décide d'approfondir l'enseignement du calcul d'aire de rectangles et, il pourra bénéficier de cet investissement pour la multiplication des décimaux en la reliant à cette situation. Soit le professeur ne prend pas cette décision, et le calcul d'aire de rectangles apparaîtra plutôt comme une difficulté supplémentaire pour l'enseignement de la multiplication. Dans les manuels, le calcul d'aire de rectangle est un chapitre postérieur à celui de la multiplication des décimaux.

Multiplication des décimaux dans le contexte de l'agrandissement de figures

La situation d'agrandissement de figures planes fait intervenir des opérateurs multiplicatifs, la multiplication des décimaux provient soit de l'application d'un opérateur à une longueur soit de la composition de deux opérateurs. Les situations élaborées par Guy Brousseau ont inspiré de nombreuses publications parmi lesquels on trouve des ouvrages destinés à la formation initiale des enseignants mais aussi des propositions comme celles de la thèse de Jeanne Bolon ou celles que l'INRP a expérimentées et qui sont regroupées sous le titre *Apprentissages mathématiques en 6e*²⁰⁰. Dans ce dernier ouvrage, on trouve une activité analogue à celle d'un agrandissement d'une droite graduée que les auteurs appellent "la bande à double graduation". Cette situation permet, et c'est la seule, de mobiliser

²⁰⁰ INRP - ERMEL (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier.

la conception "abscisse" des nombres décimaux. Comme le montrent les auteurs, elle trouve de nombreuses applications pour modéliser des situations de proportionnalité.

Mais nous avons montré que ces situations avec des opérateurs multiplicatifs ne permettent pas facilement de justifier les propriétés de la multiplication. Si bien que ces situations contribuent principalement à construire un sens à la multiplication de deux décimaux ou rationnels, sens qui n'apparaît, dans le programme, qu'au paragraphe consacré aux situations de proportionnalité où l'utilisation d'une échelle est simplement signalée en commentaire mais n'apparaît pas parmi les compétences exigibles. Les travaux sur la notion d'échelle figurent plus explicitement au programme de la classe de cinquième, les professeurs pourraient estimer que ces situations sont donc bien coûteuses...

Retour au programme : maîtrise de l'opération et durée de l'enseignement

Les grandes lignes des projets que pourrait construire un professeur pour enseigner la multiplication des décimaux sont maintenant tracées. Pour que ce projet puisse être finalisé, il faut encore estimer le nombre d'heures de classe à lui consacrer qui dépend aussi du niveau de maîtrise recherché.

Pas de virtuosité technique

Le programme de sixième précise, à trois reprises, le niveau que le professeur doit viser ²⁰¹ :

Les travaux numériques prennent appui sur la *pratique du calcul exact ou approché* sous différentes formes : le *calcul mental*, le *calcul à la main* (dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), *l'emploi de la calculatrice*. (..)

On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes. (..)

Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique.

Comment interpréter ces phrases ? L'institution déclare que son but n'est pas que les élèves dominent parfaitement la technique opératoire, sans préciser ce qui est acceptable que les élèves ignorent. Nous envisageons alors deux interprétations qui, *a priori*, ne sont pas incompatibles :

- l'institution aurait pour objectif que les élèves puissent résoudre les problèmes numériques sans utiliser la calculatrice, et alors d'une part ces problèmes doivent conduire à des calculs suffisamment simples techniquement et d'autre part la maîtrise technique des élèves doit permettre d'effectuer ces calculs ;
- ou l'institution supposerait l'existence d'une relation entre la maîtrise de la technique opératoire et la capacité à reconnaître l'opération dans une situation. Il

²⁰¹ Programme de mathématique de la classe de sixième, 22 novembre 1995.

existerait un seuil de maîtrise en deçà duquel la reconnaissance du modèle serait compromise. Alors le programme demanderait que la maîtrise des techniques opératoires soit supérieure à ce seuil (*"suffisante"*) pour ne pas faire obstacle à la reconnaissance de l'opération (*"à la résolution de problèmes"*). Le débat sur la relation entre technique opératoire et résolution de problème n'est pas clos. Les travaux de Denis Butlen & Monique Pézard y contribuent : ils montrent que la relation entre habileté opératoire et reconnaissance du modèle dépend de nombreux facteurs : résolution orale ou écrite, complexité de la situation, familiarité de la situation.

Les évaluations que nous avons citées ont montré que le modèle multiplicatif, dans des situations simples d'isomorphisme de grandeurs est reconnu par environ 80 % des élèves. La réussite au problème demande en outre que la multiplication soit juste. Or nous avons constaté que la réussite est d'environ 70 % pour un problème conduisant à la multiplication d'un décimal par un entier et de 40 % si la multiplication porte sur deux décimaux. Les professeurs qui utilisent les manuels où les situations multiplicatives sont presque uniquement des situations simples d'isomorphisme de grandeurs pourraient donc concevoir un enseignement où les problèmes conduisent à des calculs de niveaux variés, en permettant éventuellement l'usage de la calculatrice pour pallier les difficultés techniques de certains élèves.

Quelle durée pour cet enseignement ?

Le projet d'enseignement qu'un professeur peut élaborer dépend aussi de la durée dont il dispose. Pour évaluer cette durée, les enseignants peuvent utiliser les manuels. Le programme de l'année est couvert par une quinzaine de chapitres. Ainsi, accorder environ deux semaines de classe à chaque chapitre permet de traiter l'ensemble du programme. Suivant les manuels, la multiplication des nombres décimaux est un chapitre à part entière ou seulement la moitié quand elle est associée à l'addition et à la soustraction. Les programmes prévoyant trois heures hebdomadaires, nous pouvons évaluer la durée de l'enseignement de la multiplication (y compris la résolution de problèmes) dans une fourchette de quatre à six heures (évaluation comprise).

Si le professeur élabore un projet conforme à ceux des manuels, il consacrerait deux à quatre heures à la technique opératoire et aux relations entre cette technique et la numération décimale. La multiplication des fractions décimales pourra être reportée. Il consacrerait encore trois heures environ à la résolution de problèmes pour enrichir le sens de l'opération et la connaissance des situations courantes (grandeurs, unités, relations entre les grandeurs...). Si le professeur élabore un projet d'enseignement comprenant une phase contextualisée, nous ne pouvons prévoir de répartition car les propositions étudiées peuvent être reprises ou adaptées en toute liberté par un professeur comme en témoignent les suggestions que Jeanne Bolon a élaborées dans sa thèse et qui reprennent les travaux de Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin.

Conclusion : les projets que les professeurs peuvent élaborer

Après avoir évalué les enjeux mathématiques dont la multiplication des décimaux est l'objet et pour étudier les pratiques des professeurs observés dans leur classe, nous avons besoin d'une analyse préalable des projets que les enseignants peuvent élaborer pour enseigner cette notion. Pour préparer leurs cours, les professeurs disposent des instructions officielles, des propositions des manuels et des publications à leur intention. Certains d'entre eux connaissent aussi les travaux de recherche, en particulier en didactique des mathématiques. Dans cette étude préalable, nous avons pris la place d'un professeur fictif caractérisé seulement par la connaissance des acquis et des difficultés des élèves à l'entrée en sixième et par le respect des programmes qui définissent sa mission. Jeanne Bolon, dans sa thèse, a distingué trois critères qui interviennent dans l'élaboration d'un projet pour choisir parmi différentes suggestions : leur difficulté d'enseignement, leur adaptation aux élèves et leur intégration dans la progression annuelle choisie. Nous avons repris les deux derniers critères qui ne portent sur aucune caractéristique personnelle des enseignants.

Un projet d'enseignement pour atteindre les objectifs fixés par le programme

La multiplication des décimaux figure au programme de la classe sixième depuis 1995. Avant cette date, elle était enseignée dès l'école élémentaire. Les professeurs expérimentés connaissent cet enseignement qui était consolidé en sixième, notamment par les stages de formation continue sur la liaison école-collège et par l'utilisation des résultats des évaluations nationales qui sont menées depuis 1989. Ils connaissent les objectifs de l'institution ainsi que leur évolution marquée par les différentes réformes.

Une évolution des objectifs institutionnels

Les programmes de 1945 pour l'école primaire limitaient le nombre décimal à l'expression d'une mesure et la multiplication à une addition répétée, après une éventuelle conversion pour que le multiplicateur soit entier. L'objectif principal de l'enseignant primaire était de former les futurs adultes à la résolution des problèmes du quotidien. Après quelques évolutions successives des instructions officielles, les nombres décimaux ont été dissociés des mesures, et le sens de la multiplication s'est élargi. Les programmes se sont détournés des mathématiques du quotidien.

Actuellement, il est demandé aux professeurs d'enseigner la multiplication des décimaux de manière à améliorer les connaissances des élèves sur l'écriture décimale. Le texte du programme ne fait pas explicitement mention des différentes situations multiplicatives qui permettent de construire le sens de l'opération. Seuls les techniques opératoires et les procédés de calcul approché sont mentionnés. Certaines notions, comme l'aire du rectangle ou la proportionnalité, qui reposent sur la multiplication doivent être étudiées en sixième mais elles apparaissent plutôt comme une occasion d'appliquer la technique opératoire. Pour l'institution

scolaire, l'objectif d'enseignement des nombres domine nettement celui de l'enseignement de l'opération, aucune mention n'est faite de ses propriétés. Cependant, la résolution de problèmes, y compris ceux du quotidien, reste un objectif explicite des programmes

Les manuels scolaires proposent un enseignement décontextualisé

Les manuels proposent souvent un enseignement de la multiplication décontextualisé. Les élèves travaillent sur les écritures des nombres, les références à des situations que les élèves connaissent bien disparaissent. Ainsi, la proposition la plus fréquente dans les manuels pour justifier la technique opératoire est de recourir à des opérateurs : on procède à des multiplications pour obtenir des facteurs entiers puis on divise le produit obtenu pour placer correctement la virgule. Ces manipulations restent formelles.

Dans les exercices, les situations d'isomorphisme de grandeurs sont pratiquement les seules situations proposées par les manuels. Le calcul d'aire de rectangles et les agrandissements de figures sont étudiés après la multiplication, le sens de l'opération n'est pas enrichi, c'est l'application de formules et l'utilisation de tableaux de proportionnalité qui sont visées, la reconnaissance du modèle multiplicatif n'est pas à la charge de l'élève.

Les travaux de recherche conduisent à des choix différents

Deux ingénieries didactiques (françaises) proposent des situations d'enseignement de la multiplication, intégrées à un enseignement des rationnels et des décimaux, qui reposent sur des activités de calcul d'aire ou d'agrandissement de figures. Les savoirs mathématiques s'y construisent à partir d'une connaissance approfondie de ces situations du domaine mathématique. En Italie, certains chercheurs en didactique défendent un enseignement des mathématiques à l'école primaire qui s'appuie sur des *domaines d'expériences*, ces domaines sont choisis en dehors du domaine mathématique pour susciter une interaction entre, d'une part les connaissances, les raisonnements et les modes de calculs dans le cadre extra-scolaire et d'autre part les savoirs et les activités qui leur sont associées dans le cadre d'une discipline étudiée dans le cadre scolaire

Plus généralement, les publications à l'intention des enseignants proposent un enseignement de la multiplication des décimaux comprenant une phase contextualisée et se différencient ainsi des manuels scolaires.

Enfin, rappelons que les deux ingénieries déjà citées conçoivent l'enseignement des nombres décimaux à partir de celui des rationnels. L'enseignement de la multiplication des décimaux avec les fractions décimales permet de construire facilement la technique opératoire usuelle. Mais un tel enseignement ne suit pas l'ordre du programme où les fractions décimales apparaissent après les nombres décimaux et les quotients de deux entiers.

Comme l'a montré la thèse de Jeanne Bolon, les travaux de recherche en didactique des mathématiques ont peu d'impact sur l'enseignement ordinaire, il est donc peu probable que les professeurs de sixième élaborent un projet qui en utilise les résultats.

Elaborer un projet d'enseignement adapté aux élèves

Adapter l'enseignement aux élèves, c'est d'abord tenir compte de leurs connaissances. Les acquis attendus des élèves figurent dans les programmes de l'école primaire. Afin de mieux connaître leurs compétences à l'entrée en sixième, depuis une dizaine d'années, le Ministère de l'Éducation nationale met des outils d'évaluation à la disposition des professeurs. Il les invite à prendre en compte les résultats pour définir leur projet d'enseignement.

Pour une étude préalable de l'enseignement de la multiplication des décimaux, nous ne pouvions pas étudier l'adaptation au niveau des élèves autrement qu'en considérant tous les élèves de sixième. Nous avons donc utilisé les résultats des évaluations à l'entrée et à la sortie de la classe de sixième qui ont porté sur un échantillon représentatif de l'ensemble des élèves. Les évaluations du Ministère de l'Éducation nationale et celles de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public répondent à ce critère.

Les nombres décimaux à l'entrée en sixième

Le professeur chargé de l'enseignement de la multiplication des décimaux sera confronté aux conceptions de ses élèves à propos des nombres décimaux. Les programmes de l'école élémentaire prévoient un enseignement qui couvre trois approches complémentaires de ces nombres : les décimaux comme rationnels particuliers, les décimaux pour approcher les abscisses des points de la droite numérique et les décimaux pour mesurer des grandeurs en référence au système métrique.

Les évaluations montrent que les entiers sont bien mieux acquis que les nombres décimaux qui sont encore en cours d'acquisition pour de nombreux élèves de sixième. Une conception directement héritée des nombres entiers explique 10% à 50% des erreurs commises aux questions posées sur le nombre décimal, les résultats concernant les écritures fractionnaires figurent parmi les plus faibles. Le vocabulaire associé à l'écriture est complexe et entraîne de nombreuses confusions chez les élèves. Parallèlement, les questions relatives aux opérations sur les nombres décimaux montrent que 10% des erreurs de calcul d'une somme ou d'une différence et 20% des erreurs de calcul d'un produit surviennent au moment de placer la virgule. Les multiplications par 10, 100, 0,1, 0,01... ne sont réussies que par 50% à 70% des élèves.

Ainsi, les professeurs ne pourront pas directement envisager un enseignement de la multiplication des décimaux qui repose sur la notion de nombre décimal. Cela pourra conduire certains d'entre eux à enseigner la multiplication en s'appuyant davantage sur les nombres entiers, c'est ce qui est généralement proposé par les manuels scolaires qui utilisent les opérateurs.

La multiplication à l'entrée en sixième

Les programmes distinguent le sens de l'opération, hérité des situations multiplicatives, et la technique opératoire.

Les questions des évaluations qui portent sur la technique de la multiplication de deux entiers montrent qu'elle est acquise par environ 80% des élèves quand certaines difficultés ne sont pas présentes. Les erreurs principales sont causées par

une connaissance insuffisante des tables de multiplication et par de mauvais décalages des produits partiels. La présence d'un chiffre supérieur à cinq dans les deux facteurs à la fois ou la présence d'un zéro dans le multiplicateur sont des difficultés qui font chuter les pourcentages de réussite entre 60% et 70%.

Les questions qui portent sur la résolution de problèmes multiplicatifs ne concernent que des situations de grandeurs isomorphes (poids, prix...) où la multiplication se conçoit comme une addition répétée, et des calculs d'aire de rectangles. Dans le premier type de situations, le modèle multiplicatif est reconnu par environ 75% des élèves alors qu'il ne l'est que par 30% à 40% pour l'aire du rectangle. Les autres situations qui contribuent à la signification de la multiplication ne figurent pas dans les questions des évaluations.

Ces résultats peuvent inciter les professeurs de sixième à ne pas faire reposer l'enseignement de la multiplication de décimaux sur d'autres situations que celles qui sont bien identifiées par les élèves afin d'éviter des difficultés d'enseignement liées à des confusions. Ils peuvent aussi choisir un enseignement décontextualisé de la multiplication, c'est le choix que nous avons constaté chez les auteurs des manuels scolaires.

Intégrer l'enseignement de la multiplication dans la progression annuelle

L'intégration de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans une progression annuelle demande de prendre en compte, d'une part, les fonctions de cette notion dans le programme de l'année et, d'autre part, la durée qu'il convient de lui accorder. Les auteurs de manuels établissent une telle progression qu'ils utilisent pour structurer leur ouvrage en chapitres successifs. Les professeurs qui utilisent un manuel dans leur classe sont donc enclins à suivre le choix des auteurs.

Les programmes laissent une certaine marge de manœuvre aux professeurs

Les programmes laissent les professeurs assez libres du choix des arguments pour légitimer théoriquement la technique de la multiplication des décimaux. Ils ne fixent pas la virtuosité technique comme objectif, les élèves doivent savoir effectuer des calculs simples et utiliser leur calculatrice pour résoudre des problèmes. L'institution scolaire, à travers l'enseignement de la multiplication de décimaux, vise aussi l'acquisition de la notion de nombre décimal.

L'ordre utilisé pour présenter les contenus dans les programmes n'est pas impératif : il est précisé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés. Néanmoins, cet ordre est repris dans tous les manuels dont les éditeurs, pour des raisons commerciales, veulent montrer qu'ils garantissent la conformité aux instructions officielles.

Le paragraphe du programme qui comprend la multiplication des décimaux est divisé en deux parties : techniques opératoires et procédés de calcul approché. Les situations multiplicatives sur lesquelles pourrait s'appuyer l'enseignement de l'opération ne sont pas mentionnées. Un enseignement décontextualisé est donc envisageable. Cependant, le programme indique que les problèmes doivent permettre aux élèves d'associer une situation concrète à un travail numérique et

de mieux saisir le sens des opérations. Un enseignement comprenant une phase contextualisée n'est donc pas exclu.

La durée contraint fortement le projet d'enseignement

Après avoir montré la diversité des possibilités laissée par les programmes pour enseigner la technique opératoire, nous avons estimé la durée qu'un professeur pouvait accorder à l'enseignement de la multiplication des décimaux. Nous avons tenté de prendre en compte le niveau de maîtrise technique attendu par l'institution. Nous avons estimé à quatre à six heures de cours la durée de l'enseignement de la multiplication des décimaux comprenant la technique opératoire, la relation avec la notation décimale, l'utilisation de la calculatrice, le recours au calcul approché pour contrôler les calculs sur machine ainsi que la résolution de problèmes liés à des situations multiplicatives.

Il semble que les professeurs peuvent difficilement élaborer un projet qui demande beaucoup de temps, ce qui est le cas d'un enseignement qui comporte une phase contextualisée. Dans sa recherche pour interpréter le manque de reprise des travaux de la didactique des mathématiques dans l'enseignement ordinaire, Jeanne Bolon, que nous avons déjà citée, signale qu'un des critères que les professeurs évoquent pour justifier leur sélection des propositions d'enseignement est justement la durée. Mais cet argument ne nous semble pas suffisant pour conclure que les professeurs de collège ne peuvent pas proposer à leurs élèves un tel enseignement, pour cela ils doivent alors préparer leurs cours sans suivre les propositions des manuels, ils peuvent seulement les utiliser pour enrichir un projet plus personnel.

L'institution scolaire, dont les professeurs dépendent, organise l'enseignement et définit ses objectifs d'acquisition de savoir par les élèves. Elle confie une mission aux professeurs : atteindre les objectifs qu'elle a définis. Mais les professeurs eux-mêmes se distinguent par des conditions personnelles telle que leur formation, leur expérience professionnelle, leurs conceptions des mathématiques, de leur enseignement et de leur apprentissage. Chaque professeur s'approprie la mission qui lui est confiée. Cette appropriation passe par une transformation personnelle de la tâche prescrite en une tâche à réaliser pour satisfaire au mieux, selon lui, l'attente de l'institution qui l'emploie. L'enseignement dispensé par un professeur dépend aussi des élèves dont il a la charge, de leurs connaissances, de leur rapport à l'école. La représentation qu'un professeur a de sa classe vient donc croiser ses conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage, il effectue les choix nécessaires à l'exercice de son métier. Cette approche du travail de l'enseignant, avant même d'entrer dans la classe, rejoint les analyses de l'activité centrées sur la tâche que suggère la psychologie ergonomique. Nous ne l'avons utilisée que très modestement dans l'analyse préalable de l'enseignement de la multiplication des décimaux car le professeur que nous avons considéré était fictif. Nous l'exploiterons plus largement dans le chapitre suivant pour interpréter les projets d'enseignement, bien réels cette fois, des professeurs que nous avons observés dans leur classe.

CHAPITRE 5

ANALYSE DES SCÉNARIOS RECONSTITUÉS À PARTIR DE LEURS DÉROULEMENTS

Sommaire du chapitre 5

1. Les scénarios, quels enjeux pour les professeurs ?

Les champs mathématiques des scénarios des séquences observées

Les stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs observés

Première évaluation des enjeux des scénarios élaborés par les professeurs

2. Convergence des choix des professeurs au niveau global

“ Principe ” de conformité au programme officiel

Trois principes pour délimiter le champ mathématique d'une séquence

Quatre principes pour élaborer une stratégie d'enseignement

Une stratégie d'enseignement pour aider à l'animation du scénario

Conclusions sur les choix des professeurs au niveau global

3. Diversité des choix des professeurs au niveau local

La première fois que les élèves multiplient deux décimaux

La question de la technique opératoire

L'étude des propriétés de la multiplication

Les situations multiplicatives

Les exercices donnés par les enseignants

Les phases d'institutionnalisation

Conclusions sur les choix des professeurs au niveau local

Conclusions sur les scénarios élaborés par les professeurs

L'activité professionnelle de l'enseignant comporte, en amont du travail en classe, la programmation de l'enseignement sur l'année scolaire, la préparation des séquences et de l'évaluation des acquisitions des élèves... Pour les professeurs qui exercent leur métier depuis plusieurs années, ce travail se nourrit de leur expérience. Une étude des pratiques d'enseignants doit donc prendre en compte l'activité de préparation des cours à double titre : elle fait partie du travail de l'enseignant et elle repose sur des connaissances professionnelles dont certaines sont issues de la pratique. Ce chapitre de notre recherche sur les scénarios répond à deux objectifs majeurs. Le premier est de confronter les projets des professeurs, d'une part aux différentes propositions publiées pour enseigner la multiplication des décimaux que nous avons étudiées au chapitre 3, et, d'autre part, aux résultats obtenus par l'analyse préalable de cet enseignement en sixième, analyse que nous avons menée au chapitre 4. Le second objectif est de déterminer des régularités dans ces projets et d'explorer ainsi les connaissances que les professeurs utilisent quand ils préparent leur cours.

Comme nous l'avons déjà dit, nous avons choisi de ne pas participer à la préparation des séquences ni même d'y assister. Nous n'avons donc pas d'accès direct à cette activité. Nous pensons qu'un tel accès est très difficile car cette activité professionnelle est, dans des conditions normales, complètement privée. Nous avons préféré ne pas la perturber par notre présence. Nous voulions éviter, entre autres, qu'un professeur réponde à ce qu'il pense être l'attente d'un chercheur en didactique des mathématiques ou à des consignes données par des formateurs ou des inspecteurs.

Nous restreignons donc notre étude à celle du produit de ce travail préparatoire à la classe : le scénario de la séquence. N'ayant pas non plus demandé à chaque professeur de mettre par écrit son projet pour cette séquence ou de nous le raconter avant la classe, nous reconstituons le scénario à partir du déroulement de la séquence. Le déroulement comprend des éléments de préparation comme les documents fournis aux élèves. Il comprend aussi des éléments où peuvent se mêler la préparation et des improvisations qui correspondent à des adaptations aux réactions des élèves de la classe. Aussi, pour nous assurer que notre reconstitution correspond bien au projet de l'enseignant, nous l'avons soumise à son approbation

lors d'un entretien. Cette étape méthodologique de notre travail pour reconstituer les projets nous a permis aussi de recueillir quelques arguments des professeurs qui nous ont livré ce qu'ils avaient pensé pour élaborer le scénario de cette séquence. Sans doute certaines recompositions *a posteriori* ont été tentées par les professeurs pour justifier leur démarche, néanmoins nous estimons les conséquences de ce phénomène comme mineures comparées à celles qu'aurait entraînée notre participation à l'élaboration du projet.

Différentes recherches ont été menées sur l'activité de préparation des cours. Nous allons utiliser certains de leurs résultats pour choisir les informations, à extraire du déroulement des séquences, qui permettront d'en reconstituer les scénarios. Dans son ouvrage intitulé *L'enseignant expert*, François V. Tochon consacre un chapitre à la planification des cours, nous en retiendrons certains éléments ²⁰² :

Les recherches sur les objets sur lesquels portent les décisions des enseignants au moment de planifier indiquent que (.)

a) les enseignants consacrent la plus grosse partie de leur temps au contenu à enseigner ;

b) vient ensuite, par ordre d'importance, la stratégie d'enseignement ;

c) en revanche, le choix du matériel, les réactions et activités des élèves et, en très faible proportion la planification des objectifs, occupent très peu de temps. Ces chercheurs notent enfin que plus les enseignants sont à l'aise avec le contenu (et donc plus ils sont compétents dans leur connaissance du sujet), moins ils s'y appesantissent et plus ils investissent de temps dans les stratégies d'enseignement.

Ces résultats se retrouvent dans la préparation des cours de mathématiques. Dans un article consacré aux pratiques des professeurs, Aline Robert ²⁰³ décrit le rapport au savoir et l'activité mathématique des enseignants qu'elle distingue de celui des étudiants :

Pour les enseignants en revanche, il s'agit, dans un premier temps, d'élaborer le texte (cohérent) du savoir ²⁰⁴ à transmettre. Il faut donc, au moins pour enseigner pour la première fois un contenu donné, trouver diverses sources (manuels, vieux cours, etc), à comparer le cas échéant, (re)comprendre à la fois les démonstrations et ce qui est en jeu plus globalement. Puis il faut faire des choix d'organisation, d'exercices ²⁰⁵ et d'éléments de cours. Mais dans le même temps, il faut élaborer un scénario

²⁰² TOCHON F. V. (1993), *L'enseignant expert*, Paris : Nathan [p. 83-84]

²⁰³ ROBERT A (1999), Pratique des enseignants de mathématiques, in *Didaskalia* n°15 (123-157), De Boeck & Larcier : Louvain-la-Neuve. [p 132]

²⁰⁴ Aline Robert précise dans la note n°16 : *L'expression " texte du savoir " ne fait pas référence au seul texte écrit à la fin par les élèves ou l'enseignant mais à l'ensemble du savoir à enseigner.*

²⁰⁵ Aline Robert précise dans la note n°17 : *C'est-à-dire d'activités de recherches ou d'activités de familiarisation ou d'évaluations, sous forme d'exercices, problèmes, en classe, en module ou à la maison*

complet accroché à ce texte du savoir. Et il faut respecter le programme annuel, qui impose un certain rythme.

Ainsi, pour analyser les quatre scénarios des séquences observées, nous retiendrons trois types d'information qui correspondent à trois niveaux différents d'approche :

- une approche globale concernant les contenus mathématiques inclus dans la séquence ;
- une approche encore assez globale concernant l'organisation de ces contenus et leur présentation aux élèves ;
- une approche plus locale concernant les tâches prescrites aux élèves, en classe, par le professeur.

Détaillons en quelques lignes ces trois types d'information que nous utiliserons pour comparer les scénarios des séquences que nous avons observées.

Les contenus mathématiques inclus dans la séquence

En référence aux instructions officielles ou aux manuels, en fonction de ce qu'il pense qu'il doit enseigner durant l'année scolaire, le professeur qui prépare son cours, définit ce qui fera partie de la séquence et ce qui sera abordé ultérieurement. Il peut aussi hiérarchiser les contenus d'enseignement entre ceux qu'il se contentera de faire rencontrer aux élèves durant la séquence et ceux pour lesquels l'apprentissage visé sera évalué. L'ensemble des contenus mathématiques que l'enseignant prévoit d'aborder durant une séquence d'enseignement est ainsi limité par ce que nous appellerons le *champ mathématique* du scénario de la séquence. Pour reconstituer le champ mathématique de chacun des scénarios, nous pointerons, dans les narrations des séquences²⁰⁶, les contenus abordés par les enseignants.

L'organisation des contenus et leur présentation aux élèves

Le professeur organise les contenus de la séquence en fonction de l'importance qu'il souhaite leur accorder, en fonction de l'ordre dans lequel il pense qu'il sera préférable de les présenter aux élèves, et en fonction des preuves et des justifications qu'il souhaite apporter aux constatations ou aux affirmations qu'il prévoit d'énoncer lui-même ou que certains élèves pourront énoncer.

Le professeur organise aussi les contenus en fonction de différents critères. En voici quelques-uns, sans que l'ordre de la présentation indique leur importance. Un premier critère concerne les justifications mathématiques des résultats qui imposent un certain enchaînement dans la présentation des connaissances pour élaborer les démonstrations. Un deuxième critère concerne le type de scénario : une situation multiplicative ne sera pas abordée de la même façon si elle est choisie pour initialiser l'étude de la multiplication des décimaux et permettre un changement de cadre ou si elle est choisie simplement pour motiver une application technique. Un troisième critère concerne le mobile de la séquence c'est-à-dire la raison, le prétexte, explicitement donné ou non aux élèves, pour

²⁰⁶ Rappelons que les narrations des séquences sont les transcriptions des enregistrements selon une méthode décrite au chapitre 1. Ces narrations figurent en annexe.

lequel ils étudieront les notions mathématiques de la séquence. Par exemple, dans les ingénieries didactiques de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin et de Guy Brousseau, si l'objectif est l'enseignement des fractions et des nombres décimaux, le mobile est la résolution de problèmes de calcul d'aire de rectangles ou d'agrandissements de figures planes. Dans la proposition de Milena Basso & Cinzia Bonotto, l'objectif est l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux et le mobile est la lecture de tickets de caisse. D'autres critères encore peuvent être mobilisés comme le choix de présenter d'abord le savoir à acquérir sous sa forme outil avant de l'institutionnaliser sous sa forme objet, etc.

Il convient donc d'identifier les choix de chaque professeur et de recomposer l'organisation des contenus abordés durant ces séquences en fonction de leur chronologie. Pour ce faire, rappelons que nous mettons en fonctionnement des outils d'analyse élaborés en didactique des mathématiques. Cette recomposition constitue ce que nous appelons la *stratégie d'enseignement* de la séquence. Elle est une conséquence des choix effectués par le professeur durant la préparation des cours mais nous verrons aussi qu'elle lui est utile, en classe, pour s'adapter aux réactions des élèves.

Les tâches prescrites aux élèves, en classe, par le professeur

Alors qu'une première approche laisserait à penser que les tâches effectivement prescrites aux élèves par le professeur durant la classe concernent exclusivement le déroulement du scénario et non le scénario lui-même, il nous semble important de les prendre en compte dans l'analyse de la préparation des cours à condition de ne retenir que ce qui concerne l'ensemble des élèves.

D'une part, un professeur expérimenté prévoit ce qui peut se passer en classe. Par exemple, l'enseignant choisira de proposer un exercice parce qu'il prévoit que des élèves éprouveront telle difficulté ou commettront telle erreur ou encore poseront telle question, et parce qu'il souhaite que cette difficulté, cette erreur ou cette question fasse précisément l'objet d'une étude complémentaire ou d'une discussion en classe. Nous illustrons ainsi l'une des raisons pour lesquelles nous n'avons pas demandé aux professeurs que nous avons observés de nous écrire leur projet. Certaines erreurs ou certaines questions d'élèves, les réponses apportées par le professeur peuvent ne pas figurer explicitement sur un document de préparation du cours tout en appartenant bien au scénario. Autrement dit, des éléments peuvent être prévus sans être écrits par le professeur sur sa fiche de préparation. Un tel observable, parce que trop partiel, ne nous semblerait pas pertinent pour notre recherche.

D'autre part, un professeur peut prévoir d'évaluer certaines compétences de ses élèves durant la séquence et de traiter ou non, d'approfondir ou non, suivant les résultats de cette évaluation, un thème lié à cette séquence. Le professeur se laisse, de cette façon, une liberté d'adaptation du scénario en fonction des élèves de sa classe. Ainsi le scénario de la séquence peut ne pas être complètement prévu avant son animation. Il est alors impossible de connaître celui que le professeur aurait élaboré si ses élèves avaient été différents ou auraient réagi différemment.

Nous analysons donc les tâches effectivement prescrites en classe par les professeurs à leurs élèves. Nous déterminons comment ces tâches s'intègrent dans

le champ mathématique de la séquence ainsi que dans la stratégie d'enseignement des professeurs.

L'analyse des scénarios d'enseignement de la multiplication des décimaux

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous analysons les quatre scénarios d'un point de vue global. Nous mettons en évidence le champ mathématique des séquences observées et les stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs. Nous comparons ces scénarios aux propositions publiées puis nous confrontons les résultats à ceux que nous avons obtenus par l'analyse préalable de cet enseignement. Rappelons que pour mener ces analyses, nous utilisons des outils issus de la didactique des mathématiques, nous les précisons le moment de ces analyses venu, dans le contexte particulier de la multiplication des décimaux.

Dans un deuxième paragraphe, en comparant les quatre projets des professeurs et en utilisant les justifications qu'ils nous ont données durant les entretiens, nous montrons que le travail d'élaboration globale du projet d'enseignement conduit à des choix communs qui reposent sur des connaissances dont certaines sont issues de leur pratique, connaissances que nous voulons déceler, au moins en partie.

Dans le troisième paragraphe, en analysant les tâches mathématiques effectivement prescrites dans les différentes classes, nous montrons que les scénarios comportent aussi des aspects très variés. Cette diversité indique qu'au-delà de la contrainte commune institutionnelle, et plus généralement sociale, qui s'exerce sur l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux dans une classe de sixième ordinaire, il reste une marge de manœuvre que les professeurs investissent pour programmer leur enseignement.

1. Les scénarios, quels enjeux pour les professeurs ?

Dans le chapitre 3, nous avons analysé les scénarios proposés dans les publications par rapport aux enjeux dont l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième est l'objet. Pour analyser les stratégies des quatre professeurs observés, nous les confrontons aux résultats obtenus sur les scénarios publiés. Pour analyser les champs mathématiques, nous utilisons les résultats de l'analyse préalable menée au chapitre 4.

Les champs mathématiques des scénarios des séquences observées

Lors de l'analyse *a priori* de l'intégration de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans la progression annuelle, nous avons repéré plusieurs domaines mathématiques auxquels la multiplication est liée ainsi que différentes fonctions de l'enseignement de cette opération. Afin de délimiter le champ mathématique de chaque scénario, nous allons donc indiquer les contenus mathématiques de ces différents domaines et les fonctions qui ont été intégrées à chaque séquence d'enseignement.

Commençons par rappeler brièvement les domaines que nous avons pointés²⁰⁷ :

- les travaux géométriques (*calcul d'aire de rectangles et de triangles rectangles*, approximation de la longueur d'un cercle avec, par exemple, $\pi \approx 3,14...$) ;
- le sens de l'écriture décimale et les changements d'unités ;
- les fractions et les fractions décimales (multiplication d'un décimal par une fraction, utilisation des fractions décimales comme *moyen de contrôle mutuel des opérations sur les nombres décimaux*) ;
- la multiplication et la gestion de données (application d'un pourcentage, d'une échelle, utilisation de l'opérateur constant de la calculatrice...) ;
- la résolution de problèmes issus de situations multiplicatives (pour permettre aux élèves d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations et des équations figurant au programme).

Rappelons enfin les trois fonctions majeures de l'enseignement de la multiplication des décimaux :

- contribuer à l'apprentissage des nombres ;
- modéliser des situations qui donnent du sens à l'opération ;
- calculer la solution de problèmes numériques qui relèvent de la multiplication.

Pour délimiter le champ mathématique des quatre séquences et pour les comparer, nous avons repéré les notions abordées en commençant par celles qui sont directement rattachées à la multiplication des décimaux (la technique opératoire, les justifications de la technique, les propriétés de l'opération...) puis en terminant par celles qui figurent dans les différents domaines du programme de sixième.

Multiplication des décimaux, technique opératoire et propriétés

Les quatre professeurs ont institutionnalisé la technique usuelle avec la "règle de la virgule". Cependant, Madame Germain a choisi de ne pas formuler cette règle indépendamment d'un exemple de décomposition des nombres décimaux pour les multiplier. Décomposition qui conduit à écrire des égalités du type : $3,5 \times 2,45 = (35 \times 0,1) \times (245 \times 0,01) = 8\,575 \times 0,001 = 8,575$. Le décalage final de la virgule n'a jamais été dissocié de son interprétation numérique que permet l'écriture de l'égalité ci-dessus.

Deux professeurs ont établi la technique usuelle : Monsieur Bombelli a utilisé des opérateurs et Madame Germain a procédé, comme nous venons de le décrire, par la décomposition des nombres décimaux en un produit d'un entier par 0,0...1. Madame Agnesi et Madame Theano ont préféré s'arrêter à une simple justification, la première enseignante a procédé par conversion d'unités, la seconde a utilisé les ordres de grandeur.

²⁰⁷ Dans l'énumération qui suit, les termes repris du programme de la classe de sixième figurent en italique

Trois professeurs ont abordé la question du contrôle du résultat obtenu et ont traité la détermination d'un ordre de grandeur. Monsieur Bombelli a dit à ses élèves qu'il préférerait en parler ultérieurement.

En ce qui concerne les propriétés de la multiplication, nous avons distingué les propriétés algébriques (commutativité et associativité), l'effet de la multiplication sur l'ordre et l'effet d'une multiplication par un facteur inférieur à 1 (supérieur à 1) un sur le multiplicande. Tous les professeurs, excepté Madame Theano, ont explicité les propriétés algébriques de la multiplication. Madame Agnesi et Madame Germain ont abordé le fait que l'ordre de deux nombres décimaux est conservé après multiplication par un nombre décimal (sous-entendu strictement positif). Enfin, tous les professeurs ont, de façon plus ou moins approfondie, traité le cas de la multiplication par un facteur inférieur à un. En revanche, aucun d'entre eux n'a abordé la multiplication d'un décimal par 0 ou par 1 qui, nous l'avons vu, pose quelques difficultés aux élèves à l'école élémentaire et qu'on utilise pourtant lorsqu'on effectue une multiplication.

Multiplication des décimaux et écritures des nombres

Comme le programme les y invite, les quatre professeurs se sont saisis de l'enseignement de la multiplication comme d'une occasion pour retravailler le sens de l'écriture décimale. Précisons que les deux premiers chapitres du manuel (les quatre professeurs utilisent le même manuel dans leur classe) reviennent sur les écritures des nombres décimaux.

Les professeurs se distinguent pourtant sur ce thème. Monsieur Bombelli, contrairement aux autres enseignants, n'a pas invité les élèves à utiliser les ordres de grandeur ou des encadrements pour estimer un produit de décimaux. Tous les professeurs, excepté Madame Theano, ont utilisé des opérateurs de multiplication ou de division par une puissance de dix pour justifier la technique opératoire ou pour mener un calcul raisonné. Un seul professeur, Madame Agnesi, a abordé les problèmes relatifs aux changements d'unités, en relation avec la notation décimale. Comme nous le verrons, ce choix ne figurait pas initialement dans le scénario. Il a été la conséquence de ce que nous pourrions appeler un "incident" : alors que le professeur ne l'avait pas prévu, certains élèves ont utilisé des conversions pour résoudre des problèmes issus de situations multiplicatives d'achat de marchandises (les données étaient le poids et le prix unitaire de ces marchandises, l'inconnue était le prix à payer). Madame Agnesi et Madame Germain ont distingué le cas de la multiplication par 0,1, 0,01 ou 0,001. Madame Germain est le seul professeur à avoir invité les élèves à utiliser une décomposition des nombres décimaux du type $d = n \times 0,0\dots 1$ où d est un nombre décimal et n est un nombre entier.

Pour les quatre professeurs, le lien entre les nombres décimaux et les fractions décimales n'a pas été traité. Il a seulement été évoqué par Madame Germain à l'occasion de la technique du calcul mental de produits dont un facteur est 0,1, 0,01, 0,5 ou 0,2... Les professeurs ont choisi de traiter le lien entre la multiplication des décimaux et les fractions décimales dans une séquence ultérieure, consacrée à

la multiplication d'un décimal par une fraction. Ce thème figure explicitement dans les programmes de sixième ainsi que dans le manuel qu'ils utilisent ²⁰⁸.

Multiplication des décimaux et situations multiplicatives

Un seul des quatre enseignants, Madame Agnesi, a choisi d'introduire la multiplication des nombres décimaux par une situation multiplicative : un problème de prix, qui est une situation d'isomorphisme de grandeurs. Rappelons que ces situations sont les plus fréquentes dans les manuels de sixième et notamment dans celui qui est utilisé dans les quatre classes observées.

Les professeurs ont donné à leurs élèves peu d'exercices portant sur des situations multiplicatives. Ces exercices sont pourtant, d'après les programmes et les compléments, l'occasion d'assurer deux fonctions de l'enseignement de la multiplication des décimaux : modéliser des situations qui donnent du sens à l'opération et calculer la solution de problèmes numériques qui relèvent de la multiplication.

Tous les enseignants se sont limités à des situations d'isomorphisme de grandeurs. Madame Germain a proposé un seul problème issu d'une situation multiplicative, ce n'est pas un problème de prix mais la conception de la multiplication qui est mobilisée est l'addition réitérée. Pour les trois autres professeurs, les situations proposées sont toutes issues des problèmes de prix. Aucun d'entre eux n'a abordé le calcul dans le cadre géométrique (aire de rectangles, problèmes d'agrandissements et d'échelles, longueur du cercle avec $\pi \approx 3,14...$) ni pour introduire l'opération, ni pour les premières applications. Ils ont donc tous choisi de revenir sur la multiplication lors d'une nouvelle séquence d'enseignement, ce qui est conforme à l'organisation des manuels de sixième et, en particulier, à celle du manuel qu'ils utilisent où un chapitre est consacré aux notions de périmètre et d'aire ²⁰⁹.

Aucun des professeurs n'a enseigné la multiplication des décimaux en relation avec la gestion de données ²¹⁰, ni pour introduire l'opération, ni pour les premières applications. Signalons que dans le manuel utilisé par ces professeurs, la gestion de données est traitée explicitement dans deux chapitres ultérieurs à celui consacré à la multiplication des décimaux ²¹¹.

Nous pourrions rapprocher ce choix et celui des auteurs du manuel. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre 3, ces auteurs proposent seulement cinq exercices issus d'une situation multiplicative. Quatre d'entre eux sont des

²⁰⁸ Chapitres 9 et 10, "Ecrire les quotients sous la forme $\frac{a}{b}$ " et "Multiplier par $\frac{a}{b}$ ", Manuel *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette [pp. 109-128]

²⁰⁹ Chapitre 12, "Du côté des aires et des périmètres", Manuel *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette. [pp. 141-160]

²¹⁰ Dans les programmes de sixième de 1995, la gestion de données concerne l'étude des situations de proportionnalité, les pourcentages ainsi que les représentations graphiques de tableau de données (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires...)

²¹¹ Chapitres 13 et 14, "Appliquer un pourcentage" et "Le point sur la proportionnalité", Manuel *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette. [pp. 161-180].

problèmes de prix, le cinquième est un problème de conversion d'unités issues de deux systèmes de mesure de longueur : le système métrique et le système anglo-saxon. Mais trois des quatre professeurs que nous avons observés ont introduit, plusieurs fois durant la séquence, des supports différents de ceux proposés par le manuel : des activités et des exercices créés par les enseignants eux-mêmes ou qu'ils ont trouvés dans d'autres manuels. Nous pensons donc que, même si le manuel a pu influencer les professeurs, le fait que les seuls exercices issus d'une situation multiplicative soient des problèmes de prix est bien un choix des enseignants. Remarquons, pour finir, que plusieurs chapitres du manuel²¹² contiennent quelques exercices issus de situations multiplicatives. Les auteurs ont sans doute choisi de programmer la modélisation de situations numériques tout au long de l'année scolaire.

Comparaison des champs mathématiques des quatre séquences

Ainsi, les professeurs que nous avons observés n'ont pas abordé, lors des séquences pour lesquelles ils nous ont invité, l'ensemble des contenus mathématiques des différents domaines que nous avons repérés. Ils ont reporté l'étude de certaines notions dans des séquences spécifiquement organisées autour d'elles. C'est le cas de tout ce qui concerne l'écriture fractionnaire des nombres décimaux et du calcul de l'aire d'un rectangle. Nous verrons si nous pouvons considérer ce report comme un choix des enseignants ou plutôt comme une contrainte, par exemple liée au manuel utilisé.

D'autres choix sont communs aux quatre professeurs. Ils ont enseigné la technique opératoire et ils ont justifié, au moins partiellement, la règle de la virgule. Ils ont rappelé le sens de la notation décimale. L'étude de chacune des propriétés de la multiplication n'a pas fait l'unanimité mais tous les quatre ont énoncé à leurs élèves l'effet de la multiplication par un nombre décimal inférieur à l'unité, effet qui fixe le domaine de validité de la propriété classique selon laquelle la multiplication agrandit le multiplicande.

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, le programme de sixième propose trois fonctions majeures pour l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux : renforcer l'apprentissage de la numération, étudier des situations qui donnent du sens à l'opération et résoudre des problèmes dont le calcul de la solution nécessite d'effectuer une multiplication. Nous constatons que deux seulement des trois fonctions de l'enseignement de la multiplication ont été prises en compte par les professeurs. Ils ont tous délaissé l'étude de situations multiplicatives et ils ont intégré les deux autres fonctions dans leur séquence de façon variable.

Le champ mathématique dessiné par les quatre professeurs peut donc se résumer ainsi : révision du sens de l'écriture décimale, technique et propriétés de la multiplication de deux décimaux, application à la résolution de problèmes de prix.

²¹² Chapitres 9, 10, 12, 13 et 14 déjà cités du Manuel *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette

Synthétisons les résultats que nous venons d'obtenir dans un tableau comparatif où nous avons coché les notions abordées par chaque professeur durant la séquence qu'il a animée avec ses élèves de sixième.

Tableau 6. Délimitation du champ mathématique des séquences observées

Contenus mathématiques	Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain
Multiplication des décimaux				
Technique opératoire (T.O.)	✓	✓	✓	✓
Démonstration ou justification de la T.O.	✓	✓	✓	✓
Estimation du produit	✓	✓		✓
Propriétés algébriques de la mult.		✓	✓	✓
Effet de la multiplication sur l'ordre		✓		✓
Multiplication par un facteur inférieur à 1	✓	✓	✓	✓
Multiplication par zéro				
Multiplication par 1				
Écritures des nombres				
Signification de l'écriture décimale	✓	✓	✓	✓
Changement d'unités du système décimal		✓		
Multiplication d'un décimal par 0,1, 0,01, 0,001...		✓		✓
Décimaux en écriture fractionnaire				
Situations multiplicatives				
Domaine numérique : isomorphisme (prix...)	✓	✓	✓	✓
Géométrie : produit de mesure (aire de rectangle)				
Géométrie : opérateur (agrandissement)				
Géométrie : composition d'opérateurs				
Gestion de données : opérateur (pourcentage)				
Gestion de données : opérateur (diagrammes)				

L'ordre choisi pour présenter les notions dans le tableau ne représente pas la chronologie des séquences, il ne correspond pas à l'organisation des objets mathématiques dans les scénarios des professeurs

Les stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs observés

Après avoir comparé les scénarios des quatre professeurs par le champ mathématique qu'ils ont déterminé pour leur séquence, et après avoir montré que ce champ leur était globalement commun, nous allons nous attacher à comparer les scénarios par l'organisation des objets mathématiques étudiés durant la séquence. Cette organisation est largement déterminée par la stratégie d'enseignement élaborée par chacun des professeurs. La stratégie imprime la ligne directrice de la séquence, la trajectoire de référence pour l'animation du scénario en classe. La stratégie qu'un professeur élabore pour l'enseignement d'une notion découle de ses choix fondamentaux issus de connaissances épistémologiques, mathématiques, pédagogiques, didactiques...

Pour retrouver la stratégie d'enseignement des quatre professeurs que nous avons observés, nous avons mené un travail qui se décompose, pour chacun d'entre eux, en cinq étapes :

- nous sommes parti de la narration de sa séquence et des notes que nous avons prises durant le déroulement et durant les quelques échanges que nous avons eus avec lui. Nous avons alors tenté d'élaborer un réseau cohérent d'arguments aux choix du professeur ;

- nous avons rédigé ces arguments sous la forme d'une redéfinition de la tâche prescrite par les programmes en une tâche pour l'enseignant²¹³. Nous avons ensuite décrit la stratégie d'enseignement ainsi que les conséquences inhérentes à cette stratégie sur le scénario ;

- nous avons proposé au professeur le texte qui concernait²¹⁴ son enseignement et nous lui avons demandé d'estimer si ce texte était fidèle à ce qu'il avait projeté de faire durant la séquence comme à ce qu'il avait été contraint de faire. Nous lui avons aussi demandé de corriger ce qui lui semblait ne pas correspondre au projet qu'il s'était fixé ou à son animation ;

- nous avons eu alors un entretien avec le professeur, entretien au cours duquel nous avons échangé à propos du texte que nous lui avons proposé et des corrections qu'il souhaitait apporter ;

- enfin nous avons remanié le texte en fonction de cet entretien. En définitive, les textes ont été très peu modifiés, seules quelques précisions tendant à renforcer la cohérence du réseau d'arguments ont été ajoutées

Nous allons donc présenter les quatre stratégies d'enseignement des professeurs ainsi que leurs conséquences sur le scénario, et notamment sur le champ mathématique. En présentant la stratégie de chaque enseignant, nous avons voulu restituer la pensée relative aux décisions qu'il a prises en choisissant les contenus et leur organisation. Nous exprimerons cette pensée en distinguant :

- les décisions relatives au contenu à enseigner, c'est-à-dire celles qui conduisent à la redéfinition de la tâche prescrite par les programmes. Rappelons que pour les déterminer, nous utilisons conjointement les traces de ces décisions sur le déroulement de la séquence et les échanges que nous avons eus avec le professeur ;

- les décisions relatives à la stratégie d'enseignement qui se traduisent en partie par le choix des tâches proposées aux élèves et leur chronologie.

Enfin, nous évaluerons les conséquences de la stratégie sur le scénario de la séquence.

Nous allons donc analyser les stratégies, d'abord l'une après l'autre, ce qui évitera de morceler les différentes décisions prises par ces quatre professeurs pour préparer leurs cours, et ce qui permettra de mieux rendre compte de la cohérence de leurs projets. Alors nous serons en mesure de les comparer.

²¹³ Nous empruntons ici le vocabulaire utilisé en psychologie ergonomique, notamment par Jacques Leplat et par Janine Rogalski

²¹⁴ Cette proposition a été soumise aux professeurs durant l'année scolaire qui a suivi celle de notre visite.

La stratégie de Madame Theano, conséquences sur le scénario

♦ *Redéfinition, par Madame Theano, de la tâche prescrite*²¹⁵

Les résultats des évaluations l'ont montré, les élèves réussissent moins bien à calculer le produit de deux décimaux que celui de deux entiers. Cela justifie le transfert de la multiplication des décimaux du cycle 3 de l'école élémentaire en classe de sixième. La règle de la virgule est assez simple à appliquer. Pourtant plusieurs raisons peuvent contribuer à expliquer les difficultés de certains élèves. Ils confondent la règle de la virgule de la multiplication avec celle de l'addition, surtout quand les facteurs ont le même nombre de décimales. Leurs difficultés avec la notation décimale resurgissent, ils se trompent parce qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils font. Ils risquent aussi d'oublier la virgule parce qu'ils doivent commencer par ne pas en tenir compte. La règle de la virgule de la multiplication est mal interprétée par certains élèves qui doutent lorsque le produit des nombres entiers est un multiple d'une puissance (strictement positive) de dix : faut-il tenir compte des zéros inutiles pour déterminer le nombre de décimales du produit ?

Il faudra étudier en classe toutes les difficultés que la règle de la virgule pose pour que les élèves l'utilisent de façon sûre et qu'ils évitent les erreurs généralement constatées dans les évaluations, quelle que soit l'origine de ces difficultés pour chacun d'entre eux. Il faudra aussi revoir le sens de la notation décimale. Cependant, pour la multiplication, la démonstration de la règle de la virgule repose sur la notion de fraction qui n'est pas suffisamment acquise en début de sixième. Et la multiplication des fractions est au programme de cinquième. En conséquence, la démonstration de la règle de la virgule sera trop ardue. Il faudra donc surtout leur donner un moyen de contrôler que la virgule est bien placée. L'ordre de grandeur répond à cette nécessité. Il a l'avantage de constituer une démarche générale de contrôle des résultats et d'entraîner au calcul mental. En outre, l'ordre de grandeur permet de travailler la notation décimale et de remettre un peu la partie décimale "à sa place" : alors qu'une très grande attention lui est accordée à l'école élémentaire, elle est souvent négligeable par rapport à la partie entière.

L'utilisation de la calculatrice et la résolution de problèmes sont également préconisées par les programmes. Mais ce n'est pas la résolution de problèmes qui permettra aux élèves d'apprendre la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux. Des problèmes seront proposés pour que les élèves apprennent à reconnaître le modèle multiplicatif. Les calculs seront effectués à la main comme entraînement à la technique opératoire et seront vérifiés avec les ordres de grandeur et la calculatrice.

♦ *Stratégie d'enseignement*

1) Revoir les ordres de grandeur sur des exemples de contrôle de calculs numériques et évaluer la capacité des élèves à résoudre un problème multiplicatif de base.

²¹⁵ Attention, le point de vue défendu dans le paragraphe qui suit est bien celui de Madame Theano

2) Amener les élèves à placer la virgule au produit de deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur et les faire conjecturer la règle de la virgule.

3) Présenter la technique opératoire et exiger qu'ils vérifient leur résultat avec l'ordre de grandeur.

4) Donner aux élèves des occasions de se tromper avec la règle de la virgule pour revenir sur les difficultés d'interprétation qu'elle pose et insister encore sur la nécessité de contrôler avec les ordres de grandeur.

5) Compléter la séquence par du calcul mental et des problèmes numériques, sachant aussi que d'autres chapitres donneront encore l'occasion de rencontrer des problèmes multiplicatifs.

♦ *Implications sur le scénario*

Ces choix entraînent quelques conséquences sur le scénario, comme le montre d'ailleurs le déroulement de la séquence de Madame Theano.

L'enseignante devra revenir sur la technique opératoire de la multiplication des entiers. En choisissant d'utiliser les ordres de grandeur seulement de façon intuitive, elle pourra se dispenser de revoir la multiplication d'un décimal par un entier, à condition d'éviter de proposer des décimaux inférieurs à 1 dont l'ordre de grandeur proposé par les élèves risque d'être zéro et le produit estimé sera nul. Ici se pose un problème quant au champ mathématique que Madame Theano n'avait pas perçu : les exercices du manuel proposent de multiplier des facteurs dont certains sont des nombres décimaux inférieurs à 1.

La détermination d'un ordre de grandeur des facteurs conduira à une révision du sens de l'écriture décimale ainsi qu'à une interrogation sur le choix de l'ordre de grandeur. Les difficultés théoriques que pose l'utilisation des ordres de grandeur dans certains cas mettront peut-être cette méthode en concurrence avec l'utilisation d'encadrements qui est plus simple mais qui est plus longue. Cela crée un problème quant au scénario : certains élèves risquent de ne pas être convaincus par l'emploi des ordres de grandeur et d'être tentés d'utiliser d'autres méthodes qu'ils jugeraient plus simples. Dans cette hypothèse, les difficultés théoriques ne manqueront pas non plus de poser la question de la fiabilité des ordres de grandeur.

La détermination de l'ordre de grandeur du produit conduira à des activités de calcul mental.

L'utilisation des ordres de grandeur permet de conjecturer la règle de la virgule mais ne permet pas de justifier sa validité. En faisant le choix de ne pas établir la technique opératoire, Madame Theano s'expose à une demande de justification de la part des élèves. Cette demande constitue un grave problème "d'étanchéité" du scénario²¹⁶, il nous semble donc que l'enseignante fait là un pari important : elle doit être sûre que les élèves n'auront pas de demande de justification dès qu'ils sauront comment faire pour multiplier deux décimaux.

²¹⁶ Nous dirons que le scénario (ou son champ mathématique) est étanche si les tâches proposées aux élèves ne demandent pas, de leur part, une activité qui mobilise des contenus situés en dehors du champ mathématique du scénario

Enfin, il est probable que l'application de la règle de la virgule conduise à des erreurs, et donc à des questionnements. Par exemple, dans le cas où le produit des facteurs entiers est multiple d'une puissance de dix comme dans $3,4 \times 4,75$ où $34 \times 475 = 16\ 150$ donc $3,4 \times 4,75 = 16,15$; le produit possède deux décimales alors que les facteurs en possèdent trois. Ces questionnements permettront de revoir encore le sens de la numération décimale.

La stratégie de Madame Agnesi, conséquences sur le scénario

♦ *Redéfinition, par Madame Agnesi, de la tâche prescrite*

Les élèves, à l'entrée en sixième, ont déjà une pratique de la multiplication, ils doivent l'étendre au cas de deux facteurs décimaux alors qu'en CM2 le multiplicateur est toujours un nombre entier.

Sur le plan technique, il n'y a pas de changement important : au lieu de compter le nombre de décimales du multiplicande, on doit simplement compter le nombre de décimales des deux facteurs. Des élèves rencontreront des difficultés d'interprétation de la règle de la virgule entre le nombre de décimales des facteurs et le nombre de décimales du produit. Certains ne manqueront pas de confondre la règle de la virgule de la multiplication avec celle de l'addition dans le cas de deux facteurs ayant le même nombre de décimales. Pour les élèves qui se trompent, il faudra proposer un moyen de contrôler la place de la virgule, par exemple avec l'ordre de grandeur du produit. Il y a aussi la calculatrice, mais elle a des limites et dans ce cas son usage n'apporte rien aux connaissances des élèves.

Au niveau du sens de la multiplication, les élèves ne pourront plus procéder par addition répétée mais ils devront comprendre que la valeur des nombres n'a pas d'influence sur le modèle de la situation. Les programmes préconisent un enseignement à partir de problèmes, ce sera une occasion de le leur montrer. Cependant, un multiplicateur inférieur à 1 peut gêner la compréhension de la multiplication. Il sera alors pertinent de relier la multiplication par 0,1, 0,01... à la division par 10, 100... Ces activités permettront de réviser la numération décimale.

Enfin, pour faire le tour de la question mathématique, il faudra leur indiquer le vocabulaire et les propriétés algébriques de la multiplication. Pour qu'ils les comprennent et qu'ils les retiennent, il faudra qu'ils les utilisent, par exemple pour calculer mentalement. Le calcul mental est un objectif du programme.

♦ *Stratégie d'enseignement*

1) Sur des exercices, réviser les connaissances sur la multiplication acquises à l'école élémentaire : technique de la multiplication de deux entiers ou d'un décimal par un entier et utilisation des ordres de grandeur pour contrôler un calcul.

2) Proposer un problème multiplicatif en faisant changer les valeurs des grandeurs : les deux entières, l'une entière et l'autre décimale, puis les deux décimales. Cela leur montrera qu'on ne change pas d'opération et motivera l'étude de la multiplication des décimaux.

3) Appliquer la technique opératoire, par exemple dans le cas de résolution de problèmes, et insister sur la règle de la virgule en proposant des exercices spécifiques. Identifier les erreurs d'interprétation de cette règle.

4) Détailler le cas particulier des multiplications par 0,1, 0,01...

5) Compléter par le vocabulaire et les propriétés mathématiques.

♦ *Implications sur le scénario*

Les révisions prévues sont nécessaires pour que les élèves puissent résoudre le problème introductif et éventuellement contrôler leurs résultats par les ordres de grandeur.

Pour ce problème introductif, il faut choisir une situation où les grandeurs puissent être décimales. Il faut aussi que la situation soit familière aux élèves afin qu'ils soient capables de démarrer la série sans difficulté. Les problèmes de prix répondent au premier critère, et sont ceux que les élèves connaissent le mieux. Ici se pose un problème d'étanchéité du scénario. Contrairement à l'intention des auteurs des ingénieries didactique, Madame Agnesi n'envisageait pas que les élèves "fabriquent" le produit des décimaux, elle pensait que les élèves lui demanderaient comment faire, qu'elle montrerait la technique puis, éventuellement, qu'elle la justifierait. Pourtant, des élèves familiers des problèmes de prix et des conversions peuvent essayer, pour déterminer le prix à payer, de convertir les mesures décimales en mesures entières par un changement d'unité.

Que les élèves découvrent la règle de la virgule par des conversions ou que Madame Agnesi la leur fournisse, le scénario ne prévoit pas de justification de cette règle. Comme Madame Theano, Madame Agnesi doit supposer qu'il n'y aura pas de demande de ce type de la part des élèves, faute de quoi une telle délimitation du champ mathématique du scénario serait gravement compromise.

Comme dans le scénario de Madame Theano, l'utilisation des ordres de grandeur des facteurs posera des questions quant à leur fiabilité mais aussi sur le sens de l'écriture décimale ainsi que sur le choix de l'ordre de grandeur. L'utilisation des ordres de grandeur risque de se retrouver en concurrence avec des méthodes plus simples comme l'utilisation d'encadrements. On risque de retrouver aussi la question de la fiabilité des ordres de grandeur.

La stratégie de Monsieur Bombelli, conséquences sur le scénario

♦ *Redéfinition, par Monsieur Bombelli, de la tâche prescrite*

En classe de sixième, il s'agit de prolonger la multiplication de deux facteurs dont l'un est un entier et dont l'autre peut être un nombre décimal à la multiplication de deux facteurs décimaux. Pour établir la méthode, le manuel propose l'utilisation d'opérateurs. Cela permet de prolonger directement la multiplication des entiers à celle des décimaux, le cas où un facteur est décimal est un cas particulier du cas où les deux le sont.

L'application de la règle de la virgule peut poser des problèmes d'interprétation. Il conviendra donc de proposer de nombreux exercices de technique opératoire pour que les élèves s'entraînent suffisamment. Il conviendra aussi d'aborder ces problèmes en classe sans déstabiliser la technique générale.

Le manuel propose un "entraînement" au calcul mental. Un paragraphe doit être consacré aux cas particuliers à connaître pour calculer mentalement : multiplication par 0,1, 0,01 ... ou par 0,5, 0,25.

Pour appliquer cette nouvelle notion, il faudrait aussi proposer des problèmes issus de situations multiplicatives mais le chapitre sur la proportionnalité en donnera l'occasion.

♦ *Stratégie d'enseignement*

1) Dans les activités préparatoires proposées par le manuel, traiter celle qui concerne directement la leçon.

2) Donner des applications de calcul numérique sans passer trop de temps à les corriger en classe.

3) S'attarder davantage sur des erreurs d'élèves pour bien expliquer comment s'applique la règle de la virgule. Choisir dans le manuel des exercices pour corriger des erreurs-types commises par des élèves fictifs ou qui tendent des pièges.

4) Noter le cours.

5) Présenter les techniques pour calculer mentalement : utilisation des propriétés algébriques de la multiplication et de produits particuliers (un facteur est égal à 0,5 ou 0,25...). Les appliquer.

♦ *Implications sur le scénario*

Le choix d'utiliser les opérateurs pour justifier la technique opératoire impose au professeur de revoir la technique de la multiplication de deux entiers mais pas celle d'un décimal par un entier qui peut être traitée comme un cas particulier de la nouvelle technique. Il nécessite également que les élèves sachent multiplier et diviser par 10, 100 ou 1 000, et donc que le professeur revienne sur la notation décimale. Enfin, comme nous l'avons déjà dit, l'application de la règle de la virgule conduira probablement à des questionnements à propos du sens de l'écriture décimale.

Ce scénario ne présente pas plus de contrainte, le calcul mental préconisé qui n'est pas motivé par la stratégie d'enseignement devra faire l'objet d'une activité indépendante.

L'utilisation d'opérateurs pour justifier la technique opératoire pose tout de même quelques difficultés relatives au champ mathématique du scénario. Les opérateurs sont sensés justifier la règle de la virgule mais pourquoi, dans un produit de deux facteurs, ayant multiplié l'un des facteurs par 10 et l'autre facteur par 100, le produit se trouve-t-il multiplié par 1 000 ? La dissimulation de la commutativité et de l'associativité par la présentation du manuel laisse dans l'ombre une étape importante du raisonnement. Monsieur Bombelli, comme les auteurs du manuel estiment que les élèves ne soulèveront pas la question, soit parce que la réponse leur semblerait évidente (ce dont les déroulements nous permettent de douter) soit parce que les élèves se contenteraient de savoir comment faire. Remarquons que cette dernière supposition rejoint celles de Madame Theano et Madame Agnesi qui n'ont pas prévu d'aborder la justification de la règle de la virgule dans leurs scénarios.

La stratégie de Madame Germain, conséquences sur le scénario

♦ *Redéfinition, par Madame Germain, de la tâche prescrite*

Les résultats des évaluations nationales comme celles de l'APMEP montrent que les élèves réussissent nettement moins bien à calculer le produit de deux décimaux que celui de deux entiers. Le lien entre leurs erreurs lors des résolutions de problèmes et la reconnaissance du modèle multiplicatif d'une situation n'est pas très clair. Ces difficultés expliquent les récents changements des programmes.

Plusieurs raisons peuvent contribuer à expliquer les erreurs de certains élèves.

- Une confusion entre la règle de la virgule de la multiplication avec celle de l'addition quand les facteurs ont le même nombre de décimales.
- Une mauvaise interprétation de la règle de la virgule liée à une conception erronée de l'effet de la multiplication sur la "nature des nombres". Dans une multiplication, si les deux facteurs sont entiers alors le produit est un nombre entier. Les élèves sont enclins à en déduire que si l'un des facteurs est décimal et a trois chiffres après la virgule, alors le produit n'est pas un nombre entier, c'est un nombre décimal, lui aussi à trois chiffres après la virgule. On peut penser que c'est l'importance très grande que les élèves accordent à la partie décimale du nombre qui est à l'origine de cette conception ; cette importance étant liée à la nouveauté des questions relatives à la partie décimale. Un des enjeux de l'enseignement de la multiplication des décimaux sera donc de restituer son importance à la partie entière.
- Peut-être aussi certains élèves se trompent-ils parce qu'ils ne savent pas ce qu'ils font : leur méconnaissance de la notation décimale les empêche de contrôler leur activité par la réflexion.
- Ils risquent aussi d'oublier la virgule parce qu'ils doivent commencer par ne pas en tenir compte.

Pour enseigner la multiplication des décimaux, il faut donner du sens au décalage de la virgule. Il y a différentes façons de le faire. En partant d'activités où les élèves cherchent à placer la virgule au produit des nombres entiers associés aux facteurs décimaux, ces différentes façons peuvent émerger. Ces façons sont l'utilisation d'opérateurs, d'approximations du produit, des fractions décimales ou de décomposition d'un nombre décimal en un produit d'un entier par une puissance négative de dix écrite sous la forme $0,0\dots01$. L'utilisation de fractions décimales est prématurée compte tenu des connaissances des élèves sur les fractions. Les trois autres sont pertinentes. L'utilisation d'opérateurs dissimule une partie du raisonnement et ne correspond donc pas au but recherché. L'utilisation d'approximation ne conduit pas à l'élaboration de la technique opératoire, mais on pourra les utiliser pour les vérifications. En reliant la multiplication par $0,0\dots01$ à la division par $10\dots0$ et en décomposant les facteurs d'un produit de deux décimaux, on peut, en utilisant la commutativité et l'associativité de la multiplication, aboutir à la règle de la virgule de façon raisonnée.

♦ *Stratégie d'enseignement*

1) Sur des exemples, associer la multiplication par 0,1 à la division par 10, la multiplication par 0,01 à la division par 100...

2) Pour contrôler des multiplications du niveau de l'école élémentaire, utiliser les ordres de grandeur.

3) Mener une réflexion quant à la conception de l'effet de la multiplication sur la "nature" des nombres.

4) Sur des exemples numériques, placer la virgule pour déterminer le produit de deux décimaux connaissant celui des entiers associés. Toute liberté de moyen sera laissée aux élèves. Les différentes méthodes seront discutées en classe sauf celle qui consiste à admettre une conjecture de la règle de la virgule : les méthodes devront être fondées.

5) Décontextualiser les différentes méthodes pour enrichir la connaissance de la multiplication.

6) Institutionnaliser la technique opératoire en relation avec la décomposition des nombres décimaux.

♦ *Implications sur le scénario*

Ce choix de scénario demande au professeur de mener différentes approches de front. Toute tentative d'un élève pour aboutir à la position de la virgule au produit de deux décimaux étant jugée *a priori* acceptable.

Parmi les moyens que les élèves pourront élaborer pour multiplier deux décimaux, l'utilisation des ordres de grandeur pour placer la virgule pourra être mobilisée par des élèves qui auront compris que les produits $3,4 \times 4,75$ et 34×475 s'écrivent avec les mêmes chiffres mais qui, par ailleurs, ne sauraient pas décomposer les décimaux ($3,4 = 34 \times 0,1$ et $4,75 = 475 \times 0,01$) ou multiplier 0,1 par 0,01. Nous avons vu, en étudiant le scénario de Madame Theano, que les ordres de grandeur posent des difficultés théoriques que ne posent pas les encadrements

Les élèves pourront utiliser des opérateurs correspondant aux décalages de la virgule et utiliser leur connaissance sur la multiplication d'un décimal par un entier. Le déroulement montre que certains d'entre eux ont élaboré des procédures du type : $34 \times 475 = 16\,150$ donc $34 \times 0,475 = 16,150$ or $3,4 \times 4,75 = 34 \times 0,475$ parce que "on ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10"²¹⁷.

Si la situation s'y prête – dans le cas où l'un des facteurs est égal à 0,5, 0,2, 0,25... –, comme dans la séquence de Madame Theano, les techniques de calcul mental pourront apparaître spontanément si certains des élèves les ont déjà observées à l'école élémentaire.

La méthode de justification de la technique opératoire retenue par Madame Germain repose sur la connaissance – et donc sur des révisions – de la multiplication d'un entier par 0,1, 0,01, 0,001... Cette connaissance doit être suffisamment approfondie pour permettre d'écrire les décompositions des nombres

²¹⁷ Cette règle est l'une des "petites règles pour faciliter les multiplications" institutionnalisées dans la classe de Madame Germain

décimales signalées ci-dessus. Ces écritures ne manqueront pas d'entraîner des révisions du sens de la notation décimale. Puis les élèves devront utiliser la commutativité et l'associativité de la multiplication. Enfin les élèves devront apprendre à multiplier entre eux des puissances négatives de dix c'est-à-dire des nombres de la forme $0,0\dots 1$.

A propos de la commutativité et de l'associativité de la multiplication, le scénario ne prévoit pas de justification. Sans doute Madame Germain pense-t-elle que les élèves n'auront pas de difficulté à admettre ces propriétés pour les utiliser ou même qu'ils peuvent les utiliser sans s'y référer explicitement.

Cette supposition rejoint celle que nous avons déjà émise au sujet des scénarios de Madame Theano et de Madame Agnesi qui ne prévoyaient pas de justification de la technique opératoire : si les élèves savent comment faire, il y a peu de chance pour qu'ils demandent pourquoi.

En choisissant un tel scénario, le professeur devra prévoir que la règle de la virgule soit conjecturée à partir de la multiplicité des exemples. Nous pouvons donc déjà envisager deux possibilités pour Madame Germain : énoncer la règle de la virgule et, éventuellement, la justifier mais cela constituerait une modification du scénario, ou bien ignorer la règle de la virgule jusqu'à ce qu'elle soit établie et c'est bien ce qui est prévu. Le scénario de Madame Germain se distingue fondamentalement de ceux de ses collègues à ce sujet : la technique opératoire n'est pas conjecturée d'abord, elle est l'aboutissement du déroulement de la séquence. Il semble donc que Madame Germain souhaite accumuler des matériaux pour construire la technique opératoire et qu'elle préférera éviter que la règle de la virgule ne surgisse trop tôt, sans doute parce qu'elle sait qu'il serait beaucoup plus difficile, ensuite, de demander aux élèves de s'interroger sur sa validité.

Comparaison des stratégies d'enseignement

Les stratégies d'enseignement élaborées par les quatre professeurs comportent de nombreux points communs mais aussi quelques divergences. Les détails des descriptions des stratégies étaient nécessaires pour comprendre la démarche de chaque professeur mais nous avons besoins de les mettre en parallèle suivant les quelques critères qui nous ont déjà permis de comparer les scénarios issus des diverses publications que nous avons étudiées : type de scénario²¹⁸, prérequis, problème d'introduction de la notion nouvelle, justification de la technique opératoire, place de l'institutionnalisation dans la séquence, propriétés étudiées, problèmes issus de situations multiplicatives abordés. En outre les professeurs ont

²¹⁸ Rappelons que nous avons distingué trois types de scénarios :

Premier type : le problème du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} n'est pas posé, la technique opératoire est admise ou justifiée par le professeur.

Deuxième type : le problème du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} est posé par l'étude d'au moins une situation ou/et la technique opératoire est justifiée au moins en partie par l'élève mais il n'y a pas de lien entre la situation et la technique.

Troisième type : le problème du prolongement de la multiplication de \mathbb{N} à \mathbb{D} est posé par l'étude d'au moins une situation multiplicative, la technique opératoire est justifiée *en relation* avec la situation.

prévu un moyen de contrôle du résultat ainsi que des analyses d'erreurs commises par des élèves, réels ou fictifs. Nous allons ici nous contenter de dresser un bilan comparatif de ces stratégies, nous développerons une analyse des enjeux mathématiques et didactiques plus précise dans le prochain paragraphe.

Trois professeurs ont élaboré un scénario du deuxième type c'est-à-dire où le problème du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} est posé par l'étude d'au moins une situation (cas de Madame Agnesi) ou bien la technique opératoire est justifiée au moins en partie par l'élève (cas de Madame Theano et de Madame Germain) mais (la question se posait seulement pour Madame Agnesi) il n'y a pas de lien entre la situation et la technique. Monsieur Bombelli a élaboré un scénario du premier type puisque le problème du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} n'est pas posé et la technique opératoire est justifiée par le professeur.

En ce qui concerne les prérequis, tous les professeurs prévoient de s'appuyer sur les connaissances de leurs élèves en ce qui concerne la notation décimale. En outre, quelques révisions sont prévues par trois professeurs : la notion d'ordre de grandeur pour Madame Theano, la multiplication d'un entier par un décimal pour Madame Agnesi et la multiplication par une puissance négative de dix (nombre de la forme $0,0\dots 1$) pour Madame Germain.

L'introduction de la nouvelle notion est décontextualisée dans tous les scénarios sauf celui de Madame Agnesi qui prévoit de proposer des problèmes de prix à ses élèves. Tous les professeurs prévoient de donner quelques éléments de justifications de la technique opératoire mais chacun d'entre eux a choisi une méthode particulière. Ces méthodes figuraient déjà dans les publications étudiées, celle de Madame Germain est une adaptation de la multiplication de deux fractions décimales en utilisant une autre représentation symbolique des décimaux. En revanche la méthode de Madame Theano est originale même si les instructions officielles invitent les professeurs à saisir des occasions d'enseigner aux élèves l'utilisation des ordres de grandeur pour contrôler les résultats qu'ils proposent.

~~Ici se situe l'essentiel des projets élaborés par les professeurs. On ajoutera~~ enfin l'étude par trois d'entre eux de quelques propriétés de la multiplication utilisées pour calculer mentalement (Madame Agnesi et Monsieur Bombelli) ou pour établir la technique opératoire (Madame Germain). Les professeurs ont également prévu de proposer à leurs élèves quelques problèmes de calcul mental ou raisonné et des problèmes issus de situations multiplicatives, essentiellement des problèmes de prix.

Résumons cette comparaison synthétique dans un tableau avant d'analyser plus en détail les enjeux mathématiques et didactiques des projets des quatre professeurs que nous avons observés.

Tableau 7. Comparaison des stratégies d'enseignement des quatre professeurs observés

	Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain
Type de scénario	2	2	1	2
Révisions	Ordre de grandeur, notation décimale	Multiplication par un décimal	Aucune	Multiplication par 0,0...1
Problème d'introduction	Décontextualisé	Problème de prix	Aucun	Décontextualisé
Justification de la T.O.	Ordre de grandeur donne partie entière	Conversion d'unités de mesure	Opérateurs appliqués aux facteurs	Décomposition $d = n \times 0,0...1$
Institutionnalisation T.O.	Deuxième séance	Deuxième séance	Première séance	Dernière séance
Contrôle du résultat	Calcul approché	Calcul approché	Non	Calcul approché
Analyse d'erreurs	Règle de la virgule	Règle de la virgule	Technique	Nature du produit
Propriétés algébriques	Pas étudiées	Admises, utilisées	Utilisées pour le calcul mental	Admises et utilisées pour élaborer T.O.
Réinvestissements	Problèmes ; calcul mental	Multiplication par 0,0...1	Calcul mental	Aucun

Première évaluation des enjeux des scénarios élaborés par les professeurs

La présentation du champ mathématique et de la stratégie d'enseignement de la séquence permet déjà une première évaluation des enjeux des scénarios élaborés par les professeurs que nous avons observés. Une première évaluation seulement car, du point de vue didactique, il nous semble indispensable de tenir compte du déroulement effectif de la séquence et pas seulement du scénario prévu par l'enseignant. En reprenant les termes d'Aline Robert ²¹⁹

Ainsi, nous nous intéressons d'abord à ce qui est proposé aux élèves pendant une séance en termes de contenus mathématiques, en y incluant la gestion correspondante adoptée par l'enseignant en classe (...) La fréquentation des mathématiques est *aussi* ²²⁰ liée à tous les accompagnements qui sont donnés en classe.

Dans les deux chapitres suivants, nous nous intéresserons aux activités effectives des élèves pendant le déroulement des séquences puis aux interactions pédagogiques entre les élèves et leur professeur. Nous abordons maintenant cette première évaluation.

Evaluation des enjeux mathématiques dans les séquences observées

Du point de vue des enjeux mathématiques de la séquence, l'analyse du champ et de la stratégie suffit à l'évaluation. Nous constatons que tous les professeurs observés ont présenté la technique opératoire de la multiplication des nombres décimaux à leurs élèves, deux d'entre eux ont également proposé une preuve de la validité de cette technique. Tous les professeurs ont présenté quelques propriétés de la multiplication, aucun d'entre eux n'a recherché l'exhaustivité. Les propriétés ont été abordées suivant un critère d'utilité : commutativité et associativité pour permettre de justifier la technique opératoire ou des techniques

²¹⁹ ROBERT A (1999), *Op. cit.* [p. 140]

²²⁰ C'est nous qui soulignons.

de calcul mental, effet de la multiplication sur l'ordre pour permettre des comparaisons ou des encadrements. Remarquons cependant que la multiplication par 0 ou par 1 n'a été abordée par aucun des quatre professeurs alors même qu'elle est utilisée pour effectuer des multiplications. La relation avec la multiplication des fractions n'a pas été abordée.

En ce qui concerne la validation de la technique opératoire et des propriétés étudiées, nous constatons certains "points aveugles" c'est-à-dire des faits indispensables à une justification correcte qui ne sont pourtant pas traités. Monsieur Bombelli utilise des opérateurs pour justifier la technique opératoire, cette méthode repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication mais ces deux propriétés ne sont pas énoncées ni établies, elles sont même masquées par un artifice de présentation. Madame Germain utilise une décomposition des nombres décimaux sous la forme d'un entier multiplié par une puissance négative de dix, sa méthode repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication ainsi que sur le calcul du produit de deux puissances négatives de dix. Ces trois points sont effectivement explicités mais aucun d'entre eux n'est établi.

Nous concluons que les objets mathématiques étudiés dans les quatre séquences sont pratiquement les mêmes et répondent à un critère d'utilité pour le calcul mental ou le calcul de la solution d'un problème issue d'une situation multiplicative. En outre les professeurs, quel que soit le degré de justification choisi de la technique opératoire, ne proposent aucune démonstration complète à leurs élèves.

Evaluation des enjeux didactiques dans les séquences observées

Le champ mathématique et la stratégie d'enseignement de la séquence permettent d'analyser, au moins partiellement, les projets des professeurs suivant les moyens utilisés pour favoriser certains apprentissages. Pour l'introduction d'une nouvelle notion, on est attentif, en didactique des mathématiques, à certaines caractéristiques de l'enseignement. Ces caractéristiques ont permis d'élaborer des ingénieries, ingénieries qui relèvent d'un enseignement expérimental. Nous nous proposons d'utiliser ces mêmes caractéristiques pour comparer les projets d'enseignement des professeurs que nous avons observés bien que ces projets concernent un enseignement ordinaire.

Nous allons déterminer, dans chacun de ces projets, la manière dont les enseignants ont choisi d'enseigner la multiplication des décimaux en examinant différentes questions :

- lors de l'introduction, les élèves ont-ils l'occasion de chercher seul à résoudre un problème contextualisé ? Le cas échéant, la décontextualisation de ce problème permet-elle d'aboutir à la formulation et/ou à la validation de la technique opératoire ? Quelle est la dynamique ancien/nouveau (notamment dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux) ?
- les problèmes proposés aux élèves conduisent-ils à la mise en fonctionnement d'une dialectique outil - objet ?
- quelles sont les différentes représentations symboliques mobilisées pour réaliser les tâches que les professeurs ont prévu de proposer à leurs élèves ?

– quelle est la nature de la validation des nouvelles connaissances élaborées, quelle est celle de leur formulation et à qui incombent-elles ?

♦ *Introduction de la multiplication par un problème contextualisé*

Nous retenons cette dimension pour analyser les projets d'enseignement des professeurs d'autant plus que, comme nous l'avons déjà indiqué, les programmes officiels préconisent plutôt l'acquisition de connaissances nouvelles par la résolution de problèmes ²²¹.

(*) D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur des expériences dont disposent les élèves.

(**) La résolution de problèmes occupe une place centrale dans les apprentissages mathématiques, à l'école primaire comme au collège, notamment en vue de l'appropriation de connaissances nouvelles par les élèves.

Ces résolutions de problèmes sont, au sens de Gérard Vergnaud dans la théorie des champs conceptuels, des *situations* rencontrées par les élèves. Et ces rencontres contribuent à l'élaboration de leurs connaissances ²²² : " *Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants.* "

Nous constatons qu'il n'y a pas d'enseignement contextualisé de la multiplication des décimaux. Trois professeurs pourtant, parmi les quatre, l'introduisent à partir d'une question. Madame Theano demande à ses élèves de confronter les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice à ceux que fournit l'utilisation des ordres de grandeur pour estimer le produit de deux décimaux, et cette confrontation les conduira à la conjecture de la règle de la virgule. Madame Germain induit l'élaboration par ses élèves de "petites règles pour faciliter les multiplications" qui conduiront à l'élaboration de la technique opératoire. Madame Agnesi propose des problèmes de calcul de prix avec des données décimales avant que les élèves aient appris à multiplier des nombres décimaux, elle souhaite ainsi qu'ils (se) demandent comment effectuer ces nouveaux calculs. Les projets des trois professeurs comportent une introduction "problématisée" de la nouvelle notion mais ce problème ne constitue pas un exemple de situation fondamentale au sens de Guy Brousseau ²²³ :

²²¹ (*) Instructions pédagogiques pour le cycle moyen, arrêté du 7 juillet 1978.

(**) Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996

²²² VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactiques des mathématiques* 10/2 3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage.

²²³ BROUSSEAU G. (1998), Fondements et méthodes de la didactique, in *Théorie des situations didactiques* (47-112), Grenoble : La pensée sauvage [pp. 49, 73-74]

le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés.

Dans certains cas, il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu. Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances.

Les travaux de Guy Brousseau montrent que, selon lui, l'enseignement des fractions et des nombres décimaux, et donc en particulier la multiplication des nombres décimaux, se situent dans le cas où des situations fondamentales permettent aux élèves de construire une conception correcte du savoir visé. Les professeurs n'ont pas proposé ce type de situations à leurs élèves.

Revenons encore sur le projet de Madame Agnesi. Le problème introductif qu'elle propose n'est pas conforme à la théorie des situations. Milena Basso & Cinzia Bonotto, dans le cadre d'un enseignement expérimental pour une recherche en didactique, proposent aussi d'introduire la multiplication des décimaux conçus comme des mesures, précisément dans le contexte des problèmes de prix. Mais pour ces auteurs, contrairement à ce que nous avons pu observer dans les classes, ces problèmes ne sont pas seulement des exercices pour utiliser la multiplication des décimaux dans une situation supposée familière aux élèves, ni même pour introduire la nécessité de déterminer le produit de deux décimaux. Ces problèmes constituent le contexte d'une réflexion de nature mathématique, abstraite d'une situation suffisamment riche et complexe que les élèves connaissent parce qu'ils l'ont socialement et/ou scolairement pratiquée. La situation est intégrée à un *domaine d'expérience*, au sens de Paolo Boero²²⁴. Par exemple, chez cet auteur, "monnaie et prix" est une dénomination qui renvoie

à un ensemble d'objets, d'activités, de schèmes, etc (bref à un "domaine d'expérience") de la culture humaine.

Chaque dénomination renvoie, dans la classe à :

- Un **contexte externe** (les signes, les objets, les contraintes physiques et sociales, etc. typiques du domaine d'expérience visé) ;

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1986 sous le titre *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* in *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2 (33-115), Grenoble : La pensée sauvage

²²⁴ BOERO P. (2000), Objets d'usage courant dans la vie sociale exploités en classe, in *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques du 18 au 21 août 1999*, tome 1 pp 245-252, Rectorat de Caen, IUFM de Caen, ARDM : Caen.

BRENNER M.-E. (1998), Meaning and Money, in *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 123-155.

SCALI E. (1996), Expériences des enfants dans le domaine économique et construction des compétences de base en arithmétique, in *Proceedings of CIAEM* 47, pp. 409-413, Berlin.

BOERO P ; DAPUETO C ; FERRERO E ; GARUTI R ; LEMUT E ; PARENTI L ; SCALI E. (1995), Aspects of Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School, in *Proceedings of PME XIX, Recife* 1, pp 151-166

- Un **contexte interne à l'élève** (ses représentations mentales, ses schèmes, ses connaissances à propos du domaine d'expérience visé) ;
- Un **contexte interne de l'enseignant** (ses représentations mentales, ses schèmes, ses connaissances, ses atteintes d'efficacité du travail, son expérience à propos des comportements des élèves, etc. à propos du domaine d'expérience visé).

Les trois contextes évoluent (s'enrichissent, se modifient, etc.) dans le temps de l'activité didactique qui concerne le domaine d'expérience choisi. L'enseignant est le responsable de cette évolution, même si elle n'est pas complètement maîtrisable (surtout quand il s'agit d'un domaine d'expérience duquel les élèves ont une pratique extrascolaire riche).

Ainsi, le *domaine d'expérience* est un outil théorique qui concerne un enseignement des mathématiques comprenant une phase contextualisée. Madame Agnesi n'a pas envisagé un tel enseignement. Elle a bien introduit la séquence par une situation multiplicative mais elle n'a pas utilisé les ressources de la situation pour élaborer la technique opératoire. En effet, bien que la consigne soit de calculer les prix à payer, la tâche des élèves n'était pas de calculer ces prix lorsque les deux données étaient décimales mais seulement de remarquer qu'ils ne disposaient pas des moyens suffisant pour le faire : ils ne savaient pas encore multiplier deux décimaux. L'enseignante attendait alors une demande d'information de leur part, information qu'elle prévoyait de leur livrer. Pourtant ces prix étaient calculables moyennant des conversions d'unités, donc avec des outils déjà acquis par les élèves à l'entrée en sixième. Quelques élèves ont d'ailleurs traité ainsi le problème posé par Madame Agnesi mais l'enseignante n'a pas choisi d'approfondir cette construction de la technique opératoire.

♦ *Mise en fonctionnement d'une dialectique outil-objet*

Pour les quatre professeurs, l'essentiel de l'activité mathématique de la classe porte sur le caractère objet de la notion étudiée. Monsieur Bombelli introduit directement la leçon par une affirmation (celle de la règle de la virgule). Cette affirmation est questionnée par la présentation d'une autre méthode de calcul (celle qui utilise des opérateurs multiplicatifs), les élèves doivent expliquer pourquoi les deux méthodes conduisent au même résultat, ils doivent interpréter les décalages de la virgule par des opérations.

Madame Theano demande à ses élèves comment concilier le résultat affiché par la calculatrice et l'estimation que donne le produit des ordres de grandeur des facteurs. La multiplication n'est pas un outil pour répondre au problème posé.

Madame Germain part d'exercices décontextualisés pour amener les élèves à formuler des propriétés de la multiplication qui permettront d'élaborer la technique opératoire de la multiplication des décimaux. Ici encore, la multiplication n'est pas un outil pour répondre au problème posé.

Les élèves de Madame Agnesi doivent calculer des prix. La multiplication des décimaux est un des outils qui permettent d'accomplir cette tâche mais, nous l'avons déjà dit, Madame Agnesi ne propose pas, à l'ensemble des élèves, de construire l'outil à partir du problème posé. Elle propose simplement d'identifier le besoin mathématique et de leur fournir l'outil qui leur manque.

Le bilan des moyens pour introduire la multiplication des décimaux par les professeurs est donc hétérogène. Madame Agnesi propose un problème dans lequel l'apprentissage visé constitue bien un outil pour répondre mais elle ne propose pas l'élaboration de l'outil à partir des connaissances antérieures et de la situation proposée. Les trois autres professeurs ont choisi de ne pas enseigner la multiplication à partir de situations multiplicatives mais de faire reposer son apprentissage sur un questionnement relatif à la technique opératoire. Aucun d'entre eux ne fait fonctionner de dialectique outil-objet.

♦ *Les différentes représentations symboliques des décimaux*

Trois professeurs ont utilisé l'écriture usuelle comme seule écriture des nombres décimaux. Madame Germain utilise une autre représentation qui permettra d'établir la technique opératoire. Madame Germain a utilisé une décomposition proche de l'écriture fractionnaire : le nombre décimal est le produit d'un entier par une puissance négative de 10 écrite avec la notation décimale (par exemple, les élèves doivent écrire $54,123 = 54\,123 \times 0,001$).

En ce qui concerne l'écriture fractionnaire, rappelons que les professeurs ne l'ont pas utilisée. Ils n'ont proposé aucune situation dans laquelle un nombre décimal apparaît comme un quotient de deux entiers.

♦ *Formulation et validation des connaissances*

Comme nous l'avons déjà indiqué, aucun des professeurs ne propose, pour construire la nouvelle connaissance, une tâche qui soit contextualisée dans une situation multiplicative. En référence à la théorie des situations didactiques, il est donc impossible d'envisager l'existence de situation d'action au sens de Guy Brousseau. En sortant du cadre de cette théorie, nous examinerons cependant comment les professeurs prévoient la formulation et la validation des nouvelles connaissances introduites durant la séquence.

Avec la stratégie de Madame Agnesi, les élèves constatent qu'ils ont besoin de multiplier deux décimaux mais qu'ils ne savent pas le faire, c'est le professeur qui leur expose la technique et ils doivent l'appliquer. La nouvelle connaissance n'est donc pas élaborée par les élèves eux-mêmes, le professeur ne propose pas de la valider, les élèves ne disposent d'aucun moyen pour le faire. Eventuellement, certains peuvent constater que la technique proposée par le professeur conduit au même résultat que celui qu'ils ont pu trouver à l'aide de conversions d'unités.

Les stratégies de Madame Theano, et de Monsieur Bombelli ont en commun de reposer sur la comparaison de deux méthodes de calcul d'un produit de deux décimaux. Madame Theano laisse les élèves conjecturer la technique usuelle en analysant les résultats donnés par la calculatrice et l'utilisation des ordres de grandeur. La validation de l'utilisation des ordres de grandeur pour placer la virgule au produit de deux décimaux n'est pas proposée par le professeur : elle dépasse le niveau mathématique d'une classe de sixième²²⁵. Le lien entre les deux

²²⁵ Nous avons à ce sujet rédigé un article à l'attention des professeurs de mathématiques qui est paru dans le bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Une analyse plus approfondie de cette question théorique est proposée en annexe de cette présente recherche.

méthodes (utilisation des ordres de grandeur et technique opératoire usuelle) n'est pas explicité. Monsieur Bombelli, utilise une activité du manuel. La technique usuelle et sa validation par les opérateurs sont décrites dans l'énoncé. La mise en relation de ces deux méthodes reste à la charge de l'élève d'après l'énoncé (de façon très mesurée cependant puisqu'il s'agit seulement de compléter un "texte à trous") mais, dans le déroulement du scénario, c'est Monsieur Bombelli qui l'effectuera. Rappelons en outre que la validation comporte une lacune puisqu'elle repose, de façon dissimulée aux élèves, sur l'utilisation de la commutativité et de l'associativité de la multiplication qui ne sont d'ailleurs pas établies. En conclusion, Madame Theano laisse conjecturer la technique opératoire à ses élèves mais cette technique n'est pas établie durant la séquence. Monsieur Bombelli, en revanche, expose la technique opératoire, il en propose une justification (incomplète) mais elle reste à la charge du professeur.

Comme Madame Theano, Madame Germain laisse la formulation de la technique opératoire à la charge des élèves. En outre, dans sa séquence, la validation est aussi à leur charge.

Conclusion sur les enjeux mathématiques et didactiques des quatre séquences

Nous avons constaté l'homogénéité des choix des enseignants observés en ce qui concerne la délimitation du champ mathématique de la séquence d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, puis une certaine hétérogénéité des stratégies élaborées malgré de nombreux points communs.

Les enjeux mathématiques des séquences observées se résument à la présentation de la technique opératoire éventuellement justifiée, à son application lors du calcul de la solution de problèmes de prix, et à l'énoncé de quelques propriétés (admises) à des fins utilitaires (calcul mental ou construction de la technique opératoire).

L'analyse des enjeux didactique des projets montre un bilan moins homogène. Aucun des quatre professeurs n'a élaboré de stratégie où la dynamique de construction des connaissances reposerait sur une dialectique outil - objet. L'enseignement est décontextualisé. Madame Agnesi est le seul des professeurs à partir d'une situation de prix de marchandises où la valeur des données est une variable didactique mais cette situation n'est pas exploitée pour servir de référence à la connaissance nouvelle. Aucun des professeurs n'a choisi de recourir aux fractions pour enseigner la multiplication des nombres décimaux. Madame Germain, cependant, utilise un changement de représentation symbolique des décimaux pour que ses élèves élaborent la technique opératoire. Madame Theano et Madame Germain laissent à la charge de leurs élèves, davantage que leurs deux autres collègues, la construction des nouvelles connaissances ainsi que leur validation et leur formulation. Monsieur Bombelli ne propose aucune forme de questionnement pour introduire les nouvelles connaissances mais il est le seul.

Finalement, l'analyse comparée des scénarios élaborés par les quatre professeurs montre, au niveau global que constituent le champ mathématique et la stratégie d'enseignement des séquences, que des choix importants sont communs aux professeurs observés. Cette analyse reste très incomplète puisque nous n'avons encore étudié ni les tâches proposées aux élèves durant la séquence, ni les activités effectives des élèves en classe, ni les accompagnements du professeur pendant le déroulement. Néanmoins ce premier constat mérite que nous interroguions spécifiquement la variable "enseignant" du système didactique afin de mieux comprendre cette convergence de choix. Autrement dit, nous sommes à la recherche de contraintes qui conditionnent certains choix des professeurs et de connaissances qu'ils font fonctionner, peut-être de manière implicite, lorsqu'ils élaborent leur projet d'enseignement.

2. Convergence des choix des professeurs au niveau global

Nous ne voulons pas nous arrêter à une lecture "en creux" des scénarios des professeurs qui se contente de noter ce que les enseignants ne font pas. Aussi nous apparaît-il indispensable de tenter de comprendre ce qui les motive dans leurs choix pour l'élaboration globale de leur projet, c'est-à-dire la délimitation du champ mathématique et la définition de la stratégie d'enseignement de la séquence. Ainsi posé, le problème permet d'envisager que les professeurs prennent leurs décisions en fonction de contraintes liées à l'exercice même de leur métier, contraintes qui sont peut-être, au moins pour certaines d'entre elles, indépendantes de l'objectif d'apprentissage des élèves, voire même contraires à cet objectif.

Rappelons qu'il y a ainsi, dans notre démarche, une centration sur l'enseignant qui demande un "changement de point de vue" dans l'analyse, par rapport à ce qui est cherché d'habitude en didactique des mathématiques : il ne s'agit plus d'étudier ce que propose le professeur seulement en fonction des apprentissages potentiels de l'élève mais bien d'étudier son projet pour les activités d'enseignement qu'il favorise. Autrement dit, en forçant délibérément le trait, nous étudions le projet du professeur non plus pour ce qu'il permet à l'élève d'apprendre mais pour ce qu'il permet au professeur d'enseigner.

Nous faisons donc l'hypothèse que des contraintes mais aussi des connaissances, dont certaines sont issues de la pratique, sont à l'œuvre dans l'élaboration du scénario ; ce sont elles que nous essayons ici de mettre à jour.

En confrontant les projets des enseignants (le champ mathématique et la stratégie d'enseignement de leur séquence) aux scénarios qui figurent dans les publications que nous avons étudiées, nous avons montré que des choix, souvent convergents, sont exprimés par les professeurs. Comme on le pratique dans certains travaux en didactique des mathématiques pour analyser les productions des élèves et déceler, en reprenant l'expression de Gérard Vergnaud²²⁶, les

²²⁶ VERGNAUD G. (1992), Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation d'adultes peu qualifiés ? *Education permanente*, n°111 (19-31) [p. 22]

théorèmes-en-actes qu'ils utilisent, nous avons cherché, à partir des projets des professeurs, compte tenu de leurs points communs, des "principes" dont l'application permet de retrouver les choix des enseignants. Ils concernent à la fois l'apprentissage des élèves et l'exercice du métier, dans une dimension personnelle et sociale.

Nous allons présenter maintenant différents principes qui conduisent aux choix convergents des professeurs. Cette présentation est difficile parce que, semble-t-il, aucun d'entre eux n'est suffisant à lui seul pour expliquer complètement tel ou tel choix. Il nous apparaît que l'activité professionnelle de l'enseignant ne peut se réduire à une somme de pratiques qui sont isolées par l'analyse et qu'elle ne peut se comprendre sans en recomposer l'ensemble. Citons Aline Robert²²⁷ :

A partir de ces recherches préliminaires, nous avons conclu que les pratiques enseignantes sont des pratiques complexes, non réductibles à des unités séparées (comme la préparation, ou le déroulement), non décomposables en mises en fonctionnement de connaissances isolées disciplinaires, didactiques, pédagogiques, etc., car des recompositions de tous ordres s'opèrent constamment.

Nous allons donc présenter les principes un à un mais nous serons amené parfois à effectuer quelques renvois ou quelques redites à cause de leur complémentarité pour interpréter certains choix des professeurs.

"Principe" de conformité au programme officiel

Les enseignants que nous avons observés ont délimité pratiquement le même champ mathématique à leur séquence d'enseignement de la multiplication des décimaux. Nous allons montrer ici deux contraintes institutionnelles qui sont respectées par les professeurs.

Les professeurs respectent le contenu du programme

Nous constatons que le choix de ces professeurs est conforme aux instructions officielles : la technique de la multiplication est enseignée, le sens de la notation décimale est révisé, des problèmes issus de situations multiplicatives, donc des problèmes qui donnent du sens à l'opération, sont proposés aux élèves. S'ils ne sont pas nombreux dans la séquence, nous avons noté que le manuel en propose dans plusieurs chapitres qui succèdent à celui qui est explicitement consacré à la multiplication des décimaux. Nous pouvons donc envisager que les professeurs comptent en proposer d'autres à leurs élèves. Autrement dit, du point de vue de l'institution, le programme est respecté par les *agents* que sont les enseignants. De la même façon, nous pouvons dire, compte tenu de l'analyse que nous avons faite du manuel utilisé par ces professeurs, que les auteurs ont proposé une transposition des programmes conforme à la tâche prescrite par l'institution.

Il est intéressant de remarquer ici que d'autres choix auraient été possibles en tenant seulement compte des contenus imposés par les programmes officiels.

²²⁷ ROBERT A. (1999), *Op. cit* [p 133].

D'autres professeurs, par exemple, auraient pu introduire la multiplication par un problème de calcul d'aire de rectangle ou par un problème d'agrandissement d'une figure plane. Si un professeur avait souhaité reprendre une situation fondamentale présentée par Guy Brousseau ou par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, il lui aurait fallu les adapter car les deux ingénieries reposent sur une conception fractionnaire des décimaux alors que la multiplication de deux rationnels positifs est au programme de la classe de cinquième. Néanmoins, un tel choix n'était pas impossible. Un professeur aurait aussi pu reprendre la situation de la bande à double graduation où les nombres considérés sont décimaux et où les représentations symboliques peuvent aisément se limiter à la seule notation décimale. Alors pourquoi les professeurs que nous avons observés ont-ils choisi un enseignement décontextualisé de la multiplication des décimaux ?

Les programmes imposent un certain rythme à l'enseignement

Toutes les expériences d'enseignement qui comporte une phase contextualisée montrent qu'une durée assez longue est nécessaire pour que les élèves connaissent suffisamment la situation afin de l'utiliser comme support de construction de nouvelles connaissances. D'autant plus que, dans le cas de la notion qui nous intéresse pour cette recherche, les situations qui pourraient servir de référence sont très mal connues des élèves, nous l'avons montré au chapitre précédent. Par ailleurs, la décontextualisation est également très coûteuse en temps.

Certainement, l'argument du rythme imposé par les programmes ne suffit pas à justifier que l'enseignement soit systématiquement décontextualisé. Néanmoins, notre analyse préalable a permis de montrer qu'une durée raisonnable²²⁸ pour enseigner la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième est de quatre à six heures. Les professeurs observés ont consacré en moyenne 3 h 40 min à cet enseignement alors qu'ils n'ont pas proposé de problèmes issus de situations multiplicatives en nombre suffisant. Nous pensons donc qu'un professeur qui aurait élaboré un enseignement de la multiplication à partir d'une situation contextualisée aurait dépassé de beaucoup la durée normale envisageable pour enseigner cette notion. D'ailleurs, Madame Germain qui a choisi un scénario où la construction de la technique opératoire est en grande partie laissée aux élèves est le professeur dont la séquence est la plus longue, elle a duré cinq heures, et pourtant, son enseignement était complètement décontextualisé, la technique opératoire a été établie lors de la dernière séance, aucun exercice d'entraînement n'a été effectué et le seul problème issu d'une situation multiplicative proposé aux élèves n'a pas été résolu en classe.

Le rythme de l'enseignement imposé par les programmes empêche que l'enseignement soit *toujours* d'abord contextualisé. Puisque les professeurs doivent choisir, pour des raisons de gestion de l'enveloppe globale horaire, parmi les notions enseignées en sixième, celles qui seront introduites par une situation, alors des raisons expliquent que les professeurs n'aient pas choisi le thème de la

²²⁸ Cet adjectif "raisonnable" est, bien entendu, à comprendre en référence aux programmes et aux horaires de la classe de sixième

multiplication des décimaux. Nous en avons déjà indiqué, nous en montrerons encore d'autres.

Avant d'en terminer avec la contrainte liée aux programmes, nous voudrions ajouter quelques éléments qui expliquent l'attention que les professeurs portent au respect des instructions officielles.

La conformité aux programmes assure la légitimité du professeur

Chaque stratégie d'enseignement correspond à une transformation en éléments très fins de la tâche globale qui est prescrite aux professeurs par l'institution scolaire dans les programmes. Cette étape incontournable de la préparation des cours, parce qu'elle est subjective, engage chaque professeur socialement c'est-à-dire face à son inspection pédagogique mais aussi face aux collègues, face à l'administration de son établissement, face aux parents et aux élèves eux-mêmes. Les quatre professeurs que nous avons observés ont des stratégies différentes mais qui répondent toutes les quatre aux objectifs du programme. La légitimité de cette redéfinition de la tâche prescrite, est alors socialement assurée.

Pour que la légitimité du professeur soit personnellement (par opposition à socialement) assurée, il faudra en outre qu'il nourrisse sa stratégie par des tâches que les élèves parviendront à réaliser sans trop de difficultés, mais aussi qu'il parvienne à animer, en classe, le scénario de sa séquence.

Concluons finalement que si l'apprentissage des élèves est le niveau d'appréciation de l'activité d'un professeur qui nous semble fondamental, il n'en reste pas moins que d'autres niveaux d'appréciation existent dont la conformité avec les programmes officiels tant pour le choix des contenus enseignés que pour le rythme de l'enseignement, conformité qui assure au professeur une part de sa légitimité sociale.

Voyons maintenant trois principes qui concernent exclusivement la délimitation du champ mathématique de la séquence d'enseignement.

Trois principes pour délimiter le champ mathématique d'une séquence

Nous avons remarqué que les professeurs, bien qu'ils aient élaboré des stratégies d'enseignement quelque peu différentes, ont tous délimité, à quelques détails près, le même champ mathématique pour leur séquence. Nous allons montrer que ce champ possède des propriétés qui permettent à l'enseignant de s'assurer qu'il évitera au maximum les digressions ou les parenthèses importantes qui pourraient détourner les élèves du sujet de la séquence fixé par le professeur.

Le champ mathématique du scénario d'une séquence d'enseignement de la multiplication des décimaux a été déterminé par les objets mathématiques que le professeur a introduits dans cette séquence : des nombres décimaux avec différentes représentations symboliques ou, pour reprendre l'expression de Raymond Duval²²⁹, différents *registres de représentation sémiotique*, des produits

²²⁹ DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine* Berne : Peter Lang

de deux nombres décimaux ainsi que des transformations de représentations qui permettent de calculer ces produits, des méthodes et des techniques de calcul du produit de deux décimaux, des justifications de ces méthodes ou de ces techniques, des propriétés de la multiplication des entiers ou des décimaux, des justifications de ces propriétés, des relations entre les propriétés et les techniques de calcul, des situations où intervient la multiplication, et l'ensemble des formes langagières (orales et écrites, images...) de ces situations. Rappelons que ces objets que nous venons de citer se classent aisément dans les trois ensembles que Gérard Vergnaud considère pour définir les notions de concept et de champ conceptuel²³⁰ :

un concept est un triplet de trois ensembles : $C(s, I, S)$
s : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;

S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

(...) Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

Il apparaît donc qu'une analyse didactique des champs mathématiques des séquences étudiées gagnerait à s'effectuer à la lumière de la théorie des champs conceptuels. En partant des propriétés communes aux champs mathématiques des séquences, nous avons déterminé trois "principes" qui, nous allons le montrer, permettent d'interpréter les choix des enseignants.

Principe d'efficacité pédagogique : on ne bâtit rien de solide sur le sable

Le champ mathématique délimité par les professeurs conduit à un enseignement qui porte sur le cadre numérique exclusivement et où n'apparaît pas la représentation fractionnaire des nombres décimaux. Pourtant, le programme prévoit une utilisation des fractions décimales pour contrôler les calculs effectués en utilisant la notation décimale. Dans le cadre géométrique, il indique l'enseignement de la notion d'aire et précisément le calcul de l'aire d'un rectangle qui, quand on pense à l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, se prête particulièrement bien à l'enseignement de la multiplication des décimaux. On ne peut donc évoquer seulement la contrainte des contenus indiqués par les instructions officielles pour interpréter le choix des enseignants. Nous avons précédemment évoqué le rythme d'enseignement imposé par le programme pour interpréter le choix d'enseignement décontextualisé de certaines notions. Nous proposons d'avancer maintenant un argument plus pédagogique.

²³⁰ VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactique des mathématiques* 10/2.3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage.

Les professeurs expérimentés²³¹ ont acquis des connaissances sur les difficultés des élèves avec la conception fractionnaire des décimaux comme avec la notion d'aire. Rappelons qu'en fin de sixième, seulement 34% des élèves savent écrire les nombres 0,1, 0,6, 3,7 et 0,03 sous la forme d'une fraction²³². De même, deux exercices de calcul d'aire d'un rectangle connaissant ses côtés ont été proposés dans le cadre des évaluations nationales à l'entrée en sixième²³³, et ces exercices ont montré que l'association entre l'aire du rectangle et la multiplication des côtés n'est acquise que par seulement un tiers des élèves.

Sans doute les enseignants pensent-ils que la multiplication des décimaux doit être assimilée par un pourcentage d'élèves beaucoup plus important que le tiers de leur classe et qu'ils ont peu de chance d'y parvenir s'ils s'appuient sur des connaissances aussi mal acquises que l'écriture fractionnaire des nombres décimaux ou que l'aire du rectangle.

L'argument que nous venons de développer est lié aux conceptions que les professeurs auraient de l'apprentissage des élèves. Conceptions qui interviennent dans leurs choix d'enseignement. Les professeurs n'utilisent pas les écritures fractionnaires ni le calcul d'aire de rectangles qui ne sont pas suffisamment acquises. Autrement dit, ils craindraient, ce faisant, de bâtir sur le sable. Dans une perspective d'analyse de l'activité professionnelle, cet argument doit aussi se comprendre comme une adaptation des professeurs au contexte de l'enseignement de ces notions qui restent mal connues des élèves. Rappelons, pour conclure, que l'enseignement du coefficient d'agrandissement d'une figure – l'échelle – est au programme de la classe de cinquième, cette précision peut contribuer à expliquer l'absence de situations portant sur des agrandissements ou des bandes à double graduation.

On ne bâtit pas sur le sable. Ce principe d'efficacité pédagogique contribue à interpréter le fait que les professeurs ont évacué les représentations fractionnaires des décimaux et les situations multiplicatives issues du domaine géométrique mais il ne suffit pas : on pourrait imaginer en effet qu'ils profitent de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux pour initialiser celui des fractions décimales, de l'aire du rectangle ou de l'agrandissement de figures planes. Nous nous proposons d'élucider cette question.

Principe de clôture du champ mathématique d'une séquence

Les professeurs ont évité de s'appuyer sur l'écriture fractionnaire et sur les situations multiplicatives issues du cadre géométrique pour enseigner la multiplication des décimaux. Ces notions n'ont pas été abordées, même de façon peu approfondie. La simple lecture des programmes et des manuels nous empêche de penser que c'est par méconnaissance de l'importance des fractions ou de l'aire.

²³¹ Ce qui est le cas des professeurs que nous avons observés

²³² APMEP–IREM de Besançon (1987), *ÉVALUATION du Programme de Mathématiques fin de sixième*, Paris : APMEP [p. 42, 43].

²³³ DEP (1993, 1995 et 1997), *Évaluation CE 2 - 6ème, Résultats nationaux*, Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective

Certainement, les professeurs avaient programmé l'étude de ces notions à un autre moment de l'année ; certains chapitres de leur manuel leur étaient d'ailleurs consacrés

Les professeurs ont donc *choisi* de ne pas aborder, même succinctement, certaines situations du champ conceptuel des structures multiplicatives. Nous interprétons ce choix du "tout ou rien" comme la volonté d'aboutir à une partie "auto-close" du champ conceptuel, c'est-à-dire que les situations qui sont à l'étude dans la séquence doivent être, dans cette même séquence, associées aux concepts et aux théorèmes qui permettent de les analyser. Précisons notre pensée mais avant, rappelons comment Gérard Vergnaud définit le champ conceptuel des structures additives²³⁴ :

Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

En délimitant le champ mathématique de leur séquence, les professeurs ont supprimé certains éléments du champ conceptuel des structures multiplicatives, des éléments reliés : les situations, mais aussi les concepts et les théorèmes qui permettent de les analyser comme des tâches mathématiques. Ainsi, les objets mathématiques qui restent dans le champ de la séquence sont dépendants entre eux mais ne dépendent pas (ou peu) de ceux qui n'y ont pas été intégrés. C'est en ce sens que nous énonçons le principe de clôture du champ mathématique : le champ mathématique de la séquence est une partie "auto-close" du champ conceptuel. Montrons-le sur les exemples des séquences observées

Madame Theano propose quelques situations d'isomorphisme de grandeurs qui ne dépendent d'aucune notion mathématique (les grandeurs considérées sont des masses, des prix...) pour appliquer la technique opératoire. Elle introduit des nombres en écriture décimale et la notion d'ordre de grandeur qui peut être traitée uniquement en approfondissant la notation décimale. L'utilisation conjointe de la calculatrice et des ordres de grandeur permet de conjecturer la technique opératoire qui n'est pas établie. Enfin, la propriété liée à la multiplication par un facteur inférieur à 1 est traitée en lien avec les ordres de grandeur.

Madame Agnesi propose des problèmes de prix pour introduire la multiplication des décimaux, elle envisage d'aborder des problèmes de conversions d'unités dans le système décimal qui permettent de justifier la technique opératoire en référence à ces situations multiplicatives. Puis Madame Agnesi énonce quelques propriétés de la multiplication afin de les utiliser, notamment dans des exercices de calcul mental ou raisonné. Ces propriétés sont admises, les justifier aurait nécessité, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, de se référer à certaines situations multiplicatives qui ne sont pas étudiées.

²³⁴ VERGNAUD G (1990), La théorie des champs conceptuels, in *Recherches en didactique des mathématiques* 10/2 3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage.

Monsieur Bombelli restreint au maximum les objets mathématiques du champ, il justifie la technique opératoire en utilisant des opérateurs, ces opérateurs reviennent à effectuer des multiplications ou des divisions par des puissances positives de dix ce qui demande seulement de revoir la signification de l'écriture décimale. Cette méthode repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication mais ces propriétés sont masquées lors de la justification par un artifice de présentation des calculs. Elles sont cependant énoncées et admises pour permettre, comme dans la séquence de Madame Agnesi, des exercices de calcul mental ou raisonné.

Enfin, Madame Germain propose aux élèves d'étudier quelques propriétés de la multiplication, certaines s'établissent en restant dans le cadre numérique et sans se référer aux situations multiplicatives, les autres sont admises.

Finalement, on constate que le champ mathématique défini par les professeurs est "auto-clos" à une exception près : les seuls objets mathématiques du champ délimité par les enseignants qui sont en relation avec d'autres objets situés à l'extérieur de ce champ sont les preuves de certaines propriétés de la multiplication ; propriétés qui sont utilisées soit pour établir la technique opératoire soit pour permettre des exercices de calcul mental ou raisonné. Cette exception au principe de clôture du champ mathématique d'une séquence nous conduit à l'énoncé d'une troisième hypothèse.

Un élève de sixième qui sait comment faire ne demande pas pourquoi

Nous avons constaté que le champ mathématique est pratiquement "auto-clos" : les seules exceptions étant les justifications des propriétés utilisées. Ces exceptions au principe de clôture du champ mathématique sont envisageables par le professeur durant les séances en classe si la pression des élèves n'est pas trop forte pour le contraindre à justifier les propriétés qu'il utilise ou qu'il fait utiliser. Nous devrions même supposer que la pression des élèves est pratiquement inexistante car, comme nous le rappelle Janine Rogalski²³⁵, les élèves acceptent mal que leur professeur ne leur fournisse pas les explications qu'ils demandent :

il peut surgir des questions de la part d'élèves qui s'accommodent mal du "on verra plus tard" qui permet de rester dans l'enveloppe attendue.

Dans la présentation des stratégies d'enseignement, nous avons repéré des questions laissées en suspens par les professeurs. Indiquons-les précisément afin de comprendre ce qu'elles ont en commun.

Madame Theano a choisi de faire conjecturer la règle de la virgule en utilisant les ordres de grandeur mais le scénario ne prévoit pas de justification de cette règle. Il en est de même dans celui de Madame Agnesi. Ces deux professeurs s'exposent à une demande de justification de la part des élèves. Il nous semble donc que les enseignantes font là un pari important : elles doivent être sûres que

²³⁵ ROGALSKI J (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

les élèves n'auront pas de demande de justification dès qu'ils sauront comment faire pour multiplier deux décimaux.

Monsieur Bombelli a utilisé des opérateurs pour justifier la technique opératoire ce qui pose tout de même quelques difficultés relatives à la clôture du champ mathématique du scénario : pourquoi, dans un produit de deux facteurs, ayant multiplié l'un des facteurs par 10 et l'autre facteur par 100, le produit se trouve-t-il multiplié par 1 000 ? La commutativité et l'associativité sont dissimulées par la présentation du manuel, une étape importante du raisonnement est ainsi laissée dans l'ombre. Monsieur Bombelli estime, comme ses collègues, que les élèves ne soulèveront pas ces questions dès qu'ils sauront comment faire.

La méthode de justification de la technique opératoire retenue par Madame Germain repose sur la multiplication de puissances négatives de dix. Pourtant ces multiplications particulières ne sont pas établies. De même, la commutativité et l'associativité de la multiplication sur lesquelles repose l'élaboration de la technique opératoire sont testées, admises mais pas prouvées.

Enfin, remarquons qu'aucun des quatre professeurs ne revient sur les multiplications par 0 ou par 1 qui sont utilisées pour calculer des produits et qui posent encore des difficultés aux élèves de sixième mais qui demandent, pour être justifiées, de se référer à des situations multiplicatives qui ne figurent pas dans le champ mathématique commun.

Les questions laissées sans réponse concernent donc toutes la justification d'une action. Ainsi, tout se passe comme si les enseignants utilisaient parfois ce principe selon lequel un élève de sixième qui sait comment faire ne demande pas pourquoi il peut le faire, et cela afin d'éviter de résoudre des questions difficiles. Une telle affirmation peut sembler choquante : le professeur laisserait alors délibérément ses élèves dans une certaine ignorance alors que son rôle est bien de leur permettre de construire des connaissances ! Il nous semble cependant qu'une analyse de situations réelles d'enseignement doit admettre que l'activité du professeur ne peut se décrire complètement par des régularités mais qu'il faut plutôt les analyser en terme de tendances et de compensations. Un professeur, par exemple, peut vouloir laisser ses élèves en situation de recherche autonome et pourtant, à un certain moment, conduire sa classe de manière très directive pour gagner du temps ou pour éviter la lassitude ou la dispersion des élèves.

Avant de terminer sur ce point, nous voudrions remarquer que ce principe, selon lequel un élève de sixième qui sait comment faire ne demande pas pourquoi, peut aussi expliquer, à l'inverse, une démarche de professeur qui souhaite justement que ses élèves travaillent sur la question du pourquoi. Ainsi, Madame Germain évite le plus longtemps possible que soit formulée la règle de la virgule, sans doute parce qu'elle sait qu'il serait beaucoup plus difficile, ensuite, de demander aux élèves de s'interroger sur sa validité.

Conclusion sur les principes qui conduisent à la délimitation du champ mathématique des séquences observées.

La théorie des champs conceptuels nous éclaire donc sur l'élaboration globale d'un scénario. Il est vrai que cette théorie a été élaborée pour comprendre le développement des compétences d'un élève, mais Gérard Vergnaud lui-même envisage qu'elle soit utile à la compréhension de l'activité du professeur ²³⁶ :

Je voudrais essayer de montrer que les concepts de schème et de champ conceptuel, dont je sais d'expérience qu'ils ne sont pas faciles à comprendre pour qui n'a pas encore pénétré dans le cadre théorique que je propose, sont des concepts utiles à l'enseignant et constituent en outre une aide significative pour comprendre son action.

Notre hypothèse est la suivante : pour délimiter le champ mathématique, les professeurs écartent les notions qui ne concernent pas directement la séquence et sont mal connues des élèves, ils choisissent de proposer seulement les situations pour lesquelles ils prévoient d'enseigner les concepts et les théorèmes (éventuellement admis) qui en permettront l'étude. Ils évitent ainsi de devoir aborder certaines questions trop partiellement et délimitent un champ mathématique " auto-clos " dans lequel ils font travailler leurs élèves. Cette façon de procéder répond à une fonction professionnelle : échapper aux situations inconfortables ou qui nuisent à la relation entre le professeur et sa classe comme celle d'avoir à refuser de répondre à des questions d'élèves ou celle d'avoir à leur demander de patienter pour obtenir les réponses qu'ils attendent. Les seules exceptions à ce principe de clôture étant ici les justifications des propriétés utilisées.

La délimitation du champ mathématique demande une connaissance approfondie du savoir à enseigner, ou de respecter les choix des auteurs des manuels qui ont effectué ce travail de découpage du programme en chapitres conçus comme des séquences d'enseignement. Nous retrouvons un résultat exprimé par François V. Tochon ²³⁷ à propos de recherches sur l'activité de planification des cours par des professeurs : ils consacrent la plus grosse partie de leur temps au contenu à enseigner puis à la stratégie d'enseignement. L'auteur constate également que plus les enseignants sont à l'aise avec le contenu, moins ils s'y appesantissent et plus ils investissent de temps dans les stratégies d'enseignement.

Nous avons constaté quelques différences entre les stratégies des professeurs mais aussi de nombreux points communs. Comme nous venons de le faire pour le champ mathématique des scénarios, nous nous proposons maintenant de déterminer des principes qui, s'ils étaient appliqués, conduiraient aux choix communs effectués par les professeurs pour élaborer leur stratégie d'enseignement.

²³⁶ VERGNAUD G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schèmes et de champ conceptuel, in *Vingt ans de didactique des mathématiques* (177-191), Grenoble : La pensée sauvage. [p 177].

²³⁷ TOCHON F. V. (1993), *Op cit.* [pp. 83-84].

Quatre principes pour élaborer une stratégie d'enseignement

Trois des quatre professeurs ont élaboré un scénario où la multiplication des nombres entiers est prolongée aux nombres décimaux par un problème contextualisé ou est établie, au moins en partie, par les élèves. La technique est institutionnalisée assez tôt dans la séquence, sauf dans la classe de Madame Germain qui institutionnalise régulièrement des “petites règles pour faciliter les multiplications”²³⁸. Les quatre professeurs prévoient de donner des moyens de contrôler les résultats obtenus en appliquant la technique opératoire et/ou de prendre le temps d'analyser les erreurs des élèves. Les propriétés de la multiplication sont utilisées pour effectuer du calcul mental ou raisonné, elles sont énoncées par trois professeurs mais elles ne sont jamais démontrées. Peu de problèmes issus de situations multiplicatives sont abordés.

Les scénarios élaborés par les professeurs possèdent donc des propriétés communes sur lesquelles nous allons revenir afin de proposer des hypothèses, sous forme de principes, qui permettent d'interpréter ces choix.

Principe de nécessité de succès d'étape

Revenons sur les institutionnalisations très précoces remarquées dans les séquences animées par les professeurs observés. Monsieur Bombelli expose la technique opératoire dès la première séance et propose des exemples d'application. Madame Theano et Madame Agnesi ont chacune proposé une situation d'introduction à la multiplication des décimaux, celle de Madame Theano visait à conjecturer la règle de la virgule et celle de Madame Agnesi devait permettre aux élèves de constater le besoin de disposer de cette nouvelle opération. Dès la deuxième séance, ces deux professeurs ont énoncé la technique opératoire et ont proposé des exemples d'application. Madame Germain a construit un scénario différent puisque la séquence fut entièrement consacrée à l'élaboration de la technique opératoire. Néanmoins, différentes règles techniques furent institutionnalisées et appliquées au fur et à mesure des séances.

Ces constats sont convergents : les professeurs semblent devoir assez vite aboutir à la formulation et à l'application de nouvelles connaissances, éventuellement intermédiaires. Dans sa thèse, Jeanne Bolon formule l'hypothèse selon laquelle les professeurs de collège souhaitent “aboutir au plus vite à des algorithmes de calculs décontextualisés”²³⁹. Elle explique en partie avec cet argument que les professeurs de collège n'adoptent pas l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin ou celle de Nadine et Guy Brousseau : elles reposent sur des situations²⁴⁰.

²³⁸ C'est ainsi que Madame Germain les appelle durant les séances.

²³⁹ BOLON J (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactiques des mathématiques? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Paris : Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5. [p. 327].

²⁴⁰ *Ibid.* [pp 327-328]

riches et complexes dont la résolution conduit à un traitement "artisanal" qui peut être remplacé plus tard par des techniques de routine plus élaborées (...) On peut se demander si le processus des progressions de référence (...) est compatible avec le temps didactique des classes de collège.

Le projet de Madame Germain montre que cette hypothèse est trop forte pour être appliquée à sa séquence. Pourtant, les stratégies des professeurs observés permettent d'aboutir assez vite à des connaissances décontextualisées qui sont appliquées. Ces applications permettent d'évaluer le suivi des élèves au fur et à mesure du déroulement. Puis, généralement à la fin de la séquence, les professeurs procèdent à une évaluation finale des compétences que les élèves ont acquises. Les stratégies semblent donc contribuer à cibler et à rythmer l'apprentissage comme si les professeurs (et les élèves ?) avaient besoin de marquer, régulièrement, des succès d'étape.

Ces étapes correspondent-elles à ce que les professeurs estiment être le rythme de travail des élèves ? Nous reviendrons sur ce point dans le prochain paragraphe. Il semble toutefois que ces étapes correspondent à une nécessité de l'exercice du métier : un professeur ne peut pas enseigner "en aveugle" en permanence, il a besoin de savoir si son travail est bénéfique pour les élèves. Dans une perspective ergonomique, Janine Rogalski²⁴¹ compare l'enseignement à la gestion d'un *environnement dynamique ouvert*. Dynamique parce que cet environnement a la possibilité de se modifier sous sa propre dynamique, ouvert parce que le professeur ne dispose, pour la gestion, d'aucun modèle précis et complet de la dynamique propre des acquisitions ni de l'impact de l'intervention didactique. Les professeurs utiliseraient donc les applications des connaissances pour évaluer régulièrement l'impact de leur enseignement à très court terme afin d'adapter leur activité aux besoins des élèves ; et ils utiliseraient les évaluations d'étapes pour programmer leur enseignement tout au long de l'année scolaire en fonction de leur classe.

Ces deux modes d'évaluation ne sont pas sans lien. Les applications permettent au professeur d'adapter son enseignement suivant les besoins constatés, d'aider certains élèves individuellement, de prendre des décisions qui portent sur le scénario de la séquence en cours mais qui portent aussi sur l'évaluation prévue des connaissances. Par exemple, ayant remarqué que trop d'élèves éprouvent des difficultés à réaliser une tâche alors qu'une tâche analogue figure dans l'évaluation prévue, le professeur peut décider de prolonger la durée de l'enseignement, ou de simplifier la tâche prévue pour l'évaluation... Le professeur rédige le texte des contrôles, autrement dit, il élabore lui-même l'outil d'évaluation. Et c'est lui qui corrige les copies. Le déroulement de la séquence lui permet de tirer des indications sur ce que les élèves deviennent capables de faire. Cela lui permet d'élaborer ou d'adapter le sujet du contrôle car certaines tâches d'application, proposées en classe, sont des exercices qui pourraient être utilisés pour évaluer les acquisitions des élèves. L'enseignant peut ainsi concevoir une

²⁴¹ ROGALSKI J. (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

évaluation qui porte sur les savoirs visés par les programmes tout en tenant compte des réussites des élèves en classe. Il garantit ainsi une réussite suffisante pour entretenir la confiance envers le professeur et, par conséquent, un climat serein dans la classe, la reconnaissance des collègues, de l'institution et des parents d'élèves et, finalement un confort indispensable à l'exercice du métier.

L'évaluation finale doit être suffisamment réussie par suffisamment d'élèves. Cette réussite, comme le précise Aline Robert²⁴², est souvent considérée par l'institution scolaire comme un critère de " bon fonctionnement " :

Un deuxième niveau d'évaluation des pratiques est celui – nécessairement relatif – de la " réussite des élèves ", en général mesuré sur des épreuves proposées (et le plus souvent corrigées) par l'enseignant lui-même. Cette évaluation ne mesure souvent qu'une adéquation partielle des procédures des élèves aux attentes de l'enseignant et pas nécessairement la réussite ou l'échec des apprentissages.

En conclusion, les stratégies élaborées par les professeurs ont en commun de permettre, en fin de séquence, un succès d'étape. Le déroulement permet de gérer la classe en tenant compte de ses réactions, d'adapter l'enseignement à la diversité des élèves et de mesurer la performance aux exercices d'application pour ajuster l'évaluation finale qui doit être suffisamment réussie. Ces étapes répondent à plusieurs exigences professionnelles comme la nécessaire sérénité du climat de la classe ou la reconnaissance sociale du travail de l'enseignant. On peut penser aussi que ces étapes permettent au professeur de réaliser l'itinéraire qu'il a prévu pour sa classe en programmant l'enseignement annuel conformément aux programmes. En outre, nous nous demandons si ces succès d'étape ne correspondent pas aussi à un rythme lié aux apprentissages des élèves de cet âge

Principe du respect de l'attente des élèves

Nous avons vu que les scénarios des professeurs comportent des étapes. Ces étapes sont relativement courtes. Nous avons montré qu'elles répondent à des besoins liés à l'exercice du métier et, peut-être, à la représentation que les professeurs ont du rythme de travail des élèves de sixième. Nous voudrions ici revenir sur cette dernière explication.

Monsieur Bombelli, Madame Theano et Madame Agnesi ont institutionnalisé la technique opératoire de la multiplication au début de la séquence. Après quelques applications numériques, les propriétés de la multiplication ont été utilisées pour répondre à des besoins de calcul mental ou raisonné. Madame Theano et Madame Agnesi ont proposé chacune une situation d'introduction au prolongement de la multiplication des entiers aux décimaux, Monsieur Bombelli a suivi la présentation du manuel. Pour chaque professeur, l'introduction de la multiplication a duré une vingtaine de minutes. Cette activité a été la plus longue de chaque séquence.

Madame Germain est le seul professeur à avoir construit un enseignement de la multiplication des décimaux où l'institutionnalisation de la technique opératoire

²⁴² ROBERT A. (1999), *Op. cit.* [p 126].

figurait à la fin de la séquence. Le déroulement était ponctué d'étapes assez courtes durant lesquelles les élèves ont établi des "règles pour faciliter les multiplications" c'est-à-dire des propriétés de la multiplication. Lors de la deuxième séance, Madame Germain avait proposé de déterminer la valeur d'un produit parmi trois nombres proposés. Cette détermination reposait sur le fait que deux nombres (positifs) sont rangés dans le même ordre que leur produit respectif par le même nombre (positif). Alors que Madame Germain avait montré un exemple d'utilisation de cette propriété, les élèves de la classe ont passé une séance complète pour s'approprier la démarche montrée par le professeur. A plusieurs reprises, les élèves ont fourni des réponses approximatives mais Madame Germain n'a jamais voulu apporter elle-même la réponse correcte, laissant les élèves critiquer mutuellement leurs productions. Lors de la troisième séance, elle a rappelé ce travail en ces termes : elle avait fait "souffrir" les élèves parce qu'elle leur avait demandé d'expliquer bien précisément.

Ainsi, dans la classe de Madame Germain, la durée de recherche et de résolution d'un problème la plus longue de la séquence fut d'une quarantaine de minutes alors qu'elle n'a jamais excédé une vingtaine de minutes dans les classes des trois autres professeurs. Tout se passe comme si les enseignants ne pouvaient imposer à leurs élèves une durée de recherche trop longue avant de leur exposer la solution. Madame Germain a fait "souffrir" ses élèves parce qu'elle a résisté à leur demande (implicite) de répondre à leur place, d'approuver ou de réfuter les propositions de quelques-uns d'entre eux.

Il apparaît donc, et cela nous a été confirmé lors des entretiens, que les professeurs ne souhaitent pas laisser les élèves trop longtemps sans réponse. Ils craignent les incidents causés par la lassitude ou l'agacement de leurs élèves qui leur reprocheraient de manquer à leur fonction en ne fournissant pas les explications trop longtemps attendues.

Les enfants le savent, les professeurs connaissent les réponses aux questions qu'ils posent. Les élèves accepteraient de chercher ces réponses (que leur professeur pourrait tout aussi bien leur livrer...) afin d'avoir la satisfaction de les découvrir eux-mêmes. Mais tout se passe comme si leur recherche ne devait pas excéder une certaine durée, durée après laquelle le rôle du professeur serait d'exposer et d'expliquer ce que les élèves n'ont pas su trouver seuls. En excédant cette durée, Madame Germain a fait "souffrir" ses élèves. En le reconnaissant, elle montre qu'elle était convaincue de l'utilité de cette recherche prolongée. Une telle expérience (unique dans la séquence) ne doit pas se renouveler trop souvent, faute de quoi le professeur risque de ne plus être apprécié de ses élèves et, en cas de difficulté, la confiance qu'ils lui accordent risque de se trouver altérée. Le professeur doit donc anticiper sur la capacité de ses élèves à résoudre le problème qu'il envisage de poser s'il souhaite qu'ils trouvent seuls la solution. Faute de quoi, après une certaine durée, pour éviter la lassitude, pour respecter les attentes de ses élèves, bref, pour que la classe "tourne", il devra exposer lui-même la solution ou aider les élèves à la trouver.

La recherche sociologique menée sur les rapports au savoir des élèves par Bernard Charlot, Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex confirme cette attente

des explications des professeurs. Une partie de cette recherche porte sur les qualités des professeurs exprimées par les élèves²⁴³ : un bon professeur donne envie de travailler, explique bien et répète avec patience. Les auteurs terminent le paragraphe consacré aux professeurs par une question : “ *Mais faut-il les croire ? Peut-on adhérer à leur théorisation spontanée ?* ” En effet, la durée relativement courte des activités de recherche des élèves que nous avons observée dans les séquences étudiées est-elle suffisante pour permettre la construction de nouvelles connaissances ou que ces connaissances deviennent accessibles aux élèves par une simple présentation du professeur²⁴⁴ ? La question reste posée.

Néanmoins, après cette phase de présentation des nouvelles connaissances, les professeurs proposent des applications qui permettent aux élèves de fixer les apprentissages et, nous l'avons vu, qui permettent au professeur d'évaluer l'impact à court terme de son enseignement et de calibrer l'évaluation de la séquence afin de marquer un succès d'étape

Pour conclure sur ce principe du respect de l'attente des élèves qui contribue à expliquer que les étapes proposées dans les scénarios étudiés soient relativement courtes, nous posons à notre tour une question : si le chercheur doute de la possibilité d'adhérer aux théorisations spontanées des élèves, le professeur, en classe, peut-il ne pas en tenir compte ? Et sinon, comment malgré tout ne pas sacrifier au “ confort ” des différents partenaires de la classe, l'objectif essentiel de l'enseignement que constitue l'apprentissage des élèves ?

Principe de programmation d'un retour à l'enseignement d'une notion

Nous avons remarqué que les stratégies des professeurs limitent l'étude de la multiplication des nombres décimaux à un seul cadre, le cadre numérique. Cette limitation peut apparaître comme une conséquence de notre choix d'observation : nous n'étudions pas l'enseignement annuel dispensé par un professeur en repérant toutes les occasions qu'il propose à ses élèves pour travailler, et donc pour apprendre, la multiplication des nombres décimaux. Rappelons que les évaluations à l'entrée en sixième montrent que la notion d'aire n'est pas suffisamment acquise pour envisager, sans préparation spécifique, un enseignement qui repose sur un changement de cadre au sens de Régine Douady. En effet, dans une telle perspective, le cadre géométrique doit être suffisamment disponible pour permettre un apprentissage dans le cadre numérique.

Les professeurs observés ont peut-être envisagé d'aborder la notion d'aire, et notamment le calcul de l'aire d'un rectangle, après avoir enseigné la multiplication des nombres décimaux. Un changement de cadre serait alors envisageable : le cadre numérique étant disponible pour permettre un apprentissage dans le cadre géométrique. Nous nous sommes limité à l'observation d'une séquence complète destinée à l'enseignement de la multiplication des décimaux. Ainsi pourrions-nous

²⁴³ CHARLOT B, BAUTIER E & ROCHEX J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris [pp 53-59]

²⁴⁴ Nous évoquons ici la possibilité d'acquérir des connaissances qui sont simplement exposées par l'enseignant c'est-à-dire, au sens de Vygotski (1985), des connaissances comprises dans la zone proximale de développement des élèves.

attribuer la limitation de cette séquence au seul cadre numérique à l'organisation de l'enseignement du programme sur toute la durée de l'année scolaire. Un argument s'oppose cependant à cette interprétation. L'étude des manuels montre que dans les séquences suivantes, la multiplication des décimaux n'est plus envisagée comme une notion en construction : par exemple, dans aucun des exercices proposés par les manuels de sixième, le calcul d'aire de rectangle n'est l'occasion de revenir sur la conception de la multiplication. Pour les auteurs, les élèves savent multiplier, ils appliquent cette connaissance au calcul de l'aire d'un rectangle en appliquant la formule adaptée.

Néanmoins, l'élaboration de la formule de calcul de l'aire du rectangle repose sur le prolongement de la multiplication des entiers (elle permet de calculer le nombre de carrés de côté 1 qui figurent dans un rectangle dont les dimensions sont des entiers) à la multiplication des décimaux. Un tel prolongement donne l'occasion de revenir sur le sens du produit de deux décimaux. Des professeurs comme Madame Theano ou comme Madame Germain qui laissent, au moins en partie, la construction des nouveaux savoir à la charge de leurs élèves pourraient envisager d'établir ce prolongement de la formule de calcul. On devrait donc interpréter le choix des professeurs (au moins des deux que nous venons de citer) de ne pas aborder le calcul de l'aire d'un rectangle dans cette séquence comme une volonté de ne pas traiter tout ce qui est lié à la multiplication des décimaux durant une seule et même période afin de pouvoir rencontrer, durant l'année scolaire, des occasions de la réviser, de compléter son apprentissage. Ce que nous venons d'exprimer pour le calcul d'aire se comprend de la même façon pour la multiplication d'un décimal par une fraction (éventuellement décimale) qui figure au programme de l'année de sixième puisque ce nouveau prolongement permet de réinterpréter la multiplication de deux décimaux.

Ainsi proposons-nous une nouvelle hypothèse pour expliquer le fait que les stratégies élaborées par les professeurs conduisent à des étapes assez courtes dans lesquelles les notions qui sont très riches ne sont pas complètement étudiées. Cette hypothèse, nous la désignons comme le principe de programmation d'un retour à l'enseignement d'une notion. Pour les quatre professeurs observés, comme d'ailleurs pour les auteurs du manuel, un tel principe permet d'expliquer que des situations qui permettent d'acquérir la multiplication des nombres décimaux ne soient pas abordées dans la séquence qui lui est spécifiquement consacrée où l'enseignement prévu est décontextualisé. Il permet d'expliquer aussi que ne soit pas abordée la multiplication d'un décimal par une fraction, pourtant au programme de la classe de sixième.

Principe de non-abstraction par l'étude de problèmes isomorphes

Malgré les quelques éléments d'explication que nous avons déjà apportés, une caractéristique commune aux scénarios des professeurs qui reste encore assez surprenante est le manque de diversité des situations multiplicatives sur lesquels reposent les quelques problèmes proposés durant cette séquence. En effet, différentes situations figurent au programme de la classe de sixième qui permettent de poser des problèmes dont la résolution nécessite de multiplier deux

décimaux²⁴⁵ : calculer l'aire d'un rectangle, calculer une approximation de la longueur d'un cercle, appliquer un taux de pourcentage, calculer des durées, représenter graphiquement un relevé statistique, étudier des situations relevant du modèle proportionnel (échelle, prix...), effectuer des changements d'unités de mesure... Dans une perspective d'enseignement contextualisé, on pourrait envisager l'utilisation de quelques-unes de ces situations pour introduire la multiplication des nombres décimaux. Des auteurs, dont nous avons étudié les propositions d'enseignement dans le deuxième chapitre, ont d'ailleurs élaboré des stratégies qui reposent sur certaines d'entre elles. Les professeurs ont choisi des scénarios d'enseignement décontextualisé. Ils ont reporté l'étude de ces nombreuses situations multiplicatives, comme le suggère le manuel utilisé, lors de séquences spécifiques.

Il apparaît donc que, si la multiplication, en tant qu'opération, est une abstraction de la relation qui lie des grandeurs, et si cette opération permet de modéliser des situations qui mettent en jeu ces grandeurs, les professeurs préfèrent, dans un premier temps, initialiser l'enseignement de cette opération de façon décontextualisée et, dans un deuxième temps, traiter séparément les différentes situations pour elles-mêmes. Quitte, dans un troisième temps, à revenir sur l'enseignement de l'opération. Tout se passe donc comme si les professeurs considéraient que l'étude d'une situation multiplicative, fût-elle fondamentale, ne permettait pas un apprentissage de la multiplication qui soit transférable à l'étude d'autres situations. Comme si chaque situation multiplicative devait être enseignée pour elle-même afin que les élèves puissent résoudre les problèmes dans lesquelles elle est sous-jacente.

Cette façon d'envisager l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux et des situations multiplicatives peut s'interpréter comme une opposition à un principe pédagogique selon lequel la multiplication, en tant qu'opération, pourrait s'apprendre *par* l'étude de situations multiplicative différentes. Un tel principe rappelle ceux de Z. P. Diénès²⁴⁶ :

Principe de variabilité mathématique. Il impose de faire varier tous les caractères non essentiels à la structure du concept, afin de braquer le projecteur sur ce qui est réellement constant. Ce caractère constant sera, en fait, le concept mathématique général, débarrassé de la souillure de toute particularisation. (...) *Principe de variabilité perceptuelle.* L'essence de l'abstraction est d'extraire les propriétés communes de situations de types différents. En fait, il faut rendre ces situations différentes tout en conservant constante leur structure essentielle du point de vue conceptuel. Les propriétés communes extraites seront alors les abstractions qu'il s'agit de faire apprendre.

²⁴⁵ Les situations suivantes figurent explicitement au programme de la classe de sixième, nous les avons citées dans l'ordre de leur apparition.

²⁴⁶ DIENES Z. P. (1966), *Construction des mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France [p 259]

De tels principes ont été critiqués par Guy Brousseau ²⁴⁷ :

Une telle didactique est indépendante des contenus. Elle conduit même le professeur à mettre l'accent sur des variables non pertinentes de la situation mathématique (celles qui ne les modifient pas) au détriment des conditions spécifiques ("principe de variabilité").

Finalement, tout se passe comme si les professeurs appliquaient un principe contraire au principe de variabilité de Z. P. Diénès, un principe de "non-abstraction par l'étude de problèmes isomorphes" qui les conduiraient à enseigner dans un premier temps le concept, éventuellement de façon décontextualisée, dans un deuxième temps, les situations avec leur variabilité spécifique ce qui permettrait, ce faisant, d'enrichir le concept sous-jacent.

Conclusions sur l'élaboration de la stratégie d'enseignement

L'analyse des stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs que nous avons observés a montré quelques différences mais aussi des choix communs. En évoquant des raisons qui tiennent parfois à l'apprentissage mais aussi parfois à des contraintes liées à l'exercice du métier d'enseignant, nous avons montré que tout se passe comme si les choix communs des professeurs répondaient à quelques principes :

- il est nécessaire de marquer des succès d'étapes dans la progression de l'enseignement, ces succès garantissent le bon fonctionnement de la classe et la reconnaissance du professeur ;
- la durée des étapes est relativement limitée. Cette durée est déterminée en anticipant sur les capacités des élèves à résoudre les problèmes posés afin d'éviter la lassitude ou simplement l'attente de la réponse et des explications données par le professeur ;
- plutôt que de traiter "complètement" une notion assez riche en une seule séquence, mieux vaut programmer des occasions de revoir cette notion durant l'année ce qui permettra de l'enrichir progressivement ;
- l'enseignement d'une notion sous-jacente à différentes situations nécessite d'aborder chacune de ces situations dans leur spécificité et d'enseigner spécifiquement la notion abstraite afin que les élèves puissent résoudre, en la mobilisant, les problèmes issus de ces situations.

La stratégie d'enseignement répond à une fonction dans l'élaboration du scénario de la séquence : elle en constitue la trame, elle permet au professeur d'organiser les contenus du champ mathématique. Nous avons vu que les professeurs, malgré quelques divergences, ont effectué des choix stratégiques communs que nous avons tenté d'interpréter. Nous nous proposons maintenant de montrer que la stratégie d'enseignement répond aussi à une fonction dans le déroulement même du scénario.

²⁴⁷ BROUSSEAU G. (1986), *Fondement et méthode de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques 7/2* (33-115), Grenoble : La pensée sauvage éditions

Une stratégie d'enseignement pour aider à l'animation du scénario

La stratégie, nous allons le voir, joue un rôle complémentaire à celui du champ mathématique : en appliquant au champ mathématique le principe de clôture, le professeur évite les digressions trop importantes, ou insuffisantes pour contribuer efficacement aux apprentissages ; en élaborant sa stratégie d'enseignement, le professeur trace un itinéraire pour conduire sa classe et s'assure la possibilité d'improviser.

Nous avons montré que la délimitation du champ mathématique de la séquence répondait à différentes contraintes de l'exercice du métier d'enseignant dont une qui consiste à éviter les incidents qui détourneraient une partie de la classe de la direction que le professeur a fixée pour tous les élèves. L'analyse du champ mathématique, telle que nous l'avons menée, nous a permis d'obtenir des résultats sur le projet de l'enseignant. L'analyse de la stratégie d'enseignement nécessite de prendre en compte la complexité de l'activité du professeur : la stratégie concerne le projet mais elle concerne aussi son animation en classe. Comme nous l'avons dit, en reprenant les propos d'Aline Robert, les pratiques enseignantes sont des pratiques complexes, non réductibles à des unités séparées (comme la préparation, ou le déroulement) Nous allons donc, après avoir analysé les enjeux mathématique et didactique dans les stratégies d'enseignements, montrer que l'élaboration d'une stratégie remplit des fonctions liées à l'exercice du métier dans la classe.

Rappelons que François V. Tochon²⁴⁸ indique trois fonctions essentielles de la planification des cours dont une est décrite assez vaguement qui est de remplir des besoins liés à l'activité du professeur dans sa classe :

des besoins personnels immédiats (diminuer l'anxiété, donner de l'assurance lors de l'interaction, donner une direction, un sens, une sécurité et une certaine confiance)

Plus précisément, Janine Rogalski²⁴⁹ décrit cette fonction de la préparation des cours qui répond à des nécessités liées à l'animation même du projet :

La préparation de la séance fournit à l'enseignant une "enveloppe" des trajectoires acceptables du déroulement de la classe. Elle lui sert aussi de trame repère, pour réguler la séance en classe ou a minima l'ordonnancement de ses propres actions. Le décalage qui constitue l'incident doit être évalué par rapport au noyau de ce qui est prévu dans le fonctionnement des situations proposées en classe, quand il y a divergence par rapport à la trame (...) il peut surgir des questions de la part d'élèves qui s'accommodent mal du "on verra plus tard" qui permet de rester dans l'enveloppe attendue.

Nous allons maintenant montrer, par des exemples issus du déroulement des séquences que nous avons observées, que la définition d'une stratégie

²⁴⁸ TOCHON F. V. (1993), *Op cit.* [p. 80]

²⁴⁹ ROGALSKI J (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

d'enseignement par le professeur répond à des besoins liés à l'exercice du métier : la stratégie aide à conduire la classe le long de l'itinéraire prévu et à gérer les incidents provoqués par les réactions de certains élèves.

Une stratégie d'enseignement pour conduire la classe

Nous avons vu que les stratégies d'enseignement sont élaborées en anticipant sur les réactions des élèves : ce qu'ils devraient faire ou ne pas faire, les difficultés qu'ils devraient rencontrer, les questions qu'ils devraient se poser ou poser au professeur, les apprentissages qui devraient découler de ces activités... C'est en classe que l'enseignant va apprécier la validité de ses prédictions. C'est en classe qu'il va devoir éventuellement adapter le scénario. Nous allons montrer qu'il peut, de manière préventive, en consolider la ligne directrice, si les activités des élèves risquent de les en éloigner. Il peut aussi modifier cette ligne, à un moment du déroulement, s'il juge qu'il ne pourra plus la tenir.

Illustrons dans ce paragraphe, par quelques exemples issus de nos observations, l'importance de la stratégie d'enseignement dans la gestion de la classe pour improviser des "mesures préventives" : le professeur renforce sa stratégie d'enseignement alors même que les élèves n'ont pas, dans leur activité, choisi une autre direction que celle qui a été définie par le professeur. Dans le prochain paragraphe, nous étudierons des adaptations des professeurs pour gérer les incidents constitués par des réactions des élèves en décalage avec le scénario prévu.

♦ *Deux exemples de renforcement de la stratégie par Monsieur Bombelli*

Monsieur Bombelli introduit la technique de la multiplication des décimaux à l'aide de "l'activité préparatoire" du manuel qui propose de confronter deux méthodes présentées par deux élèves fictifs. La confrontation de ces méthodes permet d'exposer et de justifier la technique opératoire de la multiplication des nombres décimaux. C'est la stratégie d'enseignement de Monsieur Bombelli : exposer la technique et la justifier. Néanmoins, le fait même que la question de cette nouvelle opération soit posée n'a fait l'objet d'aucune préparation. Ce n'était pas le choix, par exemple, de Madame Agnesi qui avait mis ses élèves en difficulté dans la résolution d'un problème numérique afin qu'ils se posent cette question. Monsieur Bombelli choisit alors d'explicitement aux élèves la réflexion qu'ils doivent conduire : il relit le titre du chapitre "*Multiplier des décimaux*", celui de l'activité préparatoire "*Comment multiplier deux décimaux*" puis il ajoute "*qu'on est dans le vif du sujet*". En quelque sorte, Monsieur Bombelli improvise, sur un mode ostensif, une introduction à "l'activité préparatoire" du manuel, introduction qu'il n'avait pas programmée dans son scénario, introduction qui souligne sa stratégie à l'attention des élèves : le professeur présente le savoir, les élèves devront apprendre à l'appliquer.

La première des deux méthodes présentées par les élèves fictifs du manuel est un "texte à trous" que les élèves (les vrais) doivent compléter. Le texte de la première méthode est disposé en deux colonnes : dans la première les auteurs ont posé la multiplication des deux décimaux, dans la seconde ils ont posé celle des entiers associés aux facteurs décimaux en supprimant leurs virgules. Cette

disposition incite les élèves à commencer leur activité par la colonne de gauche alors qu'ils ne pourront commencer véritablement que par celle de droite.

Cela gêne Monsieur Bombelli qui recopie l'activité au tableau et décide d'envoyer un élève pour corriger. Il ajoute immédiatement un commentaire : *"il faut commencer par la colonne de droite parce qu'a priori, on ne sait pas faire la colonne de gauche"*. Par cette aide, il compense ce qu'il estime être un défaut de présentation de la tâche par le manuel. Pourtant le fait que les élèves perçoivent eux-mêmes qu'ils ne peuvent pas commencer par la colonne de gauche constitue sans doute un moyen mis en œuvre par les auteurs du manuel pour justifier la présence de la colonne de droite. L'élève nous semble devoir commencer par la colonne de gauche où figure la multiplication des deux décimaux, ne pas y parvenir et passer à la colonne de droite où figure la multiplication des entiers associés aux facteurs décimaux en supprimant leur virgule pour retourner à celle de gauche. Le passage de gauche à droite est justifié par l'utilisation d'opérateurs multiplicatifs, le passage de droite à gauche est justifié par l'utilisation d'une division qui compense l'effet des opérateurs précédemment appliqués.

Cette disposition constitue l'introduction que le professeur a choisie d'improviser avant de commencer l'activité préparatoire : les auteurs commencent par poser l'opération que les élèves ne peuvent pas effectuer et, ensuite, fournissent des éléments qui permettent le calcul du produit. Monsieur Bombelli, qui reprend du manuel une activité qu'il n'a pas lui-même conçue, connaissait-il ce potentiel de l'activité au moment où il a décidé de l'introduire ? L'a-t-il perçu ensuite au moment où il précise qu'il faut commencer par la colonne de droite ? Sans doute pas, mais Monsieur Bombelli a préféré anticiper ce qu'il prévoyait être une gêne éventuelle pour les élèves : il avait explicité l'objectif de l'activité (élaborer une méthode pour calculer le produit de deux nombres décimaux), il explicite encore le choix des auteurs (c'est parce qu'il est normal de ne pas savoir compléter la colonne de gauche qu'il faut commencer par celle de droite). Ainsi, Monsieur Bombelli, par deux fois successives, improvise des interventions qui lui permettent de rester dans une animation conforme à sa stratégie d'enseignement : le questionnement des élèves est évité, c'est le professeur qui présente le savoir, aux élèves de l'appliquer.

♦ *Un exemple de renforcement de la stratégie par Madame Theano*

Madame Theano a proposé trois problèmes portant sur la multiplication d'un décimal par un entier dès le début de la séquence. L'objectif est d'évaluer les compétences des élèves de la classe sur la reconnaissance du modèle multiplicatif ainsi que sur la technique opératoire. La modélisation des situations est de difficulté croissante. Madame Theano sait aussi qu'elle va demander aux élèves d'utiliser les ordres de grandeur pour placer la virgule au produit de deux décimaux. Aussi demande-t-elle aux élèves, dès le début de la séquence, de contrôler les résultats obtenus en utilisant les ordres de grandeur.

Durant la résolution des problèmes, le professeur circule dans les rangs et observe les élèves. Ils résolvent les problèmes mais peu d'entre eux contrôlent leurs résultats. Madame Theano rappelle fréquemment sa demande et, pour chaque exercice, lors de la correction, à haute voix, elle guide la classe pour effectuer le

contrôle de la valeur obtenue avec les ordres de grandeur. Ainsi, lors de la correction de ces petits problèmes par le professeur, le contrôle du résultat obtenu prend une place dominante par rapport au reste de la tâche. Ce relief, imprimé à la correction par Madame Theano, prépare les élèves aux réflexions qu'ils vont devoir mener pour réaliser la prochaine tâche qui leur sera proposée : contrôler la place de la virgule d'un produit de deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur des deux facteurs.

Ces exercices ont permis à l'enseignante de prendre quelques repères sur la capacité des élèves à résoudre un problème multiplicatif mais aussi d'évaluer leur capacité à utiliser les ordres de grandeur et de les préparer à l'activité qui est au cœur de la stratégie programmée.

♦ *Un exemple de renforcement de la stratégie par Madame Germain*

Madame Germain souhaite éviter que les élèves se contentent de décaler la virgule pour multiplier deux décimaux, elle sait qu'alors beaucoup d'entre eux se tromperont. Elle fait l'hypothèse que s'ils pouvaient interpréter la position de la virgule du produit, ils pourraient contrôler leur démarche et ainsi corriger des erreurs éventuelles. Madame Germain tente donc, dès le début de la séquence, de valoriser les démarches justifiées.

Une élève ne savait pas multiplier par 0,1 ou 0,01, elle apprend à le faire grâce à d'autres élèves qui lui expliquent la méthode. Après qu'elle a réussi un calcul, Madame Germain lui demande si elle répond pour faire comme tout le monde. L'élève répond qu'elle a mieux compris. Madame Germain dit qu'elle a plutôt mieux *appris* que mieux *compris* et qu'on y reviendra. On voit ici comment le professeur, sans déprécier la réussite de son élève, tente de montrer que la compréhension est aussi un objectif du travail mathématique : il ne faut pas se contenter d'apprendre.

♦ *Conclusions sur le renforcement de la stratégie d'enseignement pour conduire la classe*

D'une façon générale, l'enseignement vise à modifier le rapport au savoir d'un élève, ce rapport ayant des dimensions institutionnelles, sociales, psychologiques... Indépendamment de l'enseignement, l'enfant apprend, en interaction avec son environnement. L'enseignant intervient dans la dynamique d'apprentissage de l'enfant. Nous distinguons l'élève de l'enfant en distinguant la dynamique d'apprentissage dont la responsabilité est partagée avec le professeur, de celle qui ne l'est pas. Janine Rogalski²⁵⁰ précise à ce sujet que :

Cette interaction de l'action enseignante avec une dynamique propre "côté élève" rend compte de deux phénomènes largement constatés : l'existence d'élèves qui n'apprennent pas malgré les compétences professionnelles de leur enseignant, et l'existence d'élèves qui apprennent malgré les défauts avérés d'une action enseignante (.)

En élaborant sa stratégie d'enseignement, le professeur parie que les élèves apprendront en effectuant les tâches qu'il leur proposera. Le sens de ces nouvelles

²⁵⁰ *Ibidem*

connaissances pour les élèves dépend des situations qu'ils auront rencontrées. Il est donc lié à la stratégie de l'enseignant. Mais le sens de ces nouvelles connaissances, et leur construction même, dépend de chaque élève. Aussi, parfois, et nous venons d'en citer des exemples, le professeur enrichit le déroulement de mesures "préventives" qui visent à renforcer la ligne directrice du scénario prévu afin d'optimiser le nombre d'élèves qui, effectuant bien la tâche attendue par le professeur, construiront de ce fait les connaissances visées.

Il arrive pourtant que les réactions des élèves indiquent au professeur qu'ils ne suivent pas l'itinéraire prévu. L'enseignant doit alors gérer cet incident, que constitue la réaction de ces élèves, en adaptant son activité. Nous allons montrer que la stratégie d'enseignement est utile aux professeurs pour improviser ces adaptations.

Une stratégie d'enseignement pour gérer les incidents

Nous avons constaté lors de nos observations des cas où la réaction d'un élève, ou de plusieurs d'entre eux, a conduit le professeur à une adaptation de son activité. En reprenant les termes de Janine Rogalski, nous dirons que cette réaction est un incident et que l'adaptation du professeur est une gestion de cet incident. Une étude quantitative systématique de ce phénomène sera proposée au chapitre 7 consacré à l'étude des adaptations des professeurs aux réactions de leurs élèves.

Commençons par présenter des exemples, nous les interpréterons ensuite et nous montrerons que tout se passe comme si les professeurs utilisaient aussi leur stratégie d'enseignement pour gérer les incidents.

♦ Un exemple d'adaptation de Madame Agnesi

Madame Agnesi a proposé des problèmes de calcul de prix dont les valeurs sont entières puis décimales pour que les élèves, au moment de multiplier deux décimaux, signalent au professeur qu'ils ne connaissent pas la technique de cette opération. Cependant, certains élèves procèdent par conversion d'unités et déterminent les valeurs demandées sans jamais multiplier deux décimaux. Quand un de ces élèves propose d'exposer sa méthode, Madame Agnesi commence par refuser puis elle revient sur sa décision et laisse l'élève s'exprimer.

Analysons cette réaction. Le professeur réalise que les élèves peuvent résoudre le problème autrement qu'en lui demandant comment multiplier deux décimaux. Elle comprend alors qu'ils s'engagent sur une méthode qui les éloigne de la direction prévue. Sa première réaction est d'interdire l'exposé de la méthode, ce qui nuit à la relation avec les élèves. Puis elle élabore mentalement un retour à sa ligne directrice en s'appuyant sur deux arguments : premièrement les conversions d'unités sont mal acquises et difficiles pour beaucoup d'élèves et, deuxièmement, la méthode qui repose sur ces conversions manque de généralité. Sachant qu'elle pourra engager à nouveau les élèves vers le chemin qu'elle avait prévu, elle autorise finalement l'expression de la démarche de l'élève. Elle expose alors à son tour cette méthode pour toute la classe en insistant sur sa difficulté ainsi que sur le fait qu'on l'utilise faute de savoir multiplier un décimal par un décimal. Cet argument souligne la nécessité de la technique qui fait encore défaut, ce qui

enrichit son scénario et renforce sa stratégie d'enseignement. Puis elle clôt l'exposé en faisant remarquer que les problèmes proposés ne porteront pas toujours sur des kilogrammes c'est-à-dire en montrant le manque de généralité de la méthode. Ainsi, elle renforce une fois encore sa stratégie et rassemble toute la classe dans le cheminement prévu. La gestion de cet incident par Madame Agnesi lui aura finalement permis de récupérer tous les élèves plutôt que d'en laisser quelques-uns qui, procédant par conversion malgré l'interdiction du professeur, auraient insisté pour que l'enseignante valide leur méthode, ce qui les aurait empêchés de revenir vers la démarche prévue pour toute la classe.

C'est parce qu'elle a craint que la démarche imprévue de quelques élèves ne détourne l'ensemble de la classe de sa stratégie d'enseignement que Madame Agnesi a commencé par interdire cette démarche ; c'est parce qu'elle a réussi à anticiper l'intégration de cette méthode de calcul au service de la stratégie programmée qu'elle a permis à ces quelques élèves d'exprimer les résultats de leur recherche et qu'elle a pu mieux encore les conduire vers l'objectif visé.

♦ *Un exemple d'adaptation de Monsieur Bombelli*

Au tableau, un élève a posé la multiplication $1\,275 \times 67$, il l'a effectuée en écrivant un zéro pour décaler le deuxième produit partiel. Mais ce produit partiel est un multiple de 100 puisqu'on commence par multiplier 6 par 5. Un autre élève s'étonne de voir deux zéros au deuxième produit partiel et il questionne son professeur. Mais la fin de la séance approche, Monsieur Bombelli reçoit cette question comme une perturbation du déroulement prévu. Sans doute redoute-t-il le débat qui risque d'animer les partisans du "point" pour marquer le décalage contre les partisans du "zéro". Ce débat ne manquerait pas d'éloigner la classe entière de la tâche prévue : établir la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux. Aussi Monsieur Bombelli n'apporte-t-il aucune réponse à l'élève, il se contente de lire à haute voix les chiffres inscrits au tableau en les approuvant comme si la question posée avait eu pour origine une difficulté de lecture du tableau.

Alois que dans les deux exemples précédents, Monsieur Bombelli avait improvisé des interventions pour souligner sa stratégie afin d'aider les élèves à apprendre (selon lui et on peut ne pas être d'accord avec ses choix), nous voyons dans cet exemple comment le professeur, parfois (peut-être ici parce que la fin de la séance approche et que l'activité en cours n'est pas tout à fait terminée), improvise des interventions dont l'objectif est de souligner la ligne directrice pour que les élèves la suivent, indépendamment des questions qu'ils se posent sur ce qui est fait en classe. Alors que Madame Agnesi a réussi à intégrer à son scénario la démarche imprévue de certains élèves, Monsieur Bombelli n'a pas pu en faire autant avec la question sur la technique de la multiplication de deux entiers et il a rejeté cette question. Pour la rejeter, il a feint de ne pas la comprendre, puis il a coupé court en relançant l'attention de tous sur la suite de l'activité c'est-à-dire en ramenant l'ensemble des élèves vers le déroulement prévu.

♦ *Un exemple d'adaptation de Madame Germain*

Nous avons vu dans l'exposé de sa stratégie d'enseignement que Madame Germain souhaite renforcer, auprès de ses élèves, l'importance de la partie entière d'un nombre décimal. Pour ce faire, elle choisit de les faire travailler sur les ordres de grandeur. Elle propose un exercice où il faut choisir le produit des nombres 234 et 11,5 parmi trois propositions : 269,1, 9 621 ou 2 691. Un élève propose 2 691, il justifie sa réponse en remplaçant 11,5 par 10 et en approchant le produit par 2 340. L'élève explique alors que 269,1 est trop petit et que 9 621 est trop grand. Madame Germain accepte que 269,1 soit trop petit parce qu'il est inférieur à 2 340 qui est une approximation par défaut du produit cherché mais elle refuse que 9 621 soit rejeté sans explication précise. Cette recherche de précision dans l'argumentation sera utile pour que les élèves n'acceptent pas la règle de la virgule de la multiplication des nombres décimaux sans comprendre son origine. Mais la conséquence à accepter par le professeur sera de passer des ordres de grandeur aux encadrements dont la théorie est plus facile et qui permettent à des élèves de ce niveau d'élaborer des justifications plus précises. Comme l'utilisation d'encadrements permet aussi de mettre l'accent sur la partie entière des nombres décimaux, Madame Germain entraînera finalement ses élèves vers les encadrements plutôt que vers les ordres de grandeur.

L'enseignante modifie son scénario en abandonnant les ordres de grandeur (et donc une part de l'enseignement prévu sur les nombres et sur l'écriture décimale) pour renforcer sa stratégie qui repose, de façon fondamentale, sur la recherche de démarches établies mathématiquement.

♦ *Conclusions sur l'aide, fournie par la stratégie, à la gestion des incidents*

Ces exemples, observés à des moments critiques du déroulement de la séquence, montrent que tout se passe comme si Madame Agnesi et Monsieur Bombelli utilisaient leur stratégie d'enseignement comme un outil d'aide à décision pour gérer la classe parce que des élèves, parfois, réagissent autrement qu'ils ne l'avaient prévu. Madame Germain aurait modifié une tâche prescrite, compte tenu de la réponse d'un élève, pour renforcer sa stratégie d'enseignement.

Nous avons illustré trois décisions de nature adaptative. Les deux premières, l'une prise par Madame Agnesi et l'autre par Monsieur Bombelli, ont eu pour origine des réactions d'élèves qui s'écartaient de la trajectoire prévue. La troisième, prise par Madame Germain est sensiblement différente, c'est l'itinéraire prévu qui a été localement modifié pour, compte tenu de la réaction d'un élève, renforcer la ligne directrice générale de la stratégie d'enseignement. Madame Agnesi a réussi à intégrer la démarche d'un groupe d'élèves au déroulement alors qu'elle avait commencé par la refuser. Monsieur Bombelli, peut-être parce qu'il était pressé par le temps, a rejeté la question d'un élève. Madame Germain a modifié une tâche. Dans tous les cas, la stratégie d'enseignement a manifestement servi de référence aux professeurs pour les aider dans leur choix.

Conclusions sur l'utilisation de la stratégie pour animer le scénario

La stratégie d'enseignement de la séquence joue donc un rôle dans la préparation de la séquence mais aussi dans son déroulement et de deux façons différentes au moins.

D'une part, elle souligne une trajectoire pour conduire l'ensemble des élèves vers la même réflexion, vers la même activité. La stratégie permet de limiter la dispersion des élèves de la classe, elle assure une certaine unité du groupe. Elle permet au professeur d'envisager, à certains moments, sa classe au singulier alors que les élèves qui la composent sont tous différents. Elle participe ainsi à une optimisation de l'échange entre le professeur et les élèves ainsi qu'entre les élèves car ces différents protagonistes sont placés dans la même situation, ils partagent le même problème, ils cherchent dans la même direction. Cette unité de la classe, qui n'est qu'apparente compte tenu du caractère individuel du rapport au savoir de chaque élève, est toutefois nécessaire au professeur s'il veut s'adresser à l'ensemble de la classe pour s'adresser à chacun de ses élèves. Parfois, de façon préventive, le professeur renforce cette direction commune s'il craint de ne pouvoir intégrer l'hétérogénéité des démarches des élèves.

D'autre part, la stratégie d'enseignement aide à la gestion des incidents constitués par des décalages entre l'activité attendue par le professeur et l'activité effective de certains élèves. Nous l'avons vu, lors de la préparation des cours, le professeur anticipe sur les réactions de la classe, mais il ne peut pas toutes les prévoir car les élèves ont des rapports au savoir personnels et différents. Comme l'a bien montré le travail de Bernard Charlot, Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex²⁵¹, non seulement les élèves ne rentrent pas tous en classe avec les mêmes attentes et les mêmes projets, mais encore ils peuvent ne pas mettre le même sens aux consignes de l'enseignant, aux tâches qu'ils réalisent en classe ou à la maison. Une fois que la tâche a été prescrite par le professeur, chaque élève la redéfinit, son travail personnel s'effectue sans contrôle du professeur, et son rapport au savoir évolue selon une dynamique propre. Cette dynamique propre, pour un élève particulier ou pour un petit groupe d'élèves, s'écarte parfois de celle que le professeur souhaite entretenir pour la classe. Il peut alors laisser évoluer cette dynamique propre et improviser un moyen de réintégrer l'élève ou le petit groupe dans la dynamique de la classe.

Que le professeur agisse de façon préventive ou qu'il gère un incident, nous avons constaté qu'il cherche à faire que les dynamiques impulsées chez chaque élève convergent vers celle qui a été anticipée pour la classe. Les exemples que nous avons cités montrent comment la stratégie d'enseignement est une référence qui permet au professeur, en classe, instantanément, de prendre des décisions pour favoriser cette convergence.

²⁵¹ CHARLOT B., BAUTIER E. & ROCHEX J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris.

Conclusions sur les choix des professeurs au niveau global

Pour élaborer leur projet d'enseignement de la multiplication en classe de sixième, les professeurs ont effectué des choix qui portent sur des objets de nature et de portée différentes : le contenu mathématique qui sera traité durant la séquence ; l'organisation de ces contenus, organisation mathématique (prérequis sur lesquels reposent les nouvelles connaissances, les propriétés admises ou démontrées...) ou organisation didactique (l'itinéraire prévu pour permettre les apprentissages, les problèmes posés, la chronologie, ...), le texte du savoir que les élèves devront retenir (le contenu et la forme), les tâches proposées aux élèves...

Des choix communs concernant les contenus et leur organisation

Pour analyser globalement les scénarios des professeurs, nous avons distingué les contenus abordés, qui constituent ce que nous avons appelé le champ mathématique de la séquence, et leur organisation que nous avons appelée la stratégie d'enseignement. Nous avons constaté que les projets des professeurs, à ce niveau global, ont de nombreuses ressemblances que nous interprétons comme des choix communs aux quatre professeurs observés.

Le premier des choix des professeurs est de programmer un enseignement conforme au programme officiel. Cette conformité impose un choix de contenus à enseigner ainsi qu'un certain rythme à l'enseignement. Le professeur se soumet aux instructions officielles et, nous semble-t-il, cela se justifie par le fait que le professeur exerce une activité sociale, il est un agent d'une institution et le respect du programme assure sa légitimité. Le programme laisse la liberté de l'organisation pédagogique donc, dans une certaine mesure seulement, de la définition des séquences, de leur champ mathématique et de la stratégie d'enseignement.

Le plus déterminant des choix communs aux professeurs relève de la stratégie d'enseignement mais il a une portée fondamentale sur le champ mathématique, c'est le choix d'un enseignement décontextualisé de la multiplication des décimaux. Les professeurs ont tous prévu d'enseigner la multiplication en tant qu'opération sur des nombres décimaux qui ne sont pas des mesures et, par conséquent, l'absence de situation multiplicative interdit toute référence (porteuse de sens) à une relation entre grandeurs et toute justification des propriétés de l'opération. Les problèmes proposés dans cette séquence ne sont finalement que des occasions pour appliquer la technique opératoire.

Cependant, trois des quatre professeurs ont élaboré une stratégie d'enseignement indépendante de celle qui est proposée par les auteurs du manuel, chacune des quatre stratégies est donc particulière. Son élaboration par le professeur nécessite une bonne connaissance du savoir mathématique à enseigner et une bonne anticipation des possibilités des élèves. Elle est importante pour le professeur car, non seulement elle constitue l'itinéraire que suivra la classe pour apprendre, mais en outre, et nous l'avons montré, le champ mathématique et la stratégie d'enseignement jouent un rôle important durant les séances : ils permettent de définir une *enveloppe des trajectoires acceptables du déroulement de*

la classe, ils constituent une trame sur laquelle le professeur peut improviser des adaptations en fonction des réactions et des besoins des élèves.

Si les stratégies élaborées par les professeurs sont particulières, elles ont, comme les champs mathématiques, des points communs importants. Nous faisons l'hypothèse que cette convergence des choix des enseignants correspond à la mise en œuvre de plusieurs " principes " : les connaissances insuffisamment acquises ne doivent pas constituer des prérequis et, si possible, elles sont écartées du champ mathématique qui doit être " auto-clos " ; la stratégie d'enseignement doit permettre un succès d'étape évaluable par le professeur, les notions qui ne peuvent pas être acquises durant cette étape doivent être étudiées à nouveau lors d'une séquence ultérieure ; durant la séquence les phases de recherche doivent être d'une durée adaptée aux capacités des élèves afin d'éviter la lassitude et l'attente d'une réponse ou d'une explication fournie par le professeur

Quelques différences importantes concernant le travail des élèves

Malgré tous ces points communs aux scénarios élaborés par les professeurs, nous avons constaté quelques différences qui concernent principalement la charge laissée aux élèves du travail d'élaboration des connaissances, de leur formulation et de leur validation.

A cet égard, le projet de Monsieur Bombelli se distingue nettement de celui des trois autres professeurs : le savoir est exposé et justifié par l'enseignant, les applications viennent seulement l'illustrer et les élèves ne sont sollicités que pour montrer leur capacité à utiliser les techniques indiquées dans le cours. Eventuellement, les erreurs, interprétées comme le produit d'une lecture inadaptée de la consigne ou de la leçon, sont utilisées pour éclaircir le texte du savoir.

Dans le scénario de Madame Agnesi, la technique opératoire n'est pas établie, la stratégie repose sur un questionnement de la part des élèves mais l'élaboration et la formulation des réponses aux problèmes soulevés sont *a priori* à la charge du professeur. A ce titre, ce scénario se distingue sensiblement de celui de Madame Theano qui laisse à la charge des élèves la formulation d'arguments pour entériner la technique opératoire. Enfin, Madame Germain prévoit une élaboration complète de la technique de la multiplication par les élèves en leur faisant produire plusieurs propriétés de l'opération qui permettent d'aboutir au calcul du produit de deux décimaux. Finalement, Madame Theano et Madame Germain se différencient principalement de Monsieur Bombelli parce que leur enseignement est davantage conçu comme un travail d'élaboration et de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves alors que leur collègue le pense plutôt comme une présentation du savoir par le professeur, présentation à laquelle les élèves participent éventuellement. Celui de Madame Germain est plus ambitieux quant à l'élaboration du savoir puisque la technique opératoire est véritablement construite alors qu'elle n'est que constatée dans le projet de Madame Theano.

Nous sommes donc conduit finalement à distinguer deux pôles d'un axe qui permet de situer les projets des professeurs :

- un pôle où la classe est envisagée comme le lieu d'exposition du savoir par le professeur et un lieu d'application des techniques indiquées dans le cours ;

– un pôle où la classe est envisagée comme un lieu de travail et de recherche mathématique, le savoir y est construit autant que possible par les élèves, les exercices ne sont pas limités à des applications techniques mais demandent aussi de combiner des connaissances disponibles.

A ces deux pôles (“lieu d’exposition du savoir” – “lieu de travail et de recherche”), les scénarios de Monsieur Bombelli et de Madame Germain trouvent respectivement leur place, ceux de Madame Theano et de Madame Agnesi occupent des positions intermédiaires, le projet de Madame Theano étant le plus proche du pôle “lieu de travail et recherche”.

Analysons maintenant les projets des professeurs par une approche plus locale en considérant les tâches prescrites aux élèves durant la séquence et voyons si cette analyse complémentaire prolonge le constat d’une certaine convergence entre les professeurs ou bien met davantage en évidence une diversité de leur choix d’enseignement.

3. Diversité des choix des professeurs au niveau local

La conversion de l’objectif du programme en une stratégie d’enseignement permet au professeur de définir les tâches qu’il proposera à ses élèves pour qu’ils construisent les connaissances comprises dans le champ mathématique de la séquence. Les tâches (au sens large) prescrites aux élèves concernent donc ici : les premiers calculs de produits de décimaux (éventuellement de manière artisanale), l’apprentissage de la technique opératoire et des propriétés de la multiplication, la modélisation de situation multiplicatives, le réinvestissement de ces nouvelles connaissances ainsi que leur institutionnalisation. Nous utilisons de nouveau, pour leur analyse, les outils élaborés en didactique des mathématiques.

Ces tâches ont une implication sur les activités des élèves et donc sur celle du professeur en classe, aussi doivent-elles encore être analysées dans une perspective qui prend en compte les contraintes liées à l’exercice même du métier d’enseignant. Nous envisagerons cette analyse des activités des élèves et des professeurs dans les deux prochains chapitres consacrés à l’étude des déroulements des scénarios élaborés par les professeurs

La première fois que les élèves multiplient deux décimaux

Les analyses des recherches en didactique des mathématiques, des publications à l’attention des enseignants et des manuels scolaires ont montré qu’il existe une diversité de choix pour introduire la multiplication de deux décimaux.

Rappel des choix repérés dans les publications

Les didacticiens présentent le problème de façon contextualisée, s’appuyant sur une situation multiplicative qui porte sur des grandeurs dont les valeurs peuvent être entières, fractionnaires ou décimales : le calcul d’aire de rectangles pour l’ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, l’agrandissement de figures planes pour celle de Guy Brousseau, et le calcul de prix de marchandises pour celle de Milena Basso & Cinzia Bonotto. Les élèves déterminent eux-mêmes,

par des procédures personnelles, le produit de deux décimaux en utilisant à la fois leurs connaissances de la situation, celles de la multiplication des entiers et celles des nombres décimaux. Ces connaissances étant en constante évolution puisque ce sont précisément elles que vise l'enseignement

Dans les publications à l'attention des enseignants, la présentation de la multiplication de deux décimaux est parfois contextualisée. Les auteurs reprennent alors les situations des ingénieries didactiques ou proposent des activités qui portent sur des droites munies d'une double graduation

En revanche, dans les manuels scolaires actuels, les auteurs proposent d'aborder directement le problème que pose la multiplication de deux décimaux de façon décontextualisée. Les élèves ne sont pas amenés à calculer le produit en utilisant des procédures personnelles issues de la situation et de la connaissance qu'ils ont des nombres décimaux. La technique opératoire est donnée par l'enseignant ou constatée sur des exemples. Dans quelques ouvrages, elle est soumise à la réflexion des élèves : on leur demande de comparer les résultats obtenus par l'application de la technique, par l'utilisation d'opérateurs ou simplement par l'utilisation de la calculatrice.

Les choix des professeurs que nous avons observés

Un des quatre professeurs, Monsieur Bombelli, adopte le choix du manuel. Il propose à ses élèves une activité préparatoire où ils doivent comparer les résultats obtenus par deux élèves fictifs, l'un utilisant des opérateurs, l'autre appliquant la technique usuelle. C'est en fait le titre du chapitre, donné en début de séquence et copié sur le cahier des élèves, qui motive l'étude de la multiplication des nombres décimaux. Ce professeur suit le manuel, les élèves en ont l'habitude. Le fait d'étudier une nouvelle notion n'est pas justifié autrement que par sa présence dans le livre de la classe. La connaissance visée n'est pas motivée par le besoin de résoudre un problème nouveau. Le premier produit de deux décimaux apparaît très tôt : après les cinq premières minutes de la séquence.

Il en va différemment dans les scénarios de Madame Theano et de Madame Germain qui, sans indiquer aux élèves comment s'y prendre, leur proposent directement de multiplier deux nombres décimaux.

Madame Theano demande aux élèves de calculer le produit des nombres entiers associés aux facteurs décimaux, de calculer l'ordre de grandeur du produit des décimaux et de calculer la valeur de ce produit avec la calculatrice. Elle compte sur leur capacité à observer et à généraliser leurs observations pour qu'ils conjecturent que les deux produits s'écrivent avec les mêmes chiffres et que la position de la virgule du produit des décimaux se déduit de celle des facteurs. Le pari est d'ailleurs gagné, mais la preuve de ces résultats n'est pas abordée.

Avant cette proposition d'activité, Madame Theano a donné quelques exercices qui portaient sur les ordres de grandeur et sur des situations multiplicatives. Ainsi, le premier produit de deux décimaux apparaît après les trente premières minutes de la séquence.

Madame Germain, en revanche, ne souhaite pas que la règle de la virgule émerge trop tôt. Elle propose d'abord de multiplier des décimaux par 0,1, 0,01 ou

0,001. De nombreuses erreurs surviennent qui n'apparaissent pas lorsqu'elle demandait de diviser un décimal par 10, 100 ou 1 000. Madame Germain s'appuie sur certains élèves qui ont déjà vu la correspondance entre les deux opérations pour la faire admettre à toute la classe. Elle précise alors aux élèves : *“ vous savez comment faire, mais vous ne savez pas tous pour quoi vous faites comme cela. Donc il faut étudier cette question ”*.

Suit alors une longue période durant laquelle les élèves travaillent sur la multiplication de deux facteurs, un seul d'entre eux est décimal et l'objectif n'est pas de calculer le produit. Les élèves élaborent des connaissances sur des propriétés de la multiplication et du produit, ils remettent aussi en cause des certitudes qu'ils avaient sur ces questions : la multiplication est compatible avec l'ordre et cela permet de déterminer des encadrements du produit ; le produit d'un décimal par un entier n'est pas forcément un “ nombre à virgule ”, il peut être un nombre entier ; si un facteur est inférieur à 1 alors le produit est inférieur à l'autre facteur...

C'est seulement après que les élèves ont accumulé ces connaissances, que Madame Germain leur propose de les mobiliser pour déterminer le produit de deux décimaux. Ainsi, le premier produit de deux décimaux différents de 0,1, 0,01 ou 0,001 apparaît à la quatrième heure de la séquence.

Enfin, Madame Agnesi est la seule à proposer aux élèves une situation multiplicative (un problème de prix) où les valeurs variables sont entières puis décimales. Avant cette situation, Madame Agnesi avait donné des exercices qui portaient sur la multiplication d'un décimal par un entier, sur les ordres de grandeur et sur la numération décimale. Le premier produit de valeurs décimales apparaît après la première demi-heure de la séquence.

Ainsi, pour ces trois derniers professeurs, la multiplication de deux nombres décimaux est demandée aux élèves alors qu'ils n'ont pas encore appris la technique opératoire. C'est par l'utilisation de procédures personnelles que les élèves pourront effectuer la tâche que leur a prescrite le professeur. Ces procédures les mèneront à des constatations qui seront généralisées, et pour certaines démontrées, afin de construire la technique opératoire usuelle.

La question de la technique opératoire

Par l'analyse préalable menée au chapitre 4, nous avons montré que les professeurs pouvaient choisir de montrer la technique opératoire à leurs élèves, de leur proposer d'autres méthodes de calcul du produit de deux décimaux ou de les laisser en élaborer en fonction de leurs connaissances antérieures. Ils pouvaient encore choisir ou non de justifier la technique opératoire, en particulier par une mise en relation avec d'autres méthodes de calcul. Rappelons brièvement ces méthodes et décrivons celles que les professeurs ont choisies d'utiliser.

Des méthodes pour calculer le produit de deux décimaux

Présentons les différentes méthodes en justifiant l'égalité $3,4 \times 4,75 = 16,15$:

– avec les fractions décimales en écrivant, par exemple, la suite d'égalités $3,4 \times 4,75 = \frac{34}{10} \times \frac{475}{100} = \frac{34 \times 475}{1\,000} = \frac{16\,150}{1\,000} = \frac{1\,615}{100} = 16,15$. Remarquons que l'écriture fractionnaire peut être remplacée par des produits par 0,1 et 0,01 mais cela demande d'utiliser la commutativité et l'associativité de la multiplication ;

– avec les unités de mesures, en écrivant, par exemple, que 4,75 m de ruban à 3,4 F le mètre correspondent à 47,5 dm de ruban à 34 c le décimètre et coûtent donc 1 615 centimes c'est-à-dire 16,15 F ;

– avec les ordres de grandeur ou les encadrements, en écrivant que $3,4 \times 4,75$ est le produit de 34 dixièmes par 475 centièmes. On obtient alors 16 150 sous-unités qu'il faut déterminer. Or le produit est compris entre 3×4 et 4×5 c'est-à-dire entre 12 et 20 donc $3,4 \times 4,75 = 16,15$ c'est-à-dire que la sous-unité à déterminer est le millième. On aurait pu conclure de la même manière en disant qu'un ordre de grandeur du produit est $3 \times 5 = 15$;

– avec les opérateurs, en utilisant éventuellement une disposition qui permet de masquer l'utilisation de la commutativité et de l'associativité de la multiplication :

$$\begin{array}{rccccccc} 3,4 & \times & 4,75 & = & & ? & \\ \downarrow \times 10 & & \downarrow \times 100 & & & \uparrow \div 1\,000 & \\ 34 & \times & 475 & = & & 16\,150 & \end{array}$$

– avec l'écriture décimale, si l'on suppose que les élèves ont appris à multiplier entre elles les différentes unités : centièmes, dixièmes, unités, dizaines, centaines...

$\begin{array}{r} 4,75 \\ \times 3,4 \\ \hline 1,900 \\ 14,25 \\ \hline 16,150 \end{array}$	<p>On commence par 4×5, on multiplie des dixièmes par des centièmes donc on obtient 20 millièmes. C'est-à-dire 0 millième et 2 centièmes. On pose 0 millième et on retient 2 centièmes. 4 dixièmes \times 7 dixièmes font 28 centièmes, plus 2 centièmes de retenue qui font 30 centièmes.</p>
---	---

– encore avec l'écriture fractionnaire, on peut calculer le produit de deux décimaux en utilisant la distributivité et en décomposant les nombres décimaux en somme de fractions décimales de dénominateurs différents (c'est la technique utilisée dans un premier temps dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin) :

$$\left(4 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}\right) \left(3 + \frac{4}{10}\right) = \frac{20}{1000} + \frac{28+15}{100} + \frac{16+21}{10} + 12 = \frac{5}{100} + \frac{1}{10} + 16.$$

Rappelons que ces différentes méthodes ne constituent pas toutes des techniques. Elles ne sont pas toutes générales. Par exemple, la méthode qui repose sur des conversions d'unités ne permet pas de calculer n'importe quel produit. Enfin certaines de ces méthodes permettent de justifier la technique opératoire

usuelle. D'autres, comme les conversions d'unité ou la détermination de l'ordre de grandeur du produit, ne le permettent pas.

Les choix des professeurs

Les quatre enseignants que nous avons observés ont chacun choisi un moyen différent de présenter la technique opératoire, un seul d'entre eux a adopté la présentation du manuel. Nous allons décrire le moyen choisi par chaque professeur puis montrer les conséquences de ce choix sur l'étanchéité du champ mathématique de la séquence en évoquant les difficultés ou les questions des élèves repérées à la lecture des narrations.

Madame Theano a choisi de demander aux élèves de confronter les produits des nombres entiers obtenus en supprimant la virgule des facteurs décimaux, les résultats affichés par la calculatrice pour les produits des décimaux et ceux que permettent d'obtenir les ordres de grandeur. Ainsi, sur l'exemple choisi, les élèves remarqueraient que les produits $3,4 \times 4,75$ et 34×475 ont les mêmes chiffres, à l'exception du zéro final. Si les premiers exemples ne conduisent pas à un produit des facteurs entiers qui se termine par zéro, les élèves pourraient conjecturer la règle de la virgule et ils conserveront un moyen de contrôler qu'ils placent correctement la virgule avec l'ordre de grandeur du produit. C'est d'ailleurs le choix de variation de cette variable didactique que Madame Theano a effectué : il n'y a aucun produit des facteurs entiers qui soit un multiple de dix dans la première séance alors qu'on en trouve de nombreux exemples dès la deuxième séance. Ce choix correspond à deux objectifs, premièrement affiner l'usage de la règle de la virgule du produit de deux décimaux et, deuxièmement, renforcer l'intérêt de l'utilisation des ordres de grandeur pour estimer le produit de deux décimaux avant de calculer sa valeur.

Aucune justification de la règle de la virgule n'a été l'objet de la séquence. Madame Theano n'en est pourtant pas restée à cette approche de la technique opératoire. Elle a proposé des situations qui permettent de travailler sur la règle de la virgule qui est souvent mal interprétée par les élèves. Ce travail qui reposait sur le calcul approché a duré un bon quart de la séquence. Il a été l'occasion de traiter les produits remarquables : $2 \times 0,5 = 1$; $4 \times 0,25 = 1$...

Madame Agnesi a choisi d'introduire la multiplication des décimaux par un problème d'achat de marchandises. Il s'agit en fait d'une succession de petits exercices de calcul du prix à payer. D'un exercice à l'autre, le professeur joue sur la variable didactique suivante : le prix au kg et le poids peuvent être des nombres entiers ou ne pas l'être. Le prix unitaire et la quantité évoluent, les valeurs sont entières, puis l'une ou l'autre est décimale et enfin, les deux sont décimales. Les élèves avaient revu la multiplication de deux entiers et celle d'un décimal par un entier, Madame Agnesi pensait montrer la règle de la virgule aux élèves et leur faire constater que cette règle est conforme à ce que donne l'utilisation des ordres de grandeur. Des élèves ont tenté de résoudre le problème posé par le calcul du produit de deux nombres décimaux en procédant à des conversions. Madame Agnesi a choisi de les suivre dans cette direction pour aboutir à la règle de la virgule.

Ainsi, la technique opératoire usuelle a été conjecturée par certains élèves, aucune justification n'a été l'objet de la séquence. Comme Madame Theano, Madame Agnesi ne s'est pas contentée de cette approche de la technique opératoire, elle a aussi proposé de travailler sur l'interprétation de la règle de la virgule en choisissant, dans le manuel, exactement le même exercice que Madame Theano. Comme nous le verrons lors de l'étude des déroulements, Madame Agnesi a facilité la tâche des élèves, si bien que le travail sur l'interprétation de la règle de la virgule a duré moins longtemps que dans la séquence de Madame Theano.

Monsieur Bombelli a adopté la présentation de la multiplication du manuel c'est-à-dire qu'il a choisi d'énoncer, dès le début de la séquence, la règle de la virgule et de l'accompagner d'une justification par les opérateurs sur un exemple. Remarquons que la méthode utilisée pour justifier la technique opératoire usuelle repose sur trois propriétés qui ne sont pas évidentes à l'entrée en sixième :

- la multiplication est associative et commutative ;
- en multipliant les deux facteurs d'un produit respectivement par deux nombres a et b , le produit est multiplié par ab ;
- si un nombre a a été multiplié par un facteur k , il suffit de diviser le produit obtenu par k pour retrouver le nombre initial a .

Aucune de ces trois propriétés n'a été l'objet de la séquence avant que ne soit abordée la justification de la technique opératoire usuelle par les opérateurs.

Monsieur Bombelli a proposé ensuite plusieurs exercices d'application de la technique opératoire. Comme Madame Theano et Madame Agnesi, il a proposé l'exercice du manuel qui pose un problème aux élèves quant à l'interprétation de la règle de la virgule mais, contrairement à ses deux collègues, il a choisi de ne pas laisser les élèves se charger de ce problème, il en a lui-même donné les tenants et les aboutissants. Dans la séquence de Monsieur Bombelli, l'utilisation de cet exercice est donc différente de celle de ses collègues. Après quelques applications numériques de la technique opératoire qui ne posent pas de difficulté (en classe, ce qui ne signifie pas que c'est le cas pour tous les élèves), Monsieur Bombelli propose cet exercice où la difficulté n'est pas une occasion donnée aux élèves pour qu'une erreur soit commise et qu'elle soit étudiée mais est une occasion pour le professeur de détailler et de préciser les conditions d'application de la règle de la virgule.

Madame Germain a choisi de ne pas donner la règle de la virgule, de ne pas proposer d'activité durant laquelle les élèves pourraient constater cette règle. Ainsi, contrairement aux trois scénarios précédents, il ne s'agit pas de donner, de découvrir ou de justifier la technique opératoire usuelle mais plutôt de construire un moyen, mathématiquement fondé, pour calculer le produit de deux décimaux. Le choix de Madame Germain est d'utiliser la décomposition des décimaux en un produit d'un entier, non-divisible par dix, par une puissance de 10. Par exemple, les élèves sont conduits à écrire une suite d'égalité du type :

$$3,4 \times 4,75 = 34 \times 0,1 \times 475 \times 0,01 = 34 \times 475 \times 0,001 = 16\,150 \div 1\,000 = 16,15.$$

Cette écriture est, bien sûr, à mettre en relation avec l'écriture fractionnaire :

$$3,4 \times 4,75 = \frac{34}{10} \times \frac{475}{100} = \frac{34 \times 475}{1\,000} = 16\,150 \div 1\,000 = 16,15.$$

Aussi pourrions-nous remarquer que l'écriture fractionnaire fait une apparition dans le déroulement de la séquence de Madame Germain. La technique opératoire usuelle apparaît ainsi dans le dernier quart-d'heure de la séquence.

Finalement, deux des quatre professeurs que nous avons observés s'arrêtent à une constatation de la règle de la virgule sur des résultats obtenus par des méthodes "artisanales" : utilisation des ordres de grandeur ou de conversions dans le système décimal. Les deux autres établissent cette règle mais l'un d'entre eux le fait dès le début de la première séance alors que l'autre n'y arrive que dans les dernières minutes de la dernière séance de la séquence.

L'étude des propriétés de la multiplication

Rappelons que les professeurs n'ont pas tout à fait délimité le même champ mathématique à leurs séquences. Ils se distinguent notamment par l'importance accordée aux propriétés de l'opération. Comme le montre le tableau suivant, si le cas de la multiplication par un facteur inférieur à 1 fait l'unanimité des professeurs, ce n'est pas le cas de l'étude des propriétés algébriques ni de l'effet de la multiplication sur l'ordre qui n'a été abordé que par deux d'entre eux, et de façon implicite.

Tableau 8. Propriétés de la multiplication étudiées dans les différentes séquences

Propriétés de la multiplication	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
Propriétés algébriques		✓	✓	✓
Mult. par un facteur inférieur à 1	✓	✓	✓	✓
Effet de la mult. sur l'ordre		✓		✓

Voyons comment l'étude de ces propriétés a été intégrée dans les différentes séquences.

Propriétés algébriques

Dans la séquence de Madame Theano, les propriétés algébriques de la multiplication ne sont pas étudiées. Signalons que tous les produits proposés dans la séquence sont des produits de seulement deux facteurs, l'associativité et la commutativité de la multiplication n'avaient donc pas d'utilité.

Madame Agnesi, à la fin de la séquence, a proposé quelques exemples de produits de plus de deux facteurs pour citer les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication. La relation avec l'addition n'a pas été abordée, la distributivité non plus. En fait, les propriétés de commutativité et d'associativité ne posent pas de problèmes aux élèves qui, assez facilement, changent l'ordre des facteurs pour calculer un produit pourvu qu'on les y autorise ce qui, bien souvent, revient à les y inciter. Madame Agnesi a proposé aux élèves de calculer "astucieusement" le produit $(2 \times 17) \times 0,5$. Les deux propriétés n'ont pas été identifiées, la règle institutionnalisée venait simplement confirmer le "droit" qu'on a de changer l'ordre des facteurs pour calculer un produit.

Monsieur Bombelli traite les propriétés de la multiplication encore plus rapidement que Madame Agnesi. Comme sa collègue, il propose un seul exercice

sur un produit de plus de deux facteurs mais, dans cette séquence, les élèves ne le résolvent pas, ils se contentent de suivre la lecture par le professeur du corrigé proposé dans le manuel où l'utilisation des propriétés n'est pas mise en évidence :

$$\begin{array}{l} A = 2,5 \times 7 \times 4 \times 0,3 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ A = \quad 10 \times 2,1 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ A = \quad 21 \end{array}$$

La "règle" lue dans le manuel est rédigée (en jouant sur le mot "importance") de façon à minimiser le questionnement des élèves : "Pour le calcul du produit de plusieurs nombres, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance" ²⁵²

Madame Germain, comme ses collègues, aborde les propriétés algébriques de la multiplication en fin de séquence. Son choix se distingue cependant de ceux des autres professeurs parce que ces propriétés constituent un moyen d'élaborer une technique pour multiplier deux nombres décimaux. On calcule $2,35 \times 7,2$ en écrivant $2,35 \times 7,2 = 235 \times 0,01 \times 72 \times 0,1 = 235 \times 72 \times 0,001$. D'une certaine manière, Madame Germain prolonge la multiplication aux nombres décimaux en postulant la conservation de ses propriétés algébriques. Ce type de construction apparaît aussi en classe de quatrième quand la multiplication est prolongée aux nombres négatifs

Pour terminer ce paragraphe consacré aux propriétés algébriques, constatons qu'aucun des professeurs n'a abordé la multiplication par 1 ou par 0 et qu'aucun d'entre eux n'a justifié les propriétés algébriques de la multiplication. Nous retrouvons là, d'une part les difficultés d'enseignement que nous avons montrées au chapitre 2, et d'autre part la possibilité que les professeurs ont de délimiter un champ mathématique "auto-clos" à l'exception des preuves des propriétés étudiées parce que, nous l'admettons, un élève de sixième ne s'interroge pas sur le pourquoi dès qu'il sait comment.

Multiplication par un facteur inférieur à 1

Cette propriété, nous l'avons déjà vu, est à l'origine de difficultés pour les élèves parce qu'elle entre en contradiction avec une conception additive de la multiplication et avec les propriétés que les élèves ont pu constater pendant trois années d'école élémentaire en multipliant par un nombre entier. Elle est, en outre, à l'origine d'une absence de reconnaissance du modèle multiplicatif de certaines situations et gêne certains élèves pour la résolution de problèmes.

Dans le scénario de Madame Theano, le cas de la multiplication par un facteur inférieur à 1 est traité comme une généralisation d'une constatation sur des produits remarquables : $2 \times 0,5 = 1$; $4 \times 0,25 = 1$... qui ont été traduits par "multiplier par 0,5 revient à diviser par 2" ou "multiplier par 0,25 revient à diviser par 4". L'association division-diminution a été le levier pour admettre que quand on multiplie par moins que 1, le produit est inférieur au multiplicande.

²⁵² Méthode p. 61 du manuel *Cinq sur cinq 6e* (1997), Paris : Hachette

Madame Theano, après avoir fait noter cette propriété dans un langage plus simple d'accès sur les cahiers des élèves, n'a proposé qu'une situation qui pose ce problème : calculer le montant à payer pour acheter 0,125 kg d'un article à 95,00 F/kg.

Dans la séquence de Madame Agnesi le cas de la multiplication par un facteur inférieur à 1 est venu répondre à l'interrogation d'élèves qui voyaient s'écrire au tableau un produit inférieur au multiplicande. Comme Madame Theano, Madame Agnesi n'a pas accordé à cette propriété une place importante dans la séquence. La "règle" a été notée sur le cahier mais Madame Agnesi n'a proposé qu'un seul exercice issu d'une situation multiplicative posant ce problème, le même que celui proposé par Madame Theano.

Monsieur Bombelli n'accorde que quelques secondes au cas de la multiplication par un facteur inférieur à 1. Il lit un paragraphe du manuel intitulé "attention danger" après avoir commenté ce titre²⁵³ :

Il est faux de penser que lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, on obtient toujours un nombre plus grand !

$$9,5 \times 1,4 = 13,3$$

supérieur à 9,5

$$9,5 \times 1 = 9,5$$

égal à 9,5

$$9,5 \times 0,6 = 5,7$$

inférieur à 9,5

Dans son commentaire, il déclare qu'il doute un peu que ses élèves soient vraiment susceptibles d'être exposés à ce danger. Il illustre pourtant la remarque du manuel en disant que les élèves savent, par exemple, que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2 donc le produit sera bien inférieur au multiplicande.

La propriété de la multiplication par un facteur inférieur à 1 apparaît environ aux deux cinquièmes de la séquence de Madame Germain. Les élèves doivent choisir la valeur du produit $8\,725 \times 0,92$ entre les quatre nombres 8 027, 802,7 et 2 087. Une élève propose 8 027 pour que ce soit à peine plus petit que 8 725. Elle argumente avec un langage imprécis "tout le monde sait que quand on multiplie un nombre par un nombre à virgule, ça fait comme une division." L'expression maladroite donnera l'occasion d'une discussion en classe. Cette propriété réapparaîtra à la dernière heure de la séquence quand Madame Germain demande à la classe de rappeler ce qui a été vu dans la séance précédente. Une phrase est alors notée dans le cahier : "Multiplier par un nombre inférieur à 1, ou dont la partie entière est 0, donne un résultat inférieur au nombre de départ".

En conclusion de ce paragraphe, nous remarquerons que tous les professeurs ont abordé cette propriété de la multiplication qui pose certaines difficultés aux élèves. Néanmoins, aucun d'entre eux n'a proposé de problème pour lequel la multiplication par un facteur inférieur à 1 gêne la reconnaissance du modèle multiplicatif. Tous les professeurs ont consacré peu de temps à cette propriété.

²⁵³ Cinq sur cinq Math 6e (1996), Paris : Hachette. [p. 60]

Seul Monsieur Bombelli déclare que cette propriété n'est pas vraiment embarrassante ; évite-t-il un problème délicat à aborder en classe parce qu'il perturbe de nombreux élèves ou ignore-t-il vraiment cette difficulté des élèves ?

Madame Theano a provoqué l'apparition de cette propriété à la fin de la séquence. Madame Agnesi et Madame Germain l'ont abordé au moment où les élèves en ont manifesté le besoin : soit parce qu'ils l'ont utilisé, soit parce qu'ils ne comprenaient pas qu'un produit puisse être inférieur au multiplicande.

La multiplication et l'ordre

L'effet de la multiplication sur l'ordre n'a été abordé que par Madame Agnesi et par Madame Germain. Ces deux professeurs n'ont pas explicité la propriété, ils se sont contentés de l'utiliser pour encadrer un produit quand le recours aux ordres de grandeur ne donnait pas d'information suffisante.

Remarquons que dans les deux séquences, ce souci de rigueur ne posait pas de problème aux élèves de la classe mais principalement au professeur qui ne souhaitait pas valider des raisonnements imprécis. Par exemple, à la question "ai-je assez avec un billet de 50 F pour acheter 48 objets qui coûtent 0,95 F chacun ?" Madame Agnesi ne se satisfait pas de la réponse d'une élève qui affirme que 0,95 F c'est à peu près 1 F. De même Madame Germain n'était pas satisfaite de la réponse d'un élève qui devait choisir parmi 269,1 ; 9 621 et 2 691 le produit $234 \times 11,5$: cet élève avait assimilé approximativement 11,5 à 10 puis le produit à 2 340 et il avait exclu 9 621 qui lui semblait beaucoup trop grand.

Les situations multiplicatives

Les enseignants que nous avons observés ont proposé à leurs élèves peu de problèmes issus de situations multiplicatives. Si l'on exclut les problèmes où une conception additive de la multiplication suffit à déterminer le modèle, le bilan est même très faible : Madame Theano propose un problème (de calcul de prix), Madame Agnesi en propose deux (encore de calcul de prix), Monsieur Bombelli et Madame Germain n'en proposent aucun.

Rappelons le cas de Madame Agnesi qui se distingue de ses collègues en proposant une situation multiplicative pour introduire la séquence. Les élèves sont très guidés pour la reconnaissance du modèle puisque c'est le même problème qui est proposé plusieurs fois alors que les valeurs numériques changent.

- 1) Alain achète 2 kg de chocolat à 52 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.
- 2) Bernard achète 2 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.
- 3) Claude achète 0,3 kg de chocolat à 52 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.
- 4) Denis achète 2,8 kg de chocolat à 52 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.
- 5) Eva achète 0,7 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.
- 6) François achète 8,3 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme.
Calcule sa dépense.

Il est donc clair que Madame Agnesi ne cherchait pas, avec cet exercice, à apprendre aux élèves à reconnaître le modèle multiplicatif d'une situation d'achat de marchandise mais qu'elle souhaitait motiver le calcul du produit de deux décimaux : les connaissances de l'école élémentaire sont insuffisantes pour calculer le prix à payer par Eva et par François. Certains élèves ont d'ailleurs cherché à calculer le prix à payer par Eva et par François en procédant à des conversions : 7 hg ou 83 hg de chocolat à 4,15 F l'hectogramme.

Madame Theano avait commencé sa séquence par trois petits problèmes multiplicatifs du niveau de l'école élémentaire. Les difficultés rencontrées par certains élèves montrent qu'un enseignement dont l'objectif est d'identifier les modèles des problèmes, est nécessaire. Pourtant, l'enseignante n'a plus proposé de situation multiplicative durant le reste de la séquence si l'on excepte un exercice où les élèves étaient guidés pour déterminer l'opération à effectuer.

En conclusion, il apparaît que les enseignants que nous avons observés n'ont pas cherché, dans cette séquence consacrée à l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, à aborder la reconnaissance du modèle multiplicatif de certaines situations. Les professeurs ont conçu un enseignement décontextualisé de la multiplication des décimaux. Mais ce n'est pas pour autant que leur enseignement s'effectue sans que les élèves résolvent de problèmes. Etudions donc les exercices qu'ils ont proposés.

Les exercices donnés par les enseignants

Les enseignants que nous avons observés utilisent le même manuel. Nous avons vu qu'un seul d'entre eux, Monsieur Bombelli, adopte la présentation de la multiplication des décimaux qui y est présentée. Tous, en revanche, ont puisé dans la série d'exercices proposée. Néanmoins, Monsieur Bombelli est le seul à ne pas proposer d'énoncés issus d'autres manuels ou qu'il aurait lui-même élaboré.

La résolution d'exercices occupe une place importante dans les scénarios : Madame Theano en a proposé 14 dans cette séquence dont 6 qui ne figurent pas dans le manuel, Madame Agnesi en a proposé 12 dont 6 hors du manuel, Monsieur Bombelli en a proposé 9 et Madame Germain en a proposé 14 dont 6 hors du manuel.

A quels objectifs correspondent ces exercices que les professeurs ont choisi d'intégrer à leur séquence ? Certains énoncés ont été préparés et photocopiés par les enseignants pour proposer des activités qui ne figurent pas dans le manuel. Ils correspondent au choix d'organisation des objets mathématiques dans la séquence. Par exemple, Madame Theano a proposé différents exercices pour que les élèves calculent le produit de deux décimaux en trois étapes : calculer le produit des entiers associés, c'est-à-dire sans tenir compte des virgules des facteurs, puis déterminer un ordre de grandeur du produit des décimaux et, enfin, placer la virgule au produit des entiers pour obtenir le produit des décimaux. Madame Agnesi a proposé une activité composée de six exercices de calcul de prix où les valeurs étaient entières puis décimales. Madame Germain a proposé une analyse

de productions écrites d'élèves fictifs en complément à un exercice du manuel qui posait des difficultés dans la classe.

D'autres exercices, qui n'ont pas été choisis dans le manuel, ont été improvisés durant le déroulement de la séquence. L'analyse des déroulements devra permettre de répondre à la question suivante : quels étaient les objectifs de ces exercices improvisés ? Et quelle était leur fonction : répondre à des besoins pédagogiques des élèves et/ou à des besoins personnels de l'enseignant concernant l'exercice de son métier ?

Comme nous l'avons fait pour étudier les exercices des manuels, nous allons classer les exercices donnés par les professeurs en fonction de leur objectif principal. Enfin, nous pourrons comparer, par rapport à ces objectifs, les choix des enseignants, ainsi que celui des auteurs du manuel.

Pour l'étude des exercices menée au chapitre 3, nous avons distingué les énoncés qui portent sur la multiplication d'un décimal par un entier de ceux qui portent sur la multiplication de deux décimaux c'est-à-dire que nous avons distingué les exercices qu'un élève peut traiter avec les connaissances de l'école élémentaire de ceux qui portent sur la notion nouvelle au programme de la classe de sixième. Parmi ces derniers nous avons repéré ceux dont l'objectif est la détermination d'un produit (par la technique opératoire, par le calcul mental ou raisonné, par les ordres de grandeur...), ceux dont l'objectif est de poser des questions plus théoriques sur la multiplication (propriétés, nombre de décimales du produit...) et ceux qui portent sur des situations multiplicatives (problème de prix, de conversion, de calcul d'aire ou de périmètre...).

Le tableau obtenu permet de comparer les choix des professeurs en regard des choix des auteurs du manuel de la classe.

Tableau 9. Exercices proposés aux élèves dans les quatre séquences et dans le manuel

	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain	Cinq sur cinq
Exercices sur la multiplication	1	0	2	2	35
Mult. de deux décimaux	11	12	7	12	18
Détermination du produit	7 (64%)	6 (50%)	5 (71%)	9 (75%)	7 (39%)
Technique opératoire	1 (9%)	2 (17%)	1 (14%)	2 (17%)	2 (11%)
Calcul mental, calcul raisonné	0 (00%)	2 (17%)	3 (43%)	4 (33%)	3 (17%)
Ordre de grandeur, encadrement	6 (55%)	2 (16%)	1 (14%)	3 (25%)	2 (11%)
Questions théoriques	2 (18%)	4 (33%)	2 (29%)	3 (25%)	6 (33%)
Situations multiplicatives	2 (18%)	2 (17%)	0 (00%)	0 (00%)	5 (28%)
Problèmes de prix	2 (18%)	2 (17%)	0 (00%)	0 (00%)	4 (22%)
Problèmes de conversion	0 (00%)	0 (00%)	0 (00%)	0 (00%)	1 (06%)

Ce bilan, bien sûr, ne rend pas compte des activités mathématiques des élèves mais bien seulement des tâches qui leur ont été proposées dans les séquences puisque les énoncés des exercices seulement sont pris en compte. Or il arrive souvent qu'en classe, en fonction des réactions de leurs élèves, les professeurs complètent ou détournent un exercice pour lui donner un autre objectif que celui qui avait été prévu par les auteurs du manuel. Une étude plus approfondie des activités induites en classe par ces énoncés et par les différents professeurs sera

menée dans le chapitre suivant consacré à l'étude des activités des élèves durant les déroulements des scénarios prévus. Néanmoins, en lisant de bas en haut les chiffres du tableau, nous pouvons déjà dégager quatre observations.

Premièrement, forçant le trait dessiné par les auteurs du manuel, les professeurs ont délaissé l'étude de situations multiplicatives. Ils ont choisi d'enseigner la technique opératoire et les propriétés de la multiplication indépendamment des situations multiplicatives.

La deuxième observation porte sur l'importance des questions théoriques. Ces exercices ne sont délaissés par aucun des enseignants et, à un exercice près, on retrouve dans chaque séquence la proportion qui leur est consacrée dans le manuel. Une proportion qui est la plus forte des six manuels que nous avons étudiés. Les professeurs ont préféré, durant cette séquence, faire travailler les élèves sur des questions plus théoriques décontextualisées. Cela plutôt que de les faire travailler sur des situations multiplicatives puis de leur poser ces questions de façon contextualisée. Les professeurs ont choisi de ne pas aborder la reconnaissance du modèle multiplicatif de différentes situations avant d'avoir traité, de façon décontextualisée, le problème numérique de la multiplication des décimaux.

Troisièmement, nous pouvons observer que la détermination du produit de deux décimaux est l'objectif majeur des exercices proposés. Leur part varie de la moitié aux trois quarts des exercices de la séquence suivant les professeurs alors que dans le manuel, ces exercices ne représentent qu'un tiers de l'ensemble. L'importance de ces exercices dans les séquences observées par rapport à celle constatée dans le manuel s'explique cependant autrement que par la volonté des enseignants d'entraîner les élèves au calcul écrit. Les exercices de technique opératoire sont largement dominés par les exercices de calcul mental ou raisonné et de recherche d'ordres de grandeur ou d'encadrements. Des exercices qui ont été, en classe, l'occasion de nombreuses questions plus théoriques. Ainsi, nous expliquons (c'est une hypothèse) l'importance des exercices de détermination du produit de deux décimaux dans la séquence de certains professeurs par le fait qu'ils enseignent la multiplication à partir d'exercices. Des exercices qui ont sans doute été conçus comme des exercices d'application par les auteurs du manuel et qui sont utilisés comme des moyens donnés aux élèves pour découvrir les objets de savoir de la séquence. Une analyse différente, qui portera non plus seulement sur les tâches prescrites mais bien sur les activités engendrées par ces tâches, sera menée dans le chapitre suivant et permettra de valider cette hypothèse.

Enfin, nous pouvons remarquer que la proportion des exercices qui ne portent pas sur la multiplication de deux décimaux par rapport à l'ensemble des exercices proposés est faible chez les professeurs (de 0% pour Madame Agnesi à 22% pour Monsieur Bombelli) alors qu'elle est forte chez les auteurs du manuel (66%). Il apparaît donc que les professeurs consacrent l'essentiel du travail en classe aux nouvelles connaissances à acquérir. Même quand un travail a pour objectif de revoir des notions plus anciennes, il s'effectue en relation avec les nouvelles.

Les phases d'institutionnalisation

Durant les phases d'institutionnalisation²⁵⁴, le professeur valide les connaissances construites en classe : il leur confère le statut de savoir. Ce moment du déroulement doit aussi être analysé comme un produit de la préparation du scénario par le professeur car, comme le montrent les recherches citées par François V. Tochon sur la programmation des cours²⁵⁵ :

les enseignants consacrent la plus grosse partie de leur temps au contenu à enseigner (...) Les décisions relatives à la **matière** sont prises par de nombreux enseignants et, pour près des trois quarts d'entre eux, c'est la première décision

Pendant la préparation, le contenu à enseigner est synthétisé par le professeur qui destine cette synthèse aux élèves de sa classe. Eventuellement, dans cette synthèse, il organise les savoirs et les établit. Le programme de la classe de sixième insiste d'ailleurs sur la nécessité de ces phases d'institutionnalisation²⁵⁶ :

Il convient de faire fonctionner, à propos de nouvelles situations et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et "outils" mathématiques antérieurement étudiés. Il convient également de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place.

Etudions donc, dans les narrations des séquences, les phases d'institutionnalisation des connaissances construites durant les séances consacrées à la multiplication des nombres décimaux.

Chez tous les professeurs, ces phases d'institutionnalisation se terminent par l'écriture d'un texte de "leçon" au tableau et sur le cahier des élèves. Ce texte est plus ou moins développé suivant les enseignants.

Pour trois professeurs parmi les quatre que nous avons observés, sur leur cahier de cours, les élèves ont copié la leçon et ils n'ont copié que la leçon. Seul, Monsieur Bombelli a proposé à ses élèves de recopier sur ce cahier les réponses à une activité préparatoire du manuel. Mais en ce qui concerne la leçon proprement dite, Monsieur Bombelli, pressé par le temps, s'est contenté d'une lecture de la page de cours du manuel. Peut-être a-t-il décidé de la faire recopier, au moins partiellement, mais nous n'avons pas assisté à cette copie.

Aussi allons-nous analyser et comparer les phases d'institutionnalisation par les textes que les professeurs ont, éventuellement avec l'aide de certains élèves, rédigé au tableau et qu'ils ont demandé de recopier sur les cahiers. Pour le cas de Monsieur Bombelli, nous intégrerons à notre objet d'étude la page de cours de manuel lue en classe qui n'a pas laissé de trace écrite sur les cahiers des élèves.

²⁵⁴ Ce terme a été défini précisément par Guy Brousseau dans la théorie des situations, nous l'utilisons ici avec une acception plus large pour indiquer toutes les façons d'aboutir à l'exposition des savoirs.

²⁵⁵ TOCHON F. V. (1993), *Op. cit.* [pp. 69-89].

²⁵⁶ Point B du paragraphe "Organisation de l'enseignement" du programme de mathématiques pour la classe de sixième défini par l'arrêté du 22.11.95.

Nous allons d'abord présenter ces textes en précisant les moments durant lesquels ils ont été copiés en classe. Puis nous les analyserons et nous les comparerons suivant trois axes : leur intégration dans le déroulement des séances, le contenu traité et la forme utilisée, la validation et la structuration des savoirs exposés

Les institutionnalisations des séquences des quatre professeurs

Voici, pour chaque professeur, en caractères "manuscrits", la "leçon" que les élèves ont notée sur leur cahier.

♦ *Les institutionnalisations écrites de Madame Theano*

La première séance est consacrée à l'utilisation des ordres de grandeur pour estimer le produit de deux décimaux et pour placer la virgule, une fois que le produit des entiers associés aux facteurs décimaux a été calculé. Au milieu de la deuxième séance, après avoir organisé une phase d'institutionnalisation orale et quatre exemples d'application, Madame Theano propose de faire un bilan et de le noter sur le cahier :

Multiplication des nombres décimaux

I Exemple

$$\begin{array}{r} 4,1 \\ \times 2,8 \\ \hline 328 \rightarrow 8 \times 41 \\ 82 \bullet \rightarrow 20 \times 41 \\ \hline 1148 \end{array} \quad \text{donc}$$

$$\begin{array}{r} 4, \textcircled{1} \rightarrow 1 \text{ chiffre après la virgule} \\ \times 2, \textcircled{8} \rightarrow 1 \text{ chiffre après la virgule} \\ \hline 11, \textcircled{48} \rightarrow 2 \text{ chiffres après la virgule} \end{array}$$

Contrôle

* *Ordre de grandeur*

$$\begin{array}{r} 4,1 \rightarrow 4 \\ \times 2,8 \rightarrow 3 \\ \hline 11,48 \rightarrow 12 \end{array}$$

* *Calculatrice*

La fin de la séance est consacrée à l'étude de multiplications de décimaux dont le produit des entiers associés est un multiple de dix et qui posent des difficultés aux élèves. Au début de la troisième séance, Madame Theano propose de noter quelques cas particuliers. Trois élèves sont envoyés au tableau pour les traiter.

Quelques cas particuliers

$$5,5$$

$$\times 12$$

$$\hline 100$$

$$55$$

$$\hline 560$$

$$\text{donc } 55 \times 12 = 560$$

$$11,2$$

$$\times 0,5$$

$$\hline 5,60$$

$$\text{donc } 11,2 \times 0,5 = 5,6$$

$$240$$

$$\times 1,25$$

$$\hline 1200$$

$$480$$

$$240$$

$$\hline 300,00$$

$$\text{donc } 240 \times 1,25 = 300$$

Parmi les multiplications proposées ensuite, certaines comportent un facteur égal à 0,5 ou 0,25. Ces cas sont étudiés puis, à la fin de la troisième et dernière séance, Madame Theano propose de noter trois résultats.

À retenir

$$0,5 \times 2 = 1$$

$$0,25 \times 4 = 1$$

$$0,125 \times 8 = 1$$

Puis elle termine la séquence par la lecture d'un paragraphe du manuel²⁵⁷ :

Pour le calcul du produit de plusieurs nombres, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance. Il est conseillé de faire des regroupements qui simplifient les calculs.

On retiendra en particulier : $2 \times 0,5 = 1$ $4 \times 0,25 = 1$ $8 \times 0,125 = 1$.

On retiendra aussi que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.

On retiendra enfin que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4.

♦ Les institutionnalisations écrites de Madame Agnesi

Les deux premières séances sont consacrées à des révisions des acquis de l'école primaire sur la multiplication d'un décimal par un entier, à l'utilisation des ordres de grandeur pour estimer un produit, à l'utilisation des opérateurs $\times 10$, $\times 100$ ou $\times 1000$ pour déterminer la position de la virgule d'un produit et à la minoration ou la majoration d'un produit. Une situation de calcul de prix conduit à multiplier deux nombres décimaux, certains élèves utilisent des conversions ou la règle de la virgule qu'ils avaient déjà vue en CM2. A la fin de la deuxième séance, Madame Agnesi propose une institutionnalisation de la technique opératoire.

²⁵⁷ Encadré Méthode pour savoir calculer "rapidement" du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette [p 61]

III. Produit de deux nombres décimaux

On effectue la multiplication sans s'occuper des virgules, puis on compte le nombre total de chiffres des parties décimales (à droite de la virgule). Le résultat comporte autant de chiffre dans sa partie décimale.

Exemple

$$\begin{array}{r}
 266 \\
 \times 35 \\
 \hline
 1330 \\
 798 \\
 \hline
 9310
 \end{array}
 \quad 26,6 \times 3,5 = 93,1$$

Des exercices d'application soulèvent des difficultés lorsque le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est un multiple de dix. Vers la fin de la troisième séance, Madame Agnesi propose de noter quelques remarques.

IV Comment contrôler un résultat (sans calculatrice)

- 1) Penser à chercher un ordre de grandeur
- 2) Certains zéros sont inutiles et peuvent être supprimés

Exemple : $8,25 \times 1,2 = 9,9$

- 3) Attention aux zéros

$$124 \times 10,5 = 1\,302$$

- 4) Exemples

a) Place la virgule dans le nombre en couleur (ici en gras)

$$3,6 \times 281 = 10,116$$

$$25 \times 2,916 = 729$$

$$42 \times 0,15 = 6,3$$

$$125 \times 5,2 = 6,5$$

Ces calculs sont traités par les élèves et corrigés au tableau. La quatrième et dernière séance ne dure que 25 minutes. Madame Agnesi l'utilise pour faire noter la suite de la leçon.

- 5) On donne $386 \times 205 = 79\,130$

Trouver : $3,86 \times 2,05 =$

$$2,05 \times 386 =$$

$$2,05 \times 3\,860 =$$

- 6) Remarque

$$4,2 \times 0,15 = 0,63$$

Le résultat 0,63 est inférieur à 4,2 car 0,15 est inférieur à 1.

V. Comment multiplier par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc

$$12,3 \times 0,1 = 1,23$$

$$14,35 \times 0,001 = 0,01435$$

$$349 \times 0,01 = 3,49$$

VI. Produit de plusieurs facteurs

$2 \times 17 \times 0,5$ est un produit de trois facteurs

$$(2 \times 17) \times 0,5 = 17$$

$$(2 \times 0,5) \times 17 = 1 \times 17 = 17.$$

Dans le calcul d'un produit, l'ordre des facteurs peut changer.

VI. Calculatrice : attention danger

Avec une calculatrice, trouver

$$1,279\ 283 \times 3,942\ 671 =$$

On obtient 5,0439071

Ce résultat n'est pas exact car le dernier chiffre doit être 3

♦ *Les institutionnalisations écrites de Monsieur Bombelli*

Dès le début de la première séance, Monsieur Bombelli demande aux élèves de recopier, d'après le manuel, le titre du nouveau chapitre avec son numéro puis il fait noter le titre du premier paragraphe : Activité préparatoire. L'enseignant effectue, au tableau, cette activité. Les élèves recopient sur leur cahier de cours.

Chapitre 5

Multiplier des décimaux

I. Activité préparatoire

Activité 4 p. 59

$$\begin{array}{r}
 12,75 \\
 \times 6,7 \\
 \hline
 85,425
 \end{array}
 \xrightarrow{\boxed{\times 100}}
 \begin{array}{r}
 1275 \\
 \times 67 \\
 \hline
 8925 \\
 76500 \\
 \hline
 85425
 \end{array}
 \xleftarrow{\boxed{\div 1000}}$$

Oui elle trouve la même chose

Lors de la deuxième séance, après avoir corrigé les exercices à chercher à la maison, Monsieur Bombelli termine l'activité du manuel et ajoute un commentaire que les élèves doivent copier.

Parce que l'on a procédé aux mêmes manipulations dans les deux cas.

Remarque : par ailleurs, on vérifie que le résultat des manipulations est bien le produit des deux décimaux de départ.

En effet, en multipliant le premier terme par 100 et le deuxième par 10, puis en faisant le produit, on obtient le produit des deux nombres initiaux multiplié par 10×100 donc par 1 000.

En divisant le tout par 1 000, on retombe sur le produit des deux nombres initiaux.

Le reste de la deuxième séance est consacré à la résolution d'exercices d'application de la technique opératoire. Monsieur Bombelli demande, à la fin de la séance, de noter les résultats sur le cahier de cours, il insiste sur le résultat de la dernière ligne qui porte sur une multiplication où le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est multiple de dix.

2° Petite synthèse des résultats :

$$7,49 \times 3,25 = 24,3425$$

$$68 \times 4,03 = 274,04$$

$$30,5 \times 70,02 = 2\,135,61$$

La troisième et dernière séance est une suite de correction d'exercices que les élèves devaient chercher à la maison. A la fin de cette séance, Monsieur Bombelli propose de noter le cours dans un second paragraphe. Mais, pressé par le temps, Monsieur Bombelli se contentera de lire la page de cours du manuel ²⁵⁸.

1 MULTIPLIER DEUX DÉCIMAUX ^{W+}

Calcul du produit : $6,25 \times 3,9 = \boxed{?}$

les facteurs du produit

• **Mentalement :**
On calcule un ordre de grandeur : $6 \times 4 = 24$

• **À la main :**
1° On pose la multiplication et on l'effectue sans tenir compte des virgules.

$$\begin{array}{r} 6,25 \\ \times 3,9 \\ \hline 5625 \\ 1875 \\ \hline 24375 \end{array}$$

2° On place la virgule au résultat selon le principe ci-dessous :

$6,25 \times 3,9 = 24,375$

2 décimales + 1 décimale = 3 décimales (2 + 1)

• **À la machine :** $6,25 \times 3,9 =$

Il s'affiche : **24,375**

²⁵⁸ Page "Retenir" du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette. [p. 60]

2 MULTIPLIER PAR 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ...



Multiplier par 0,1 revient à diviser par 10. Exemple : $93 \times 0,1 = 9,3$;
Multiplier par 0,01 revient à diviser par 100. $93 \times 0,01 = 0,93$;
Multiplier par 0,001 revient à diviser par 1 000. $93 \times 0,001 = 0,093$



Il est faux de penser que lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, on obtient toujours un nombre plus grand !

$$9,5 \times 1,4 = 13,3 ;$$

supérieur à 9,5

$$9,5 \times 1 = 9,5 ;$$

égal à 9,5

$$9,5 \times 0,6 = 5,7$$

inférieur à 9,5

Peut-être Monsieur Bombelli a-t-il décidé de faire copier ces résultats, au moins partiellement, aux élèves ultérieurement sans nous inviter à assister à cette copie de la leçon sur le cahier.

♦ Les institutionnalisations écrites de Madame Germain

Les premières notes que Madame Germain demande à ses élèves de prendre apparaissent dans les dernières minutes de la quatrième séance de la séquence qui en compte cinq.

« Petites règles pour faciliter les multiplications »

* On ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10.

Exemple : $12,3 \times 45,6 = 123 \times 4,56$

Madame Germain ponctue le déroulement de la dernière séance par des "petites règles" pour aboutir à la technique usuelle.

* Multiplier par un nombre inférieur à 1, ou dont la partie entière est zéro, donne un résultat inférieur au nombre de départ.

Exemple :

$$235 \times 0,2 = 235 \times 2 \text{ dixièmes} = 235 \times \frac{2}{10} = (235 \times 2) \div 10$$

* Multiplier par 0,2 c'est multiplier par 2 puis diviser par 10.

* Multiplier par 0,1 c'est diviser par 10

$$\begin{aligned} * 2,35 \times 7,2 &= 235 \times 0,01 \times 72 \times 0,1 \\ &= 235 \times 72 \times 0,01 \times 0,1 \\ &= 235 \times 72 \times 0,001 \\ &= 235 \times 72 \div 1\,000 \end{aligned}$$

Multiplier 2,35 par 7,2 c'est multiplier 235 par 72 puis diviser par 1 000

$$\begin{array}{r}
 235 \\
 \times 72 \\
 \hline
 470 \\
 16450 \\
 \hline
 16920
 \end{array}
 \qquad
 16920 : 1000 = 16,920$$

Analysons maintenant ces phases d'institutionnalisation des savoirs. Nous aborderons leur intégration dans le déroulement de la séquence puis le contenu et la forme des leçons notées par les élèves.

Analyse de l'intégration des phases d'institutionnalisation dans le déroulement

Comparons les intégrations des phases d'institutionnalisation dans le scénario des activités de la classe pour chacun des professeurs. Nous en distinguons différents modes, à la fois entre les professeurs et pour un même professeur :

- le mode “ bilan ” dans le cas d'une institutionnalisation pour donner un statut de savoir aux connaissances construites en classe ;
- le mode “ déclaration ” dans le cas d'une institutionnalisation pour énoncer un savoir sans qu'il ait été construit en classe ;
- le mode “ apport ” dans le cas d'une institutionnalisation pour répondre à un problème posé en classe mais qui n'a pas été résolu par les élèves.

Madame Theano, qui organise trois phases d'institutionnalisation dans le déroulement de sa séquence, utilisera deux des trois modes indiqués précédemment. Madame Theano, pour débiter la séquence, propose une activité de confrontation des résultats de multiplication de décimaux obtenus à la calculatrice avec leurs estimations par les ordres de grandeur. De cette activité émerge la technique opératoire qui est admise et institutionnalisée avec le mode “ bilan ”. Cette technique est appliquée pour calculer des produits puis utilisée dans un exercice qui met les élèves en difficulté parce que le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est un multiple de dix²⁵⁹. Alors qu'aucun des élèves de la classe ne comprend cette situation, Madame Theano institutionnalise, avec le mode “ apport ” des cas particuliers de produit qui semblent contredire la règle de la virgule dont un pour lequel le multiplicateur est inférieur à un. Aucun commentaire écrit n'est ajouté mais les élèves sont amenés à discuter du nombre de décimales d'un produit. A la suite d'un exemple de multiplication par 0,25 pour lequel un des élèves affirme que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4, Madame Theano improvise une activité de comparaison de l'effet d'une multiplication par 0,5 avec celui d'une division par 2 puis une activité de comparaison de l'effet d'une multiplication par 0,25 avec celui d'une division

²⁵⁹ Il fallait placer la virgule manquante au facteur 246 dans l'égalité $246 \times 0,25 = 6,15$. Les élèves ont des difficultés parce qu'il y a deux chiffres après la virgule dans les facteurs et deux chiffres après la virgule au produit. Ils souhaitent donc ne pas écrire de virgule au facteur 246.

Exercice n°5 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

par 4. Avec le mode “ bilan ”, trois égalités sont institutionnalisées : $0,5 \times 2 = 1$; $0,25 \times 4 = 1$ et $0,125 \times 8 = 1$ mais rien n'est écrit à propos de la division par 2, par 4 ou par 8.

Madame Agnesi, qui organise aussi trois phases d'institutionnalisation dans le déroulement de sa séquence, utilisera deux des trois modes d'intégration présentés. Une même phase pourra débuter sur un mode puis se terminer sur un autre. D'abord un bilan de ce qui a été vu en classe puis un ajout avec le mode “ déclaration ”. Comme nous le verrons dans l'analyse du contenu des textes copiés dans les cahiers des élèves, Madame Agnesi est le professeur qui, plus que les autres, cherche l'exhaustivité dans la rédaction du cours. Cette recherche semble contredire le “ principe ” de programmation d'un retour à l'enseignement d'une notion, principe selon lequel les professeurs ne chercheraient pas à “ tout dire ” du champ mathématique mais programmeraient d'enseigner à nouveau certaines notions seulement abordées durant la séquence. En fait, comme nous l'avons remarqué, Madame Agnesi ne traite pas l'ensemble du champ mathématique de la même façon, elle hiérarchise les contenus et insiste davantage sur ceux qui lui semblent essentiels. Le texte de la leçon apparaît alors comme une compensation de la hiérarchisation opérée durant la séquence : tout se passe comme si Madame Agnesi définissait des hiérarchies dans son enseignement mais qu'elle élaborait une leçon complète pour minimiser leur importance. La première phase d'institutionnalisation concerne la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux, elle est effectuée avec le mode “ bilan ” après deux séances sur la multiplication des décimaux. L'exercice du manuel qui avait mis les élèves de Madame Theano en difficulté a produit le même effet sur les élèves de Madame Agnesi qui propose d'envisager différents moyens de contrôler la valeur d'un produit. Ils correspondent aux connaissances construites en classe et sont donc des institutionnalisations effectuées avec le mode “ bilan ” auquel un exemple analogue à l'exercice du manuel est ajouté. Durant la dernière séance, Madame Agnesi, avec le mode “ bilan ”, institutionnalise l'effet d'une multiplication par un nombre inférieur à un puis elle ajoute différents résultats avec le mode “ déclaration ” : multiplication par une puissance négative de dix ($0,0...1$), associativité et commutativité de la multiplication, détermination du dernier chiffre d'un produit.

Monsieur Bombelli ne procède pas comme les deux professeurs dont nous venons d'analyser les phases d'institutionnalisation. Cet enseignant fonctionne exclusivement sur un mode “ déclaration ” : il écrit sur le tableau et fait copier aux élèves ce qu'il faut retenir de ce qu'il présente. Ainsi, dès les premières minutes de la première séance, les élèves notent le titre du chapitre et recopient ce que le professeur inscrit au tableau : une partie de l'énoncé d'une activité du manuel avec la réponse aux questions posées dans cette activité. La réponse, qui concerne la technique opératoire de la multiplication des décimaux, est élaborée et rédigée par le professeur. Suivent quelques exercices d'application dont les résultats sont inscrits au tableau par le professeur et recopiés par les élèves. Durant le reste de la séquence, Monsieur Bombelli corrige en classe, éventuellement avec l'aide d'élèves interrogés, une série d'exercices donnés à chercher à la maison. La séquence se

termine par une lecture de la page “Retenir...” du manuel. Nous estimons que cette phase d’institutionnalisation est du mode “déclaratif” dans la mesure où les élèves ne savent pas quelles connaissances prendront le statut de savoir au cours de cette lecture. En fait, il n’y a que la technique opératoire qui, à la fois, a été traitée en classe et figure dans la page du manuel. Les autres résultats énoncés dans cette page n’ont pas été étudiés en classe : estimation d’un produit en utilisant les ordres de grandeur des facteurs, calcul à la machine, multiplication par une puissance négative de dix ($0,0 \dots 1$), multiplication par un nombre inférieur à un.

Madame Germain est le seul des quatre professeurs à ne recourir qu’au mode “bilan” pour intégrer les deux phases d’institutionnalisation de la séquence dans le déroulement. Nous distinguons deux phases qui pourraient être assimilées à une seule car la première s’est déroulée à la fin de la quatrième séance et la seconde a débuté dès le début de la cinquième et dernière séance. L’objectif déclaré de l’institutionnalisation est de faire le point sur ce qui a été vu durant la séquence à propos de la multiplication. Les élèves sont sollicités pour formuler oralement les connaissances construites en classe sous la forme de “petites règles pour faciliter les multiplications”. Le texte est rédigé soit par les élèves interrogés aidés de leur professeur soit par le professeur avec la participation d’élèves volontaires. Durant la dernière séance, les “petites règles” se succèdent jusqu’à la technique opératoire de la multiplication des décimaux qui conclut à la fois la séance et la séquence.

Finalement, Madame Germain et Madame Theano ont en commun d’institutionnaliser des savoirs seulement au moment où les élèves sont préparés à reconnaître ces savoirs, soit parce qu’ils (au moins certains d’entre eux) ont déjà construit les connaissances visées (au moins en partie), soit parce qu’ils viennent répondre à une question qu’ils se sont posée à propos de ces savoirs. Madame Agnesi, qui a le souci de “tout” traiter explicitement, institutionnalisera avec le mode “bilan” les connaissances qui sont essentielles dans sa stratégie d’enseignement et se contentera du mode “déclaration” pour les propriétés moins fondamentales. Seul, Monsieur Bombelli n’institutionnalise les savoirs qu’avec le mode “déclaration”. Ce mode correspond à sa stratégie d’enseignement dans laquelle il utilise l’activité préparatoire pour établir au plus vite la technique opératoire puis les exercices du manuel pour entraîner les élèves et corriger leurs erreurs.

Recherchant une cohérence entre les scénarios et l’intégration des phases d’institutionnalisation des savoirs dans la séquence, nous trouvons une relation forte entre le travail de l’élève et le mode d’institutionnalisation. Nous avons placé les projets des professeurs sur un axe dont les pôles opposés étaient :

- la classe est envisagée comme le lieu d’exposition du savoir par le professeur et un lieu d’application des techniques indiquées dans le cours ;
- la classe est envisagée comme un lieu de travail et de recherche mathématique, le savoir y est construit autant que possible par les élèves, les exercices ne sont pas limités à des applications techniques mais demandent aussi de combiner des connaissances disponibles.

Nous avons situé le projet de Monsieur Bombelli au pôle “ lieu d'exposition du savoir ” et Madame Germain au pôle “ lieu de travail et de recherche ” puis ceux de Madame Theano et de Madame Agnesi à des positions intermédiaires, le projet de Madame Theano étant le plus proche du pôle “ lieu de travail et recherche ”. Ainsi, la position du projet sur l'axe est cohérente avec l'intégration des phases d'institutionnalisation dans la séquence :

- dans une classe “ lieu de travail et de recherche ”, les seules connaissances institutionnalisées sont celles qui ont été construite par les élèves, le mode d'institutionnalisation est le mode “ bilan ” ;
- dans une classe “ lieu d'exposition du savoir ” les savoirs sont déclarés par le professeur avant même d'avoir été travaillées par les élèves ;
- dans une classe qui occupe une position intermédiaire, on observe plusieurs modes d'institutionnalisation dont le mode “ apport ” où le savoir énoncé répond à un problème posé en classe mais qui n'a pas été résolu par les élèves.

Analyse du contenu et de la forme du texte de la leçon

Après avoir comparé les modes d'intégration des différentes phases d'institutionnalisation dans les séquences des professeurs, analysons maintenant le contenu et la forme des textes inscrits au tableau par le professeur et copiés par les élèves sur leur cahier de cours. En ce qui concerne le contenu nous distinguerons les propriétés abordées, la validation de ces propriétés ainsi que leur organisation. En ce qui concerne la forme nous évaluerons le degré d'explicitation des propriétés abordées et la structuration du cours.

♦ *Le contenu du cours rédigé à l'attention des élèves*

Par rapport au champ mathématique de leurs séquences, voyons quelles propriétés figurent dans les cours rédigés à l'attention des élèves, si elles sont citées ou illustrées, si elles sont établies.

Rappelons aussi les champs des séquences par le tableau que nous avons dressé précédemment : les “ coches ” désignent les contenus qui figurent dans le scénario de la séquence, les “ croix ” désignent ceux qui apparaissent dans le cours copié dans les cahiers des élèves. Pour Monsieur Bombelli qui a seulement fait lire la leçon du livre, nous utilisons le texte du manuel comme si les élèves l'avaient recopié sur leur cahier.

Tableau 10. Savoir mathématique étudié et/ou institutionnalisé dans les quatre séquences

Contenus mathématiques	Madame Theano		Madame Agnesi		Monsieur Bombelli		Madame Germain	
Multiplication des décimaux								
Technique opératoire (T.O.)	✓	x	✓	x	✓	x	✓	x
Justification de la T.O.			✓		✓	x	✓	x
Estimation du produit	✓	x	✓	x		x	✓	
Propriétés algébriques de la mult.			✓	x	✓		✓	x
Effet de la mult. sur l'ordre			✓				✓	
Mult. par un facteur inférieur à 1	✓	x	✓	x	✓	x	✓	x
Écritures décimales								
Signification de l'écriture décimale	✓		✓		✓		✓	x
Changement d'unités du système décimal			✓					
Multiplication par 0,1, 0,01, 0,001...			✓	x		x	✓	x
Situations multiplicatives								
Isomorphisme de grandeurs	✓		✓		✓		✓	

Ce tableau montre une certaine diversité des choix des différents professeurs. Tous ont traité et institutionnalisé par écrit la technique opératoire et le cas de la multiplication par un nombre inférieur à un. Tous ont abordé une situation d'isomorphisme de grandeur mais aucun d'entre eux n'a jugé utile d'en faire figurer un exemple dans le cours, tous ont revu le sens de l'écriture décimale mais il n'y a que Madame Germain qui le rappelle et l'utilise dans le cours. L'estimation d'un produit et la multiplication par une puissance négative de dix ($0,0...1$) sont intégrées dans le cours chez trois des quatre professeurs. Signalons le cas de Monsieur Bombelli qui est le seul à institutionnaliser des contenus qui n'ont pas été abordés durant la séquence : estimation d'un produit et multiplication par une puissance négative de dix.

La démonstration des propriétés ne figure pas dans les cahiers des élèves. Seule, la technique opératoire est justifiée par écrit par Monsieur Bombelli et par Madame Germain.

Dans aucun des cours des quatre professeurs, les connaissances institutionnalisées ne sont organisées de manière à ce que les élèves puissent retrouver leur construction. Madame Theano n'avait pas jugé utile de justifier la technique opératoire, il semble donc normal qu'elle n'ait pas eu le souci d'une telle organisation des connaissances. Madame Agnesi avait justifié la technique opératoire par des changements d'unités du système décimal. Rappelons qu'elle avait suivi la demande des élèves alors qu'elle-même n'avait pas souhaité utiliser cette méthode à cause de son manque de généralité. Nous pensons que cela explique pourquoi cette méthode ne figure pas dans le cours des élèves. Monsieur Bombelli, pour justifier la technique opératoire, utilise l'effet d'opérateurs $\times 10$, $\times 100...$ appliqués aux facteurs d'un produit. Ces propriétés auraient pu figurer dans le cours avant la technique opératoire. Rappelons que Monsieur Bombelli suit le manuel et qu'aucune activité à ce sujet n'y figure. Bien qu'il n'ait pas proposé d'activité sur les opérateurs à ses élèves, Monsieur Bombelli a tout de même

souhaité justifier *a posteriori* la technique opératoire en insistant sur l'utilisation des propriétés des opérateurs, il fait copier aux élèves :

En effet, en multipliant le premier terme par 100 et le deuxième par 10, puis en faisant le produit, on obtient le produit des deux nombres initiaux multiplié par 10×100 donc par 1 000.

Madame Germain a choisi d'établir la technique opératoire en décomposant chaque facteur décimal en un produit d'un entier par une puissance négative de dix. Mais ni les produits de ces puissances de dix, ni les propriétés algébriques de la multiplication ne figurent dans le cours avant la technique opératoire. Il semble que Madame Germain a choisi de faire figurer la démarche complète sur un exemple sans traiter séparément les propriétés qu'elle utilise :

$$\begin{aligned} * \quad 2,35 \times 7,2 &= 235 \times 0,01 \times 72 \times 0,1 \\ &= 235 \times 72 \times 0,01 \times 0,1 \\ &= 235 \times 72 \times 0,001 \\ &= 235 \times 72 \div 1\,000 \end{aligned}$$

Multiplier 2,35 par 7,2 c'est multiplier 235 par 72 puis diviser par 1 000

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times 72 \\ \hline 470 \\ 16450 \\ \hline 16920 \end{array}$$

$$16920 \div 1000 = 16,920$$

On remarquera finalement que Madame Agnesi et Madame Germain font noter un cours plus complet que leurs deux autres collègues. Madame Agnesi, plus que Madame Germain, propose une rédaction où les différentes propriétés étudiées apparaissent explicitement, elle a, plus que ses collègues, le souci de laisser à ses élèves un cours exhaustif pour apprendre la leçon.

En conclusion, nous constatons une cohérence importante entre le contenu de la leçon et le scénario du professeur : Monsieur Bombelli et Madame Germain ont choisi d'établir la technique opératoire, ils inscrivent cette construction dans la leçon ; Madame Theano voulait faire comparer les résultats obtenus avec la calculatrice et les ordres de grandeur, la technique opératoire et le contrôle avec ces estimations figurent en parallèle dans la leçon, Madame Agnesi souhaitait insister sur la technique opératoire et quelques propriétés puis aborder rapidement le reste du contenu du champ mathématique, elle rédige une leçon très complète.

♦ *La forme du cours rédigé pour les élèves : de l'action ou du générique*

La forme privilégiée par l'ensemble des professeurs est l'illustration des règles générales par des exemples génériques (c'est-à-dire qui ont valeur de généralité). Néanmoins, quelques propriétés sont décontextualisées, au moins partiellement. Madame Agnesi est le seul professeur à rédiger une "règle" pour institutionnaliser

la technique opératoire et les propriétés algébriques de la multiplication. Madame Germain est le seul professeur à décontextualiser le cas de la multiplication par un nombre inférieur à un. Elle institutionnalise aussi une règle sur l'effet des opérateurs $\times 10$, $\div 10$... appliqués aux facteurs d'un produit, mais, comme Monsieur Bombelli, la règle n'est pas généralisée à tous les opérateurs.

Remarquons que toutes ces "règles" sont illustrées par un exemple et qu'elles sont formulées comme des règles d'action.

Madame Agnesi :

On effectue la multiplication sans s'occuper des virgules, puis on compte le nombre total de chiffres des parties décimales (à droite de la virgule). Le résultat comporte autant de chiffre dans sa partie décimale.

Dans le calcul d'un produit, l'ordre des facteurs peut changer.

Monsieur Bombelli :

En effet, en multipliant le premier terme par 100 et le deuxième par 10, puis en faisant le produit, on obtient le produit des deux nombres initiaux multiplié par 10×100 donc par 1 000. En divisant le tout par 1 000, on retombe sur le produit des deux nombres initiaux.

Madame Germain :

On ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10.

Multiplier par un nombre inférieur à 1, ou dont la partie entière est zéro, donne un résultat inférieur au nombre de départ.

Le reste du contenu du cours est rédigé sous la forme d'exemples dont la fonction est éventuellement indiquée par un titre. Citons par exemple Madame Theano :

* Ordre de grandeur

$$\begin{array}{rcl} 4, 1 & \rightarrow & 4 \\ \times 2, 8 & \rightarrow & 3 \\ \hline 11, 48 & \rightarrow & 12 \end{array}$$

Il reste que la richesse des exemples cités par les professeurs dans leur cours n'est pas toujours explicite. Nous avons vu, au chapitre 4, que la technique opératoire de la multiplication pose des difficultés variées aux élèves quand les deux facteurs sont décimaux sans trouver d'indication de corrélation entre le pourcentage de réussite au calcul du produit de deux décimaux et les différents cas particuliers où des erreurs d'élèves sont repérables : les deux facteurs ont le même nombre de décimales, le multiplicateur est inférieur à un, le multiplicateur contient un zéro intercalaire, le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est un multiple de dix. Les professeurs expérimentés qui connaissent ces erreurs peuvent chercher

à mettre leurs élèves en garde en traitant ces cas particuliers. C'est seulement le cas de Madame Agnesi, nous avons trouvé trois exemples de mise en garde, ils ne sont pas totalement explicites :

2) Certains zéros sont inutiles et peuvent être supprimés

Exemple : $8,25 \times 1,2 = 9,9$

3) Attention aux zéros

$124 \times 10,5 = 1\ 302$

6) Remarque

$4,2 \times 0,15 = 0,63$

Le résultat 0,63 est inférieur à 4,2 car 0,15 est inférieur à 1

Un examen attentif des exemples choisis par les quatre professeurs montre que leur diversité est sans doute intentionnelle. Un seul cas particulier n'est traité ni dans le cours de Madame Theano ni dans celui de Madame Germain, il concerne davantage la technique opératoire de la multiplication des entiers, c'est le cas où le multiplicateur contient un zéro intercalaire. Sinon tous les cas particuliers ont été illustrés par tous les professeurs et même plusieurs fois pour certains d'entre eux. Notons "**Déci=**" le cas où les deux facteurs ont le même nombre de décimales, "**< 1**" le cas où le multiplicateur est inférieur à un, "**0 inter**" le cas où le multiplicateur contient un zéro intercalaire et "**0 inutile**" le cas où le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est un multiple de dix. Voyons alors la répartition des exemples dans les cours rédigés à l'attention des élèves par les quatre professeurs²⁶⁰ :

Tableau 11. Les cas particuliers de multiplication qui figurent dans le cours

	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
Déci=	3	1	1	1
< 1	1	2	1	1
0 inter	0	1	2	0
0 inutile	3	5	1	1

La question qui se pose après l'examen des exemples traités par les professeurs est celle du manque d'explicitation de ces cas particuliers, sauf pour Madame Agnesi qui, nous l'avons vu, précise l'objectif de l'exemple en lui donnant un titre. Dans les cours de Madame Theano, de Monsieur Bombelli ou de Madame Germain, la forme utilisée ne fait pas apparaître les difficultés spécifiques. Il nous semble que ces professeurs ont sans doute préféré insister sur la technique opératoire de façon la plus générale possible dans le cours rédigé et se laisser la possibilité d'intervenir oralement, en classe, pour régler les problèmes relatifs à ces cas particuliers que les élèves auront rencontré s'ils ont travaillé leur cours. Le déroulement des

²⁶⁰ Monsieur Bombelli bâtit son cours complètement à partir du manuel. L'exposé de la technique opératoire et sa justification théoriques sont repris d'une activité préparatoire ainsi que les trois exemples qui illustrent la technique. Nous ne trancherons pas pour savoir si l'intention doit être attribuée exclusivement aux auteurs du manuel ou si elle était partagée par le professeur

séquences, par l'examen des échanges en classe, nous permettra de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse suivant les professeurs.

En ce qui concerne la structuration du cours, nous pouvons remarquer que, mise à part Madame Germain, tous les professeurs numérotent les paragraphes du cours mais qu'aucun d'entre eux n'y parvient complètement. Madame Theano numérote "I" le premier paragraphe mais il n'y aura jamais de "II" ni de "III". Madame Agnesi dans le 4) du "IV" numérote "a)" une série d'exemple mais il n'y aura jamais de "b)", on remarque aussi deux paragraphes numérotés VI. Monsieur Bombelli numérote "I" l'activité préparatoire, "2°" la petite synthèse des résultats mais il n'y a jamais eu de "1°" et il n'y aura jamais de "II" ni de "III". A moins que ces paragraphes soient constitués par ceux qui ont été lus dans le manuel et que les élèves auraient recopiés en dehors de notre présence. Madame Germain est le seul professeur à ne pas numéroté les paragraphes, elle indique simplement leur commencement par un astérisque. Nous pensons que, bien qu'ayant préparé leur cours, les professeurs en élaborent la rédaction finale en classe ou adaptent leur préparation en fonction des interactions avec les élèves. Cette part d'improvisation explique sans doute les erreurs de structuration des traces écrites.

En conclusion, nous retiendrons l'homogénéité de la forme adoptée par les professeurs pour rédiger leur leçon. Les propriétés sont toujours illustrées par des exemples mais ne sont pas toujours énoncées. Lorsqu'elles le sont, elles apparaissent sous la forme d'une règle d'action.

Ce constat interroge la recherche en didactique des mathématiques : nous constatons ici l'utilisation de deux types de formulation des énoncés par tous les professeurs (règle d'action ou exemple générique). Ces types de formulation correspondent-ils mieux aux élèves de cet âge ? comment s'intègrent-ils dans un processus d'apprentissage des formulations usuelles ? Ces questions dépassent la seule analyse en terme de transposition didactique.

Conclusions sur les choix des professeurs au niveau local

L'analyse des scénarios par les tâches prescrites aux élèves montre que les choix des professeurs présentent, à un niveau local, une plus grande diversité que celle que nous avons constatée par l'analyse globale des scénarios.

Les points communs sont peu nombreux, ils proviennent de contraintes institutionnelles ou d'une adaptation aux élèves de sixième. Ainsi, les propriétés de la multiplication sont admises, elles ne sont pas toujours énoncées mais elles sont utilisées pour mener un calcul mental ou raisonné. Ces choix correspondent à la demande des programmes. La forme de la leçon notée sur le cahier des élèves est identique pour les quatre professeurs : les exemples sont nombreux et servent souvent de règle par généralisation (ils sont génériques), les propriétés énoncées le sont toujours sous la forme d'une règle d'action. Cette façon de rédiger le texte du savoir semble provenir d'une volonté d'adaptation à la capacité de lecture des élèves de sixième.

L'analyse des tâches prescrites par les professeurs montre que ces tâches sont destinées à favoriser les apprentissages des notions qui figurent dans le champ mathématique du scénario prévu, et à donner à ces notions un sens qui est lié à la stratégie d'enseignement élaborée par les professeurs. Si de telles tâches figurent dans le manuel, alors les professeurs les y choisissent, sinon ils les élaborent eux-mêmes ou ils les tirent d'autres manuels.

Ainsi, Madame Theano souhaitait que l'utilisation des ordres de grandeur soit un moyen pour ses élèves de vérifier la position de la virgule dans le produit de deux décimaux. Elle a élaboré plusieurs exercices qui mettent en parallèle la technique opératoire usuelle et l'utilisation des ordres de grandeur.

Madame Agnesi voulait justifier la nécessité d'apprendre à multiplier deux décimaux par la résolution de problèmes issus d'une situation multiplicative. Elle a élaboré une série d'exercice de calcul de prix de marchandises où les valeurs à multiplier sont d'abord entières puis décimales.

Monsieur Bombelli a utilisé, comme à son habitude, l'activité préparatoire du manuel qui permet d'aboutir au plus vite aux connaissances visées par son enseignement.

Madame Germain préférait établir la technique opératoire à partir de connaissances acquises sur la multiplication. Elle a choisi des exercices pour faire émerger ces connaissances et pour lesquels les élèves étaient amenés à argumenter leurs actions.

Aucun des professeurs que nous avons observés n'a repris, même partiellement, les propositions d'enseignement issues des travaux en didactique des mathématiques. Néanmoins, le nombre d'exercices qui ont été traités en classe montre une volonté, de la part des professeurs, d'enseigner à partir de l'activité de leurs élèves. Cette affirmation ne sera validée que si, toutefois, ces exercices ont bien été résolus par les élèves eux-mêmes. L'étude des déroulements des scénarios permettra de vérifier que cette condition est bien remplie sauf pour Monsieur Bombelli qui corrige les exercices en classe alors que les élèves devaient les résoudre à la maison. Les trois autres professeurs enseignent donc à partir des activités de leurs élèves, ces activités étant généralement constituées par la résolution de problèmes dont les énoncés sont tirés du manuel ou élaborés par les professeurs eux-mêmes. Nous étudierons au chapitre 7 les échanges entre le professeur et les élèves car nous supposons qu'ils ont aussi leur importance dans l'apprentissage des élèves.

Des hypothèses dont les didacticiens tiennent compte pour élaborer une ingénierie didactique ne sont pas respectées : les connaissances à acquérir ne sont pas contextualisées puis décontextualisées, elles n'interviennent pas d'abord en tant qu'outil pour résoudre un problème. Il n'y a pas de recherche de situation fondamentale.

L'intégration des phases d'institutionnalisation dans le déroulement de la séquence est cohérente avec l'enseignement des professeurs. Madame Theano et Madame Germain n'institutionnalisent que les connaissances construites en classe ou qui répondent à un problème que les élèves ont tenté de résoudre. Madame

Agnesi fonctionne de la même façon que ses collègues pour les connaissances qui sont importantes dans sa stratégie d'enseignement, en revanche elle se contente de présenter celles qu'elle juge mineures. Ces trois professeurs enseignent à partir des activités des élèves. Monsieur Bombelli est le seul, de façon magistrale, à toujours institutionnaliser les savoirs en même temps qu'il les présente à ses élèves. Il est aussi le seul à ne pas laisser les élèves chercher en classe.

Le cours rédigé à l'attention des élèves est une suite de propriétés qui n'est pas organisée pour permettre de les retrouver mathématiquement. Seuls Monsieur Bombelli et Madame Germain justifient la technique opératoire usuelle. Dans les cours, la forme dominante est la règle d'action ou l'exemple générique, ce dernier laisse assez implicite ce qu'il faut retenir. Madame Agnesi, néanmoins, prend soin d'étiqueter les exemples par un titre qui indique la propriété à mémoriser. Il semble finalement que les professeurs observés considèrent davantage le cours comme un moyen pour que l'élève se remémore, en le lisant, les activités qui ont été les siennes en classe.

Conclusions sur les scénarios élaborés par les professeurs

Les professeurs que nous avons observés en 1996-1997 ont, pour la première fois de leur carrière, enseigné la multiplication des nombres décimaux en sixième. Cet enseignement, jusqu'alors dispensé à l'école primaire, est apparu dans le programme de la classe de sixième publié en 1995 et applicable à partir de l'année scolaire 1996-1997.

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons identifié ce que recouvre la multiplication des nombres décimaux du point de vue mathématique et du point de vue de l'enseignement dans le système français des trois dernières décennies. Nous avons analysé les publications sur lesquelles pouvaient éventuellement s'appuyer les professeurs pour préparer leur séquence d'enseignement : programme et document d'accompagnement, manuels, brochures pédagogiques et résultats de recherche en didactique des mathématiques.

Dans le chapitre 4, nous avons tenté d'esquisser le projet d'enseignement qu'un professeur fictif pouvait élaborer. Une analyse préalable, fondée sur une étude des connaissances des élèves et une approche écologique de la notion, nous a permis d'identifier les objectifs et les contraintes de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Afin d'appréhender les connaissances des élèves sur la multiplication et sur les nombres décimaux, nous avons étudié les résultats publiés des évaluations des compétences des élèves sur ces deux notions.

Ce cinquième chapitre de notre recherche ne concerne plus le projet d'un professeur fictif mais l'enseignement de véritables professeurs de collège en charge d'une classe de sixième. Nous avons étudié, notamment par des comparaisons, le scénario qu'ils ont élaboré pour enseigner la multiplication des nombres décimaux. Rappelons que pour interpréter les résultats des comparaisons par des choix personnels des professeurs, nous avons tenté de neutraliser les variables qui ne sont pas liées aux enseignants. Ainsi, les professeurs étaient tous expérimentés, les

élèves de niveau comparable appartenaient à des classes de même effectif bénéficiant de l'horaire officiel, enfin tous les professeurs utilisaient le même manuel. Nous avons montré que les scénarios élaborés sont différents mais qu'ils possèdent plusieurs caractéristiques communes

Pour analyser les scénarios des professeurs, nous avons distingué trois niveaux d'étude :

- *le champ mathématique de la séquence* qui est constitué de l'ensemble des notions que le professeur prévoit d'enseigner durant la séquence ;

- *la stratégie d'enseignement* qui rend compte de l'organisation des notions dans le scénario et de la chronologie de la séquence ;

- *l'ensemble des tâches prescrites aux élèves* : étude de situations, construction et utilisation des connaissances, institutionnalisation des savoirs.

A chacun de ces trois niveaux, les enseignants effectuent des choix. Beaucoup d'entre eux sont communs aux professeurs observés, nous avons montré qu'ils correspondent à des connaissances communes aux enseignants, des connaissances qui concernent les élèves et qui conduisent à des anticipations mais aussi des connaissances qui concernent spécifiquement la pratique du métier. Certains choix diffèrent d'un professeur à l'autre, ils concernent généralement l'organisation de la classe : plutôt comme un lieu d'exposition des savoirs ou plutôt comme un lieu de travail des élèves. Détaillons les résultats suivant les trois niveaux d'analyse que nous avons distingués.

Le *champ mathématique* des séquences observées est globalement commun aux professeurs. Il comprend : le sens de l'écriture décimale, la technique opératoire usuelle et une justification de cette technique, l'estimation d'un produit, quelques propriétés de la multiplication, un problème issu d'une situation multiplicative. Ce choix est conforme aux indications du programme à la condition que les fractions décimales et différentes situations multiplicatives soient étudiés ultérieurement durant l'année scolaire. Ce champ correspond à l'esquisse que nous avons dessinée au troisième chapitre pour un professeur qui respecterait le programme et qui ne s'appuierait pas sur les propositions issues de la recherche en didactique des mathématiques.

Ainsi, les professeurs ont choisi d'isoler cette séquence où la multiplication est abordée seulement de façon décontextualisée ; pour la résolution de problèmes, ils attendent d'étudier les situations multiplicatives au programme de sixième : calcul d'aire de rectangle, agrandissement de figure, situation de proportionnalité, pourcentages... L'analyse du champ mathématique des séquences observées montre que les enseignants ont limité au maximum les contenus de la séquence : technique opératoire, calcul approché, mental ou raisonné.

En centrant l'analyse sur le professeur, on peut interpréter ces choix communs. Nous avons montré que la contrainte des programmes est respectée, tant pour les choix des contenus que pour le rythme. Ce respect contribue à la légitimité du professeur qui, rappelons-le, exerce une activité sociale. Le champ mathématique forme une "partie auto-close" du champ conceptuel des structures multiplicatives : les professeurs font étudier les points fondamentaux ainsi que tout ce qui est indispensable à leur enseignement, à l'exception des preuves des

propriétés étudiées sur lesquelles les élèves ne posent généralement pas de question. Du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant, la clôture du champ mathématique de la séquence évite au professeur d'être débordé par les questions de ses élèves. Avec les termes de Janine Rogalski, le champ mathématique de la séquence rend étanche "l'enveloppe des trajectoires acceptables du déroulement de la classe".

La *stratégie d'enseignement* constitue un itinéraire (mathématique et/ou cognitif) pour que les élèves acquièrent les nouvelles connaissances de la séquence. Bien que les classes des professeurs soient de niveau comparable et que le manuel utilisé soit le même, les stratégies élaborées par les enseignants possèdent à la fois des différences importantes et de nombreuses caractéristiques communes.

Du point de vue des apprentissages, l'enseignement est décontextualisé, les connaissances ne sont pas introduites comme des outils et l'étude de certains aspects de la notion est reportée à des séquences ultérieures. Néanmoins deux professeurs ont élaboré une stratégie où la construction des connaissances visées par l'enseignement est à la charge des élèves, les deux autres ont seulement prévu de les exposer. En outre, plutôt que de traiter en une seule séquence la multiplication des décimaux qui est une notion assez riche, les professeurs ont programmé des occasions de la revoir durant l'année, à l'occasion de l'étude de situations multiplicatives au programme. Il semble que les enseignants estiment que l'enseignement d'une telle notion, sous-jacente à différentes situations, nécessite d'enseigner spécifiquement la notion abstraite et d'aborder chacune de ces situations dans leur particularité.

Du point de vue de l'exercice du métier, la stratégie semble répondre à certaines exigences professionnelles qui tiennent parfois à l'apprentissage des élèves. La stratégie permet de marquer des succès d'étapes dans la progression de l'enseignement, des succès qui garantissent le bon fonctionnement de la classe et la reconnaissance du professeur, des succès qui permettent à l'enseignant "d'avancer" dans le programme de l'année. La durée de ces étapes est relativement limitée, elle semble résoudre un paradoxe lié à l'activité des élèves qui accepteraient de chercher à répondre aux questions posées par le professeur pendant un certain temps mais qui attendraient ses explications si la durée de la recherche leur semble trop longue. Nous avons constaté, en outre, que la stratégie d'enseignement est une trame qui permet au professeur, en classe, instantanément, de prendre des décisions relatives à l'animation du scénario prévu en fonction des réactions des élèves.

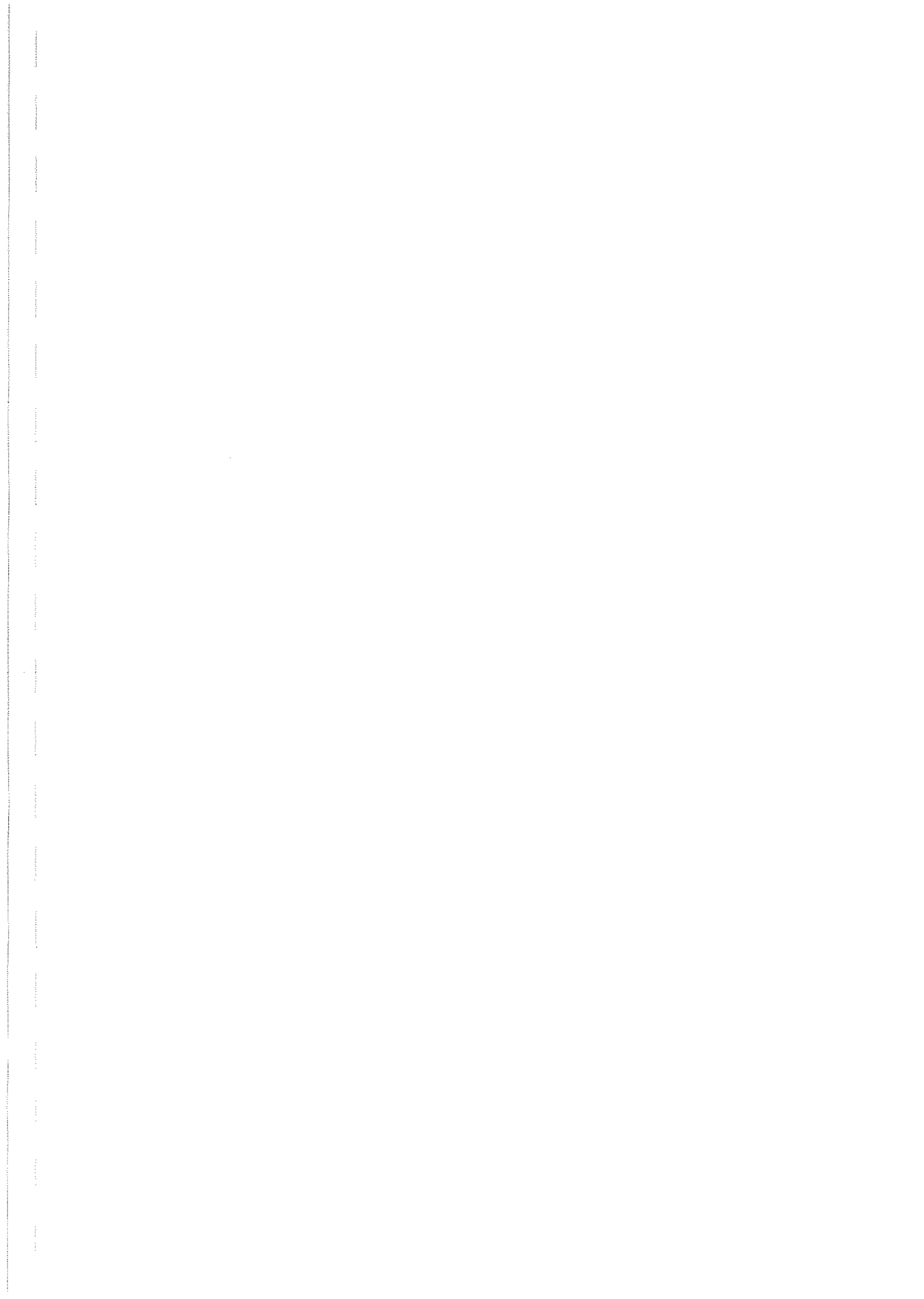
Les tâches proposées aux élèves par un professeur sont liées à la stratégie d'enseignement. Les enseignants produisent eux-mêmes des énoncés quand ils n'en trouvent pas, dans le manuel, qui correspondent à la stratégie qu'ils ont élaborée. A ce niveau plus local de l'étude des scénarios, nous constatons que les choix des professeurs présentent une plus grande diversité que celle que nous avons constatée par l'analyse du champ mathématique ou de la stratégie d'enseignement.

Une place très importante est consacrée à la résolution d'exercices, notamment à ceux qui demandent un calcul raisonné ou qui posent des questions plus théoriques sur la multiplication des décimaux. Il apparaît donc que les professeurs programment un enseignement qui repose sur l'activité de leurs élèves, si toutefois la résolution des problèmes posés est effectivement à leur charge. Compte tenu de la stratégie des professeurs, les exercices posés semblent se distinguer par leur fonction : servent-ils à la construction des connaissances ou à leur application ? de façon seulement technique ? L'examen des activités des élèves que nous conduirons dans le chapitre suivant permettra de montrer des différences importantes entre les professeurs à ce sujet.

L'institutionnalisation des connaissances s'intègre de façon très hétérogène dans le déroulement de la séquence. Deux professeurs se limitent à celles qui ont été construites en classe par les élèves ou qui répondent à un problème qu'ils ont tenté de résoudre. A l'opposé, un professeur institutionnalise toujours, de façon magistrale, les savoirs en même temps qu'il les présente à la classe. De façon intermédiaire, un professeur institutionnalise les connaissances construites par les élèves lorsque celles-ci sont importantes dans sa stratégie d'enseignement, mais il se contente de présenter celles qui sont mineures. La forme de la leçon notée sur le cahier des élèves est identique pour les quatre professeurs : les exemples génériques sont nombreux et servent souvent de règle par généralisation, les propriétés énoncées le sont toujours sous la forme d'une règle d'action. Cette façon de rédiger le texte du savoir nous semble provenir d'une volonté d'adaptation à la capacité de lecture des élèves de sixième. Il semble aussi que les professeurs observés considèrent la leçon comme un moyen pour l'élève de revivre les activités qui ont été les siennes en classe. Nous manquons d'outils théoriques pour mener plus avant l'analyse.

Finalement, l'étude des scénarios élaborés par les professeurs montre une très grande homogénéité des choix concernant le savoir, son organisation et son enseignement. Les professeurs semblent répondre à des contraintes d'origines diverses. Certaines semblent liées à l'apprentissage des élèves mais les plus nombreuses concernent l'institution scolaire (les programmes et les horaires), la dimension sociale de l'exercice du métier d'enseignement (la hiérarchie, les collègues, les élèves et leurs parents) et la gestion harmonieuse de la classe. Cependant, des choix fondamentalement différents semblent opposer les professeurs suivant que la classe est considérée comme un lieu de présentation des savoirs, ou qu'elle constitue un lieu de travail mathématique des élèves. Ils concernent la stratégie d'enseignement, les exercices proposés ainsi que l'institutionnalisation des savoirs. Nous avons constaté une grande cohérence de ces choix.

Nous allons maintenant analyser l'animation du scénario en considérant les activités effectives des élèves. Cette analyse devrait apporter un élément discriminant des professeurs suivant leur conception de la classe. Nous étudierons enfin, dans le dernier chapitre, les adaptations du professeur en fonction des réactions des élèves de la classe.



CHAPITRE 6

LES ACTIVITÉS DES ÉLÈVES, COHÉRENCE AVEC LE SCÉNARIO

Sommaire du chapitre 6

1. Quelques précisions méthodologiques

Des questions sur les pratiques en classe, analysées par les activités des élèves

Méthodes d'analyse des pratiques enseignantes par les activités des élèves

Quelles activités effectives des élèves ? Définition et répartition

2. Analyse des activités effectives significatives

Les activités significatives des séquences du manuel et des professeurs

Les professeurs suivent-ils le manuel pour choisir les activités significatives ?

Comparaison des séquences des professeurs par les activités significatives

Conclusion : les activités significatives sont cohérentes avec le scénario prévu

3. Analyse des activités regroupées par catégorie

Effectifs et répartition des activités suivant leur catégorie

Le calcul écrit, le calcul mental ou réfléchi, répartition des activités

Application d'une technique ou activités de recherche

Conclusion : les catégories d'activités différencient les déroulements

4. Analyse chronologique des activités effectives

Un complément méthodologique : comment rendre compte de la chronologie

Résultats et analyse de la chronologie des séquences

Les activités effectives des élèves différencient les pratiques

Des résultats sur l'utilisation du manuel par les professeurs

Diversité des enseignements, cohérence avec le scénario prévu

L'étude menée au chapitre précédent montre, au niveau global, une très grande homogénéité des scénarios, issue de contraintes relatives à l'exercice du métier, ainsi que des choix différents qui concernent principalement la stratégie d'enseignement et les tâches prescrites aux élèves. Cette diversité montre l'existence d'une marge de manœuvre, limitée mais bien réelle, qui est investie par les professeurs pour élaborer leur projet d'enseignement. Nous avons aussi montré que l'utilisation d'un manuel n'était pas déterminante sur le projet élaboré par un professeur.

A présent, l'objectif est de repérer les points communs et les divergences entre les déroulements, de rechercher des traces d'une cohérence entre le scénario prévu et celui qui a été vraiment animé. Pour analyser ce qui se passe dans une classe, nous distinguons les activités des élèves, induites par les tâches (au sens large) qui leur sont proposées, et les échanges qu'ils ont avec le professeur. Nous analysons ici les activités induites, les échanges seront étudiés dans le chapitre suivant.

Rappelons que le repérage des activités réelles est impossible : elles sont différentes pour chaque élève et s'effectuent essentiellement en pensée. Nous considérons donc la classe dans son ensemble : nous retenons les interventions qui s'effectuent sous la responsabilité du professeur. Ce sont ces traces des activités en référence aux tâches prescrites que nous appelons *activités effectives* et que nous étudions.

Précisons nos questions et indiquons comment nous avons procédé pour y répondre.

1. Quelques précisions méthodologiques

Nos questions portent maintenant sur les pratiques en classe. Plus précisément, nous envisageons ici la pratique d'un enseignant par les activités des élèves consécutives aux tâches qui leur ont été proposées par le professeur. Les questions que nous nous posons ici sur les séquences concernent, côté élèves, la nature des activités en classe pour leur influence sur les apprentissages, et, côté professeur, la cohérence entre le projet et son déroulement. Nous allons préciser davantage ces questions et les méthodes utilisées pour y répondre.

Des questions sur les pratiques en classe, analysées par les activités des élèves

Les enseignants n'ont pas introduit leur séquence par une phase contextualisée où les élèves travaillent sur une situation multiplicative. Une analyse qualitative du déroulement, fondée sur une comparaison entre les activités attendues et les activités réelles, n'apporterait donc pas d'autres informations que celles que nous avons déjà obtenues par l'étude de la stratégie d'enseignement et des tâches effectivement prescrites aux élèves. La réalisation de ces tâches était généralement assez rapide, nous n'étudierons donc pas de manière spécifique la durée des activités. Cependant ces tâches étaient relativement nombreuses, nous nous proposons donc d'étudier les séquences d'enseignement par les activités des élèves en classe en analysant leurs effectifs, leur répartition et leur chronologie.

Quelles ont été les activités des élèves en classe ?

Nos premières interrogations correspondent pour beaucoup à celles que nous avons déjà sur les projets des professeurs. Nous réutilisons les indicateurs adoptés pour étudier les tâches proposées par le professeur, qui reposent sur des hypothèses généralement admises en didactique des mathématiques concernant l'apprentissage et qui nous viennent des outils d'analyse qui y sont développés.

La dynamique contextualisation/décontextualisation

Les scénarios ne prévoient pas de construction de la technique opératoire par l'étude d'une situation multiplicative, cette dynamique est donc absente des projets des professeurs. Les problèmes sont prévus après la technique opératoire. Qu'en est-il en classe ? Les professeurs aménagent-ils finalement des allers et retours entre les situations multiplicatives et l'opération elle-même ?

La dynamique ancien/nouveau

Les résultats des évaluations montrent que les objectifs de l'école élémentaire ne sont pas encore acquis pour de nombreux élèves à l'entrée en sixième, notamment en ce qui concerne la notation décimale. Les activités de révisions sont-elles nombreuses dans la séquence ? comment sont-elles réparties ? autrement dit, les savoirs anciens sont-ils interrogés ? souvent ? à quel(s) moment(s) du déroulement ?

Au sein même de la séquence, plusieurs professeurs avaient prévu de traiter des erreurs d'élèves liées notamment à une mauvaise utilisation de la règle de la virgule. Nous l'avons vu, ces erreurs viennent souvent d'une connaissance insuffisante de la notation décimale et de la signification de la place des chiffres dans la technique opératoire de la multiplication. Des aménagements entre les applications et les questions plus théoriques ou les révisions des savoirs enseignés à l'école élémentaires sont-ils aménagés durant le déroulement ?

Le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux se heurte à une rupture de sens lorsque l'addition répétée est la seule référence disponible. Les élèves travaillent-ils beaucoup sur des problèmes issus de situations multiplicatives ?

La nature des activités des élèves

Nous distinguons notamment les activités qui ne demandent que des applications directes de techniques opératoires (mentales ou écrites) de celles où l'élève doit, soit reconnaître la structure multiplicative de la situation, soit mettre en fonctionnement des propriétés de la multiplication (calcul raisonné). Les élèves ont-ils aussi des activités de questionnement plus général, notamment sur le passage du particulier au général, sur le vrai et le faux en mathématique, sur l'argumentation ?

Nos autres questions concernent plus spécifiquement l'exercice du métier en classe, sauf les adaptations aux réactions des élèves qui seront étudiées dans le prochain chapitre.

Des questions relatives à l'animation du scénario

Nous nous interrogeons sur la cohérence entre le projet du professeur et son déroulement en classe ainsi que sur les contraintes qui influencent l'animation du scénario.

Quelle cohérence entre le scénario prévu et son animation ?

Rappelons que nous avons admis une cohérence de l'ensemble des pratiques enseignantes pour des professeurs expérimentés. Nous en recherchons des traces en confrontant ce qui a été prévu et ce qui s'est effectivement passé.

La stratégie d'enseignement qui caractérise le projet de chaque professeur, nous l'avons vu, se retrouve dans les tâches qu'il propose à ses élèves, mais se retrouve-t-elle aussi dans leurs activités effectives ? ou cette particularité de chaque enseignant est-elle gommée quand on analyse la séquence par les activités des élèves ?

La stratégie d'enseignement imprime aussi une progression à la séquence, telle qu'elle est prévue par le professeur. Nous cherchons à savoir si les activités des élèves évoluent au cours du temps, en particulier si la progression prévue se retrouve dans le déroulement de la séquence.

Les professeurs, nous l'avons montré, se distinguent par leur manière de considérer la classe, entre un lieu de travail des élèves et un lieu d'exposition des mathématiques. Nous avons montré que cette distinction se retrouvait dans les modes d'institutionnalisation des savoirs. En trouve-t-on aussi des traces en examinant les activités effectives des élèves ?

Quelle influence du manuel utilisé en classe ?

Nos questions concernent aussi l'influence de l'utilisation du manuel scolaire en classe sur le déroulement du projet du professeur évalué par les activités des élèves. Nous avons montré que les scénarios élaborés par trois des professeurs étaient indépendants des choix des auteurs du manuel utilisé. Monsieur Bombelli a calqué sa séquence sur celle du livre. Ces différences se confirment-elles au vu des activités des élèves ?

Quelles contraintes et quelles marges de manœuvre pour enseigner ?

Une dernière interrogation, qui traverse les précédentes, est celle de l'importance des contraintes qui s'exercent sur l'enseignement. Nous en avons

montré dont l'influence sur l'élaboration du scénario de la séquence n'est pas négligeable. Mais nous avons aussi pu constater que des marges de manœuvre sont investies par les professeurs dans leur préparation de cours. Qu'en est-il en classe ? La régularité ou la diversité des déroulements constatée à l'issue des analyses menées pour répondre aux questions précédentes nous permettra de le dire.

Les questions sont nombreuses, abordons maintenant les problèmes méthodologiques qu'elles soulèvent.

Méthodes d'analyse des pratiques enseignantes par les activités des élèves

Les deux questions centrales que nous avons soulevées sont : quelle régularité, quelle variabilité des pratiques en classe ? et, quelle cohérence entre le projet et son déroulement ? Pour mener l'étude des pratiques enseignantes par les activités effectives des élèves, afin de répondre à ces deux questions centrales, nous procédons par comparaison : comparaison entre les séquences animées par les professeurs, comparaison des déroulements avec les scénarios prévus, et comparaison avec les choix des auteurs du manuel. Il reste à définir les observables qui ont été relevés et à décrire plus précisément les méthodes mises en œuvre pour effectuer ce travail.

Définition des activités effectives des élèves

♦ *Réutiliser les mêmes catégories pour comparer projet et déroulement*

Pour analyser les tâches destinées aux élèves, dans les publications des propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux, nous avons utilisé des indicateurs, issus des outils élaborés en didactique des mathématiques. Ces indicateurs ont été réutilisés pour étudier les projets élaborés par les professeurs observés. Afin de procéder à des comparaisons entre le déroulement et le scénario prévu, il nous sera nécessaire de réutiliser ces catégories pour distinguer les activités effectives relevées à la lecture des narrations des séquences observées.

Nous avons distingué sept catégories de tâches, nous définissons donc sept catégories d'activités effectives : réviser des savoirs enseignés à l'école élémentaire, élaborer la technique opératoire, calculer un produit (en posant la multiplication, à la calculatrice ou mentalement), se poser des questions plus théoriques sur l'opération (notamment sur ses propriétés) et résoudre des problèmes issus de situations multiplicatives.

La comparaison avec le manuel scolaire utilisé en classe demande une adaptation. Au lieu de repérer les activités effectives, nous considérons seulement les activités attendues des élèves compte tenu de la tâche prescrite par l'énoncé. A la place des narrations, nous considérons les pages du manuel où des tâches sont proposées, sous la forme " d'activités préparatoires " ²⁶¹ ou d'exercices.

²⁶¹ Les éditeurs de manuels scolaires de mathématiques pour le collège ont effectué des choix convergents de présentation des chapitres. Les activités préparatoires sont des exercices destinés à introduire les notions nouvelles. Cette apparente homogénéité dissimule des choix différents : suivant les chapitres, certains auteurs annoncent un résultat à appliquer dès la première activité préparatoire, d'autres exposent une notion et présentent des éléments de preuve de ses propriétés, d'autres encore tentent de faire découvrir à l'élève une notion ou sa

♦ *Des catégories trop vastes pour certaines analyses*

Les catégories d'activités effectives que nous venons de définir sont trop vastes pour permettre certaines analyses avec les outils élaborés en didactique des mathématiques et que nous utilisons. Par exemple, nous avons vu que certains professeurs introduisent les ordres de grandeurs dans le champ mathématique de leur séquence d'enseignement de la multiplication des décimaux. Ici, la distinction de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances nous a amené à différencier les activités *estimer* un produit et *utiliser une estimation pour*, par exemple, choisir la valeur du produit parmi les valeurs proposées dans un énoncé.

Pour évaluer la prise en compte des difficultés des élèves, nous avons distingué plusieurs activités de calcul écrit du produit de deux décimaux. Calculer un produit quand le multiplicateur contient un zéro intercalaire ou quand il n'en contient pas sont deux activités différentes. Ainsi, cinq activités, dont certaines sont éventuellement cumulées, peuvent être attribuées au calcul, avec du papier et un crayon, du produit de deux décimaux suivant qu'un des facteurs possède un zéro final, que le multiplicateur contient un zéro intercalaire, que le produit des entiers associés aux facteurs décimaux est un multiple de dix, que les facteurs ont le même nombre de décimales ou que le calcul ne présente aucune de ces difficultés.

En nous appuyant sur ces catégories, nous avons élaboré une liste des activités effectives constatées dans les séquences d'enseignement auxquelles nous avons assisté. Cette liste est assez longue (elle comporte quarante-deux activités), nous la présentons plus loin dans un paragraphe spécial. Le relevé des activités effectives constitue un premier codage des narrations. Un second codage permet de prendre en compte la chronologie des séquences observées.

♦ *Prise en compte de la chronologie des activités effectives*

Pour rendre compte de la chronologie, nous avons procédé à une numérotation qui marque l'ordre d'apparition des activités dans les narrations des déroulements. Afin d'indiquer la simultanéité de plusieurs activités nous leur avons attribué le même numéro.

Pour le manuel, nous avons adopté une chronologie conforme à l'ordre des énoncés. Ce choix est évidemment discutable, il n'est pas certain que les auteurs envisagent que les professeurs doivent suivre le manuel rigoureusement dans l'ordre qui est proposé. Les activités préparatoires sont toutes regroupées en début de chapitre, même si plusieurs notions sont présentées, et les exercices terminent chaque chapitre. On peut penser que les auteurs envisagent qu'un enseignant propose des exercices sur la première notion avant d'enseigner la deuxième. Mais on peut estimer aussi qu'ils construisent des séquences d'enseignement qui puissent être directement utilisées par un enseignant, notamment si celui-ci est débutant. C'est pourquoi nous avons tenu compte de cet ordre.

nécessité par un problème, parfois contextualisé. Dans le chapitre consacré à la multiplication des décimaux du manuel utilisé par les professeurs observés, les activités préparatoires comprennent des révisions des acquis de l'école élémentaire, la présentation de la technique opératoire avec des éléments de justification de cette technique puis quelques applications.

Des méthodes pour analyser les activités effectives des élèves

Pour analyser les déroulements des séquences observées par les activités effectives des élèves, nous procédons par comparaison. Afin d'interpréter les résultats obtenus, nous effectuons des comparaisons sur des groupements différents d'activités effectives. D'abord nous considérons le total des activités, puis nous retenons celles qui sont significatives des séquences observées et nous étudions leur répartition, ensuite nous retournons aux catégories utilisées pour l'analyse des tâches, et enfin nous étudions l'organisation chronologique des séquences.

♦ *Une analyse quantitative globale, une prise en compte de la durée*

Le nombre total d'activité est un premier indicateur de la richesse d'une séquence. Nous l'utilisons pour une première comparaison et nous affinons l'analyse en tenant compte aussi de la durée des séquences.

Cette première analyse reste assez sommaire, nous l'avons intégré au paragraphe consacré aux activités effectives (définition et résultats des relevés). Les trois autres analyses feront chacune l'objet d'un paragraphe spécifique.

♦ *Une analyse de la répartition des activités significatives*

Les professeurs n'ayant pas cherché de situation fondamentale pour enseigner la multiplication des décimaux, nous avons choisi d'analyser les séquences par les activités effectives des élèves. Comme nous le verrons, les effectifs sont très variables et, à cause de la cohérence des pratiques que nous admettons, nous supposons que le spectre des effectifs reflète l'échelle des priorités définies par les professeurs, ainsi que par les auteurs des manuels scolaires.

En comparant les répartitions des activités significatives, nous analysons les choix prioritaires des professeurs ainsi que ceux des auteurs du manuel utilisé. Leur homogénéité ou leur diversité s'interprète en termes de contraintes et de marges de manœuvre investie.

La comparaison des séquences des professeurs au chapitre du manuel nous indiquera la distance prise par les enseignants avec les choix des auteurs. Autrement dit, nous évaluerons la contrainte imposée sur le déroulement par l'utilisation du manuel en classe.

♦ *Une analyse de la répartition des activités par catégorie*

Nous comparons les effectifs et la répartition des catégories d'activités, effectives ou attendues, respectivement relevées dans les différentes séquences observées et dans le manuel utilisé.

Nous pourrions d'une part croiser les résultats obtenus avec les précédents concernant les choix des professeurs et leur autonomie vis-à-vis du manuel utilisé. D'autre part, nous pourrions chercher des traces de cohérence entre les projets et les déroulements.

♦ *Une analyse de l'organisation chronologique des séquences*

L'analyse des projets élaborés par les professeurs avait montré quelques différences quant à l'organisation chronologique. A l'aide de graphiques montrant

l'évolution des activités des élèves au cours du temps, nous pourrions comparer les déroulements aux projets du point de vue de la chronologie.

Ces graphiques permettront aussi de repérer les allers et retours entre les applications de techniques et les questions plus théoriques ou les révisions des savoirs enseignés à l'école élémentaires.

Consacrons maintenant un paragraphe à la définition des activités effectives et aux premiers résultats des relevés effectués dans les narrations des séquences observées et dans le chapitre du manuel utilisé.

Quelles activités effectives des élèves ? Définition et répartition

Rappelons que les distinctions entre les enseignements des professeurs nous intéressent en ce qu'elles correspondent à des apprentissages mathématiques différents. Les activités effectives des élèves ont donc été définies par des critères directement liés au savoir enseigné, en utilisant des outils élaborés en didactique des mathématiques. Dans le codage des narrations, nous n'avons retenu une activité que si elle a effectivement été constatée en classe à un moment de la séquence.

Définition des activités effectives des élèves

Pour organiser la liste des activités des élèves, nous les avons classées suivant les sept catégories reprises de l'étude des tâches. Les activités de révisions ont été distinguées par le savoir révisé, les activités d'élaboration de la technique opératoire par la méthode choisie, les activités de calcul par les règles utilisées ou par les erreurs constatées dans les évaluations, les questions théoriques par les propriétés de la multiplication et les problèmes par les situations multiplicatives dont ils sont issus. Finalement, nous avons retenu quarante-deux activités effectives relatives à la multiplication des décimaux, chacune est repérée par un code qui précise la catégorie à laquelle elle appartient.

Pour aider à la lecture, nous les présentons dans un tableau, avec un exemple emblématique lorsque cela est possible.

Tableau 12. Activités mathématiques effectives des élèves

Désignation des activités	Exemple emblématique	Code des activités
Réviser des acquis de l'Ecole Elementaire		REE
Multiplier ou diviser un décimal par 10, 100, 1000	$3,14 \div 100$	REE_x/10_0
Réviser la numération décimale, ou le système de mesures décimales	314 g = . kg	REE_D
Etudier des situations multiplicatives (comprenant un produit de deux entiers ou d'un décimal par un entier)	Prix de 3kg de poires à 12,8F/kg ?	REE_SM
Réviser la technique opératoire de la multiplication de deux entiers	314×28	REE_nxn
Réviser la technique opératoire de la multiplication d'un décimal par un entier	$3,14 \times 28$	REE_dxn
Réviser le vocabulaire relatif à la multiplication : produit, facteur, double, triple ...	Calculer le triple de 3,5	REE_Voca

Elaborer la Technique Opératoire de la multiplication		ETO
Conjecturer ou établir l'identité des chiffres du produit des Décimaux et de celui des Entiers associés		ETO_DE
Elaborer la Technique Opératoire par l'utilisation de conversion d'unité de mesure		ETO_C
Elaborer la Technique Opératoire par l'utilisation de l'écriture fractionnaire (ou écriture assimilée)		ETO_F
Elaborer la Technique Opératoire par l'utilisation des Ordres de Grandeur		ETO_OG
Elaborer la Technique Opératoire par l'utilisation d'Opérateurs		ETO_OP
Suivre l'Elaboration de la Technique Opératoire ou d'une propriété effectuée par le Professeur ou assimilé (élève jouant le rôle du professeur, manuel, polycopié...)		ETO_P
Conjecturer ou établir la Règle de la Virgule		ETO_RV
Formuler, Institutionnaliser la Technique Opératoire ou autre propriété liée à la multiplication des décimaux		ETO_FI
Avec du Papier et un Crayon, multiplier deux décimaux		PC
Effectuer la multiplication de deux décimaux sans cas particulier	$3,14 \times 2,8$	PC_Simple
Effectuer la multiplication de deux décimaux quand le multiplicateur contient un zéro intercalaire	$3,14 \times 2,08$	PC_0inter
Effectuer la multiplication de deux décimaux quand le multiplicateur contient un zéro final ou un zéro initial	$3,1 \times 2,80$	PC_0final
Effectuer la multiplication de deux décimaux quand le produit contient au moins un zéro inutile	$3,14 \times 2,5$	PC_0inutile
Effectuer la multiplication de deux décimaux quand les facteurs contiennent le même nombre de décimales	$3,14 \times 2,82$	PC_Déci=
Avec la Machine A Calculer, multiplier deux décimaux		MAC
Utiliser la Machine A Calculer		MAC
Effectuer un Calcul Mental ou un Calcul Raisonné		CMCR
Multiplier un nombre décimal par 0,0 1	$3,14 \times 0,1$	CMCR_ $\times 0,0 \dots 1$
Multiplier mentalement un nombre décimal par un décimal particulier 0,5 ; 0,2 ; 0,25...	$314 \times 0,5$	CMCR_ $\times 0,5$
Déterminer mentalement une minoration, une majoration ou un encadrement du produit de deux décimaux, éventuellement pour placer la virgule au produit des entiers associés	Vrai ou faux ? $3,4 \times 2,5 < 6$	CMCR_ $<>$
Déterminer mentalement un ordre de grandeur du produit de deux décimaux pour contrôler le résultat d'un calcul	Vrai ou faux ? $3,4 \times 2,5 = 0,85$	CMCR_DOG
Déterminer mentalement un ordre de grandeur du produit de deux décimaux et l'utiliser, éventuellement pour placer une virgule manquante au produit de deux décimaux ou à l'un de ses facteurs	Placer la virgule au résultat : $3,4 \times 2,5 = 85$	CMCR_UOG
Utiliser des opérateurs du type 0,0 1 ou 10 0 pour déterminer mentalement le produit de deux décimaux	$314 \times 3 = 942$ $3,14 \times 3 = ?$	CMCR_OP
Utiliser la règle de la virgule pour placer la virgule au produit de deux décimaux	$314 \times 3 = 942$ $3,14 \times 0,3 = ?$	CMCR_RV
Déterminer le dernier chiffre du produit de deux décimaux pour vérifier le résultat obtenu ou proposé	Vrai ou Faux ? $3,14 \times 3 = 9,43$	CMCR_Der
Utiliser (même implicitement) les propriétés algébriques de la multiplication pour effectuer un calcul	$5 \times 3,14 \times 2$	CMCR_(D, \times)
Utiliser (même implicitement) les propriétés de la multiplication pour ordonner des nombres	Vrai ou Faux ? $3,1 \times 0,3 < 3,1 \times 0,4$	CMCR_ \times et<

(Se) poser des Questions Théoriques ou des Questions Sur....		QTQS
S'interroger sur les propriétés algébriques de la multiplication dans l'ensemble des décimaux (commutativité...), éventuellement chercher une réponse		QTQS_(D,×)
S'interroger sur effet de la multiplication sur l'ordre des décimaux, éventuellement chercher une réponse		QTQS_×et<
S'interroger sur l'effet, sur un nombre décimal, de la multiplication de ce décimal par un nombre inférieur à l'unité, éventuellement chercher une réponse		QTQS_×<1
S'interroger sur la limite de la validité de l'utilisation des Ordres de Grandeur, éventuellement chercher une réponse		QTQS_OG
S'interroger sur l'effet d'opérateurs multiplicatifs appliqués aux facteurs d'un produit, éventuellement chercher une réponse.		QTQS_OP
S'interroger sur la limite de la validité de la Règle de la Virgule, éventuellement chercher une réponse		QTQS_RV
Se poser une question relative au Vrai et au Faux, au Pourquoi, au Général ou au Particulier... et éventuellement chercher une réponse		QTQS_VFP
Etudier une Situation Multiplicative		SM
Etudier une Situation Multiplicative (situation comprenant un produit de deux décimaux) : cas d'un isomorphisme de grandeurs	Prix ..	SM_Isom
Etudier une Situation Multiplicative (situation comprenant un produit de deux décimaux) : cas d'un produit de deux grandeurs	Aire de rectangle ..	SM_×grandeur
Etudier une Situation Multiplicative (situation comprenant un produit de deux décimaux) : cas d'un opérateur fonctionnel	Agrandissement ..	SM_fonction
Etudier une Situation Multiplicative (situation comprenant un produit de deux décimaux) : cas de composition d'opérateurs fonctionnels	Deux agrandissements...	SM_Composition
Etudier une Situation Multiplicative (situation comprenant un produit de deux décimaux) : cas d'une conversion d'unité de mesure de grandeur	Pouces en cm	SM_Conversion

Repérage des activités effectives dans les séquences observées

Nous avons relevé, à la lecture des narrations des séquences observées, les activités mathématiques effectives des élèves. Lorsqu'une tâche prescrite par un enseignant conduisait à la répétition d'une même activité, nous avons noté le nombre de ces répétitions. Il nous semble, en effet, que certains professeurs peuvent penser que la répétition est favorable aux apprentissages. Deux arguments au moins peuvent expliquer cette hypothèse. Une tâche étant prescrite à la classe, l'activité attendue n'est pas toujours réalisée par l'ensemble des élèves, aussi, pour optimiser le nombre d'élèves qui l'auront réalisé, un professeur peut préférer prescrire plusieurs fois la même tâche. Par ailleurs, les réalisations successives d'une même tâche ne sont pas nécessairement identiques, la pensée qui accompagne ces réalisations peut être différente d'une réalisation à l'autre.

Rappelons qu'en ce qui concerne le manuel, le codage ne peut pas correspondre à des activités des élèves. Nous avons relevé les activités mathématiques attendues compte tenu des tâches prescrites par les énoncés. De la même façon que pour les séquences des professeurs, si un exercice conduisait à répéter la même activité plusieurs fois de suite, nous avons comptabilisé ces répétitions.

Nous allons présenter, dans un tableau, les effectifs des activités constatées durant les séquences observées. Pour chaque catégorie, l'effectif total est précisé. A la fin du tableau, l'effectif total des activités, toute catégorie confondue, et la moyenne horaire sont indiqués.

Tableau 13. Effectifs des activités mathématiques

Activités mathématiques	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
REE	88	30	29	29	42
REE_Voca	9	0	1	0	8
REE_x/10...0	7	1	0	1	13
REE_D	7	9	7	2	9
REE_d×n	18	8	7	13	6
REE_n×n	20	3	2	3	5
REE_SM	27	9	12	10	0
ETO	9	35	22	14	15
ETO_C	0	0	5	0	0
ETO_DE	0	0	0	0	0
ETO_F	0	0	0	0	4
ETO_FI	6	7	8	9	10
ETO_OG	0	17	0	0	0
ETO_OP	2	0	6	3	0
ETO_P	1	0	2	2	0
ETO_RV	0	11	1	0	1
PC	54	42	25	35	17
PC_0final	18	10	7	11	7
PC_0inter	9	2	1	5	1
PC_0inutile	19	15	11	5	5
PC_Déci=	8	9	2	14	4
PC_Simple	0	6	4	0	0
MAC	15	14	2	2	0
CMCR	146	62	51	15	107
CMCR_(D,×)	7	0	1	4	11
CMCR_x0,0...1	45	0	3	1	10
CMCR_x0,5	23	5	5	3	4
CMCR_xet<	0	0	0	0	6
CMCR_<>	3	0	6	3	8
CMCR_Der	14	9	7	2	2
CMCR_DOG	10	21	9	0	10
CMCR_OP	8	0	2	1	30
CMCR_RV	18	6	9	1	17
CMCR_UOG	18	21	9	0	9
QTQS	11	19	16	8	61
QTQS_(D,×)	0	0	0	0	2
QTQS_xet<	5	0	0	1	9
QTQS_x<1	2	2	2	0	6
QTQS_OG	0	3	3	0	7
QTQS_OP	0	0	0	0	2
QTQS_RV	4	12	11	5	5
QTQS_VFP	0	2	0	2	30

SM	10	4	7	0	1
SM_xgrandeur	0	0	0	0	0
SM_Isom	7	4	7	0	1
SM_Composition	0	0	0	0	0
SM_Conversion	3	0	0	0	0
SM_fonction	0	0	0	0	0
Total général	333	206	152	103	242
Moyenne horaire		69	43	41	48

Nombre total et moyenne horaire des activités effectives

Examinons les deux dernières lignes de ce tableau.

- ♦ Le nombre total d'activités différencie les séquences observées

Le nombre total des activités effectives est très variable : de 103 pour celle de Monsieur Bombelli à 242 pour celle de Madame Germain, et 333 activités attendues pour le manuel. Limitons, dans un premier temps, notre analyse aux séquences des professeurs. Le nombre moyen d'activités par séquence est 175,75. Si l'on norme les valeurs par rapport à cette moyenne on obtient ces résultats :

Tableau 14. Nombre total d'activités par séquence

	Moyenne	Monsieur Bombelli	Madame Agnesi	Madame Theano	Madame Germain
Nombre absolu d'activités	175,75	103	152	206	242
Nombre d'activités normé à 100	100	59	86	117	138
Ecart à la moyenne		-41%	-14%	+17%	+38%
Entre deux valeurs successives	$\uparrow 27\% \downarrow$ $\uparrow 33\% \downarrow$ $\uparrow 21\% \downarrow$				
Position relative des professeurs					

Ainsi, Madame Agnesi et Madame Theano induisent un nombre d'activités assez proche de la moyenne (à environ 15% près) alors que Monsieur Bombelli et Madame Germain en induisent respectivement environ 40% de moins et 40% de plus. Nous remarquons un partage des quatre professeurs en deux groupes chacun constitué des professeurs les plus proches : Monsieur Bombelli et Madame Agnesi d'une part qui induisent moins d'activités que la moyenne, et Madame Theano et Madame Germain d'autre part qui en induisent plus.

Le nombre d'activités attendues à la lecture des tâches prescrites par les énoncés du manuel s'élève à 333. Ce nombre est approximativement le double du nombre moyen des activités des élèves constatées dans les classes des professeurs observés. Comme chaque exercice réalisé en classe conduit, en plus de sa réalisation par les élèves, à de nouvelles questions, des échanges et des bilans, le nombre d'activités effectives serait bien supérieur à 333 si toutes les tâches proposées avaient été prescrites dans une classe. Il apparaît alors que le manuel, compte tenu de la durée que le professeur peut accorder à cette séquence, n'est pas destiné à être suivi intégralement par les enseignants, au moins pour les exercices

proposés, mais qu'il propose un éventail d'énoncés dont seulement ceux qui sont jugés les plus intéressants²⁶² sont prescrits aux élèves.

♦ *La moyenne horaire des activités différencie les séquences observées*

Le nombre d'activités induites par les tâches proposées durant les séquences des enseignants croît avec la durée : de 103 activités pour la séquence de Monsieur Bombelli qui dure 2h30 à 242 pour celle de Madame Germain qui dure 5h. Pour l'étude que nous menons sur l'enseignement de la multiplication des décimaux, rappelons que le nombre d'activités nous semble déterminant sur l'apprentissage parce qu'il rend compte de la richesse des séquences pour les élèves. Néanmoins, un enseignant est soumis à la fois aux directives des programmes et aux horaires officiels. Un professeur qui saurait nourrir vingt heures d'enseignement sur la multiplication des décimaux offrirait sans doute une séquence très riche à ses élèves mais il serait alors contraint de délaissier une autre partie du programme.

Nous avons alors rapporté le nombre d'activités à la durée de la séquence. Les résultats obtenus figurent dans la dernière ligne du tableau des effectifs des activités. Nous constatons une moyenne horaire analogue, voisine de 45 activités à l'heure, pour trois professeurs. Madame Theano se distingue, elle induit à chaque heure plus d'activités que ses collègues, sa moyenne horaire est de 69 activités.

La signification de l'indicateur de la moyenne horaire des activités des élèves mérite d'être approfondie. Cette moyenne n'est pas un indicateur suffisant pour tirer des conclusions sur le temps de recherche laissé aux élèves. Nous n'avons pas d'éléments ici pour affirmer que le temps de recherche des élèves est plus long dans la classe de Monsieur Bombelli que dans celle de Madame Theano. Si Monsieur Bombelli prend un quart d'heure pour obtenir le silence dans sa classe agitée, la moyenne horaire des activités des élèves diminue sans pour autant que le temps de recherche en soit accru.

Tableau 15. Nombre moyen d'activités par heure

	Moyenne	Monsieur Bombelli	Madame Agnesi	Madame Germain	Madame Theano
Nombre d'activités	175,75	103	152	242	206
Nombre d'heures de la séquence	3,5	2,5	3,5	5	3
Taux horaire	50	41	43	48	69
Taux normé à 100	100	82	86	96	138
Ecart à la moyenne		-18%	-14%	-4%	+38%
Entre deux valeurs successives	<div> <div>↑ 4% ↓</div> <div>↑ 10% ↓</div> <div>↑ 42% ↓</div> </div>				
Position relative des professeurs	<div> <div> <div>B</div> <div>A</div> <div>G</div> <div>T</div> </div> <div> <div>-40</div> <div>-20</div> <div>0</div> <div>+20</div> <div>+40</div> </div> </div>				

²⁶² Nous choisissons à dessein cet adjectif qui est le plus souvent utilisé par les professeurs pour qualifier un exercice sans faire explicitement référence à sa difficulté. Peut-être un des enjeux de la formation initiale des enseignants de mathématiques est-il de "donner du sens" à l'adjectif *intéressant* pour un exercice que l'on prévoit de proposer à des élèves.

Nous retiendrons seulement que la moyenne horaire des activités est très forte dans la séquence de Madame Theano, ses élèves sont fréquemment sollicités. En forçant le trait, nous pourrions dire que Madame Theano “ harcèle ” ses élèves, plus que ne le font ses trois autres collègues.

2. Analyse des activités effectives significatives

La diversité des activités effectives de chaque séquence nous a conduit, dans ce paragraphe, à limiter notre étude aux activités les plus significatives, activités qu’il reste à définir. Pour chaque séquence, nous avons ordonné les activités effectives par ordre décroissant de leur effectif. Afin de déterminer des activités significatives et de les comparer, nous envisageons deux possibilités :

- choisir les activités qui, séquence par séquence, par ordre décroissant de leur effectif, constituent un pourcentage commun, suffisamment important, des activités de la séquence ;
- choisir, pour chaque séquence, un nombre commun d’activités, par ordre décroissant de leur effectif.

Nous avons alors constaté qu’en décidant de retenir, pour chaque séquence, les activités qui, classées par ordre décroissant de leur effectif, constituent 70% de l’ensemble, nous obtenions d’une part un pourcentage suffisamment important pour que les activités retenues soient représentatives de la séquence (les effectifs des activités non représentées sont assez faibles) et, d’autre part, un nombre d’activités commun approximativement égal à une dizaine dans lequel deux activités de même effectif sont traitées de façon identique.

Nous avons donc décidé d’utiliser ce critère. Ainsi, séquence par séquence, les fréquences cumulées croissantes ont alors permis de déterminer celles qui contribuent à 70% des activités. Nous les appelons “ activités effectives significatives ” de la séquence.

Pour étudier ces activités effectives significatives, nous procédons à trois analyses. Nous étudions les séquences séparément, nous les comparons au manuel utilisé de la classe qui, rappelons-le, est commun, puis nous les comparons.

Les activités significatives des séquences du manuel et des professeurs

Séquence par séquence, les activités ont donc été triées par ordre décroissant des effectifs et nous avons retenu celles dont la fréquence cumulée constitue 70% de l’ensemble des activités ²⁶³.

Les activités attendues significatives de la séquence du manuel

Les effectifs des activités attendues du manuel conduisent au tableau suivant.

²⁶³ Les tableaux complets qui présentent les quarante-deux activités mathématiques avec leurs effectifs respectifs, séquence par séquence, sont présentés en annexe.

Tableau 16. Activités constituant 70% de l'effectif total : le cas du manuel

Activités	Effectifs	ECC	FCC
CMCR $\times 0,0...1$	45	45	13,51%
REE SM	27	72	21,62%
CMCR $\times 0,5$	23	95	28,53%
REE $n \times n$	20	115	34,53%
PC 0inutile	19	134	40,24%
REE $d \times n$	18	152	45,65%
PC 0final	18	170	51,05%
CMCR RV	18	188	56,46%
CMCR UOG	18	206	61,86%
MAC	15	221	66,37%
CMCR Der	14	235	70,57%

Dans le manuel, onze activités rassemblent 70% des activités induites par les tâches prescrites dans les énoncés. Une activité a un effectif nettement supérieur à celui des autres : le calcul mental de la multiplication d'un nombre par une puissance négative de dix. Vient ensuite la résolution d'un problème qui repose sur une situation multiplicative du niveau de l'école primaire. Aucune de ces deux activités n'est liée à l'élaboration de la technique opératoire. Puis les activités ont approximativement le même effectif. Ces activités permettent des révisions de l'école élémentaire, de confronter les élèves à des difficultés d'application de la technique opératoire de la multiplication des décimaux et de les faire réfléchir sur des calculs raisonnés.

Parmi les onze activités dominantes, il n'en figure aucune des catégories ETO (établir la technique opératoire), QTQS (se poser des questions théoriques ou des questions sur...) et SM (résoudre un problème qui repose sur une situation multiplicative du collège). L'absence d'activité des catégories ETO et QTQS montre que les auteurs du manuel n'ont pas fait le choix d'insister sur les méthodes et sur les arguments qui sous-tendent l'élaboration de la technique opératoire. Rappelons qu'ils ont opté pour l'utilisation d'opérateurs afin de justifier la position de la virgule au produit des décimaux.

Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Theano

Les effectifs des activités attendues de la séquence de Madame Theano conduisent au tableau suivant.

Tableau 17. Activités constituant 70% de l'effectif total : le cas de Madame Theano

Activités	Effectifs	ECC	FCC
CMCR DOG	21	21	10,19%
CMCR UOG	21	42	20,39%
ETO OG	17	59	28,64%
PC 0inutile	15	74	35,92%
MAC	14	88	42,72%
QTQS RV	12	100	48,54%
ETO RV	11	111	53,88%
PC 0final	10	121	58,74%
REE D	9	130	63,11%
REE SM	9	139	67,48%
PC Décim	9	148	71,84%

Comme pour le manuel, onze activités contribuent à 70% de l'ensemble de la séquence. Les deux activités de calcul mental ou de calcul raisonné qui portent sur les ordres de grandeurs ont un effectif sensiblement supérieur à celui des autres activités. Ce constat montre une cohérence entre le déroulement de la séquence et le projet du professeur. En effet, dans la stratégie d'enseignement de Madame Theano, la technique opératoire se déduit d'une confrontation des résultats obtenus par la calculatrice et par l'utilisation des ordres de grandeur, ces derniers servant aussi à contrôler le produit de deux décimaux calculé "à la main". On remarquera en outre que la troisième activité la plus fréquente est ETO_OG c'est-à-dire "établir la technique opératoire en utilisant les ordres de grandeurs". Parmi les onze activités dominantes, il n'en figure aucune de la catégorie SM (résoudre un problème qui repose sur une situation multiplicative du collège). On se rappellera que Madame Theano avait proposé, à la première heure de la séquence, trois problèmes du niveau de l'école élémentaire, et que de nombreux élèves ont éprouvé de réelles difficultés pour les résoudre. Les autres activités concernent des révisions de l'école élémentaire, l'élaboration de la technique opératoire et son application. Leurs effectifs décroissent de 17 à 9.

Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Agnesi

Les effectifs des activités attendues de la séquence de Madame Agnesi conduisent au tableau suivant.

Tableau 18. Activités constituant 70% de l'effectif total : le cas de Madame Agnesi

Activités	Effectifs	ECC	FCC
REE SM	12	12	7,89%
PC 0inutile	11	23	15,13%
QTQS RV	11	34	22,37%
CMCR DOG	9	43	28,29%
CMCR RV	9	52	34,21%
CMCR UOG	9	61	40,13%
ETO FI	8	69	45,39%
REE D	7	76	50,00%
REE d×n	7	83	54,61%
PC 0final	7	90	59,21%
CMCR Der	7	97	63,82%
SM Isom	7	104	68,42%
ETO OP	6	110	72,37%

Dans cette séquence, treize activités rassemblent 70% de la totalité. Aucune d'entre elles ne se détache des autres par un effectif plus important. Parmi ces treize activités, la seule catégorie qui ne figure pas est MAC, l'utilisation de la calculatrice pour déterminer le produit de deux décimaux. Les valeurs des effectifs étant assez proches les unes des autres, il semble que Madame Agnesi réussisse à animer le scénario qu'elle avait élaboré en satisfaisant certaines contraintes : couvrir l'ensemble des thèmes de la séquence de façon assez équilibrée, sans insister sur les fondements de la technique opératoire.

Ce constat nous conduit à formuler une hypothèse sur le choix de Madame Agnesi. Nous avons remarqué que Madame Theano possède une stratégie d'enseignement avec une idée directrice forte, les activités des élèves qui dominent

la séquence sont liées à cette idée directrice. En revanche Madame Agnesi, nous l'avons vu, ne souhaitait pas utiliser les conversions sur les valeurs de grandeurs présentes dans des problèmes issus de situations multiplicatives pour construire, ni même pour étayer, la technique opératoire de la multiplication des décimaux. Elle souhaitait motiver l'étude de cette opération en présentant des problèmes où elle est nécessaire. Sa stratégie ne possède pas d'idée directrice aussi forte que celle de Madame Theano. Ce qui semble émerger du tableau des activités les plus fréquentes, c'est la volonté de Madame Agnesi de traiter de façon "équitable" l'ensemble des thèmes liés à la séquence. Cette hypothèse, nous l'avons déjà formulée en analysant le scénario élaboré par ce professeur. Elle semble ici se confirmer.

Les activités effectives significatives de la séquence de Monsieur Bombelli

Les effectifs des activités attendues de la séquence de Monsieur Bombelli conduisent au tableau suivant.

Tableau 19. Activités constituant 70% de l'effectif total : le cas de Monsieur Bombelli

Activités	Effectifs	ECC	FCC
PC_Déci=	14	14	13,59%
REE_d×n	13	27	26,21%
PC_0final	11	38	36,89%
REE_SM	10	48	46,60%
ETO_FI	9	57	55,34%
PC_0inter	5	62	60,19%
PC_0inutile	5	67	65,05%
QTQS_RV	5	72	69,90%

Les 70% des activités de cette séquence sont réalisés par huit activités dont la dernière a pour effectif 5. Les 30% restant des activités ont un effectif inférieur ou égal à 4. Comme pour Madame Agnesi, aucune de ces activités n'a un effectif qui se détache nettement de celui des autres. En revanche, nous constatons une chute significative des effectifs après 55% des fréquences cumulées croissantes, c'est-à-dire après les cinq premières activités. Une telle chute après un pourcentage important de l'ensemble des activités ne s'observe dans aucune autre séquence. De façon significative, Monsieur Bombelli a donc insisté sur ces cinq activités. On remarquera en outre, dans la séquence de Monsieur Bombelli, la part importante des activités concernant l'énoncé et l'application de la technique opératoire (ETO_FI, PC et REE_d×n). Les cinq premières sont exclusivement de ces catégories. Un tel constat confirme l'animation du scénario tel qu'il était globalement prévu par ce professeur dont l'objectif essentiel était de présenter la technique opératoire et de la faire appliquer à ses élèves.

L'analyse du scénario de Monsieur Bombelli a montré que ce professeur déclare suivre le manuel de la classe. La différence que nous constatons pourtant entre sa séquence et celle du manuel s'explique par le choix des exercices effectué par Monsieur Bombelli dans l'éventail proposé par les auteurs. Ainsi les trois catégories d'activités absentes des 70% de la séquence de Monsieur Bombelli ne sont pas les mêmes que ceux du manuel : ces catégories sont MAC (utilisation de

la machine à calculer), CMCR (calcul mental et calcul raisonné) et SM (résolution de problèmes issus de situation multiplicative de niveau collège).

Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Germain

Les effectifs des activités attendues de la séquence de Madame Germain conduisent au tableau suivant.

Tableau 20. Activités constituant 70% de l'effectif total : le cas de Madame Germain

Activités	Effectifs	ECC	FCC
CMCR_OP	30	30	12,40%
QTQS_VFP	30	60	24,79%
CMCR_RV	17	77	31,82%
REE $\times/10...0$	13	90	37,19%
CMCR (D,\times)	11	101	41,74%
ETO FI	10	111	45,87%
CMCR $\times 0,0...1$	10	121	50,00%
CMCR DOG	10	131	54,13%
REE D	9	140	57,85%
CMCR UOG	9	149	61,57%
QTQS $\times et <$	9	158	65,29%
REE Voca	8	166	68,60%
CMCR $<>$	8	174	72,73%

Les activités induites par Madame Germain sont à 70% expliquées par treize d'entre elles. Deux activités ont un effectif sensiblement supérieur à celui des autres : CMCR_OP (utiliser des opérateurs pour mener un calcul mental ou un calcul raisonné) et QTQS_VFP (se poser des questions théoriques ou des questions sur... qui portent sur le vrai, le faux et le pourquoi en mathématiques). On peut s'étonner que l'activité CMCR_OP apparaisse en premier alors que, dans le scénario construit par Madame Germain, l'élaboration de la technique opératoire repose sur la réécriture de chaque facteur décimal comme le produit d'un entier par une puissance négative de dix écrite sous la forme décimale $0,0...1$. La lecture de la narration de cette séquence montre néanmoins que l'utilisation d'opérateurs est une première étape vers cette réécriture : le décimal 3,15 est d'abord perçu comme l'entier 315 qui a été divisé par 100 puis comme le produit de 315 par 0,01. Ainsi nous constatons que les deux activités dont l'effectif est sensiblement supérieur à celui des autres sont liées à la stratégie d'enseignement de Madame Germain qui souhaitait utiliser les connaissances antérieures des élèves et quelques "petites règles pour multiplier deux décimaux" afin de construire la technique opératoire. Madame Germain avait aussi comme souci d'établir – au sens mathématique – la technique opératoire. Nous en concluons que ce professeur a réussi à animer, en classe, le scénario prévu conformément à sa stratégie d'enseignement.

Certaines catégories n'apparaissent pas parmi les treize activités qui constituent 70% des activités de la séquence : PC (calculer, avec du papier et un crayon, le produit de deux décimaux), MAC (utiliser la machine à calculer pour déterminer le produit de deux décimaux) et SM (résoudre un problème issu d'une situation multiplicative de niveau collège). Si l'absence des deux dernières catégories n'est pas surprenante compte tenu du projet de Madame Germain, on

pourrait s'étonner de ne pas voir apparaître davantage des activités de la catégorie PC c'est-à-dire l'application de la technique opératoire. Mais la troisième activité, par ordre décroissant des effectifs est CMCR_RV (utiliser la règle de la virgule pour obtenir le produit de deux décimaux par un calcul mental ou raisonné). Il apparaît donc que ce professeur a privilégié l'utilisation de la règle de la virgule pour déterminer le produit de deux décimaux connaissant le produit des entiers associés plutôt que l'application complète de la technique opératoire. La liste des treize activités montre, conformément au projet du professeur, la très grande importance accordée à la réflexion sur les objets et leurs propriétés plutôt qu'à l'application de techniques. Neuf d'entre elles sont de la catégorie QTQS (se poser des questions théoriques ou des questions sur...) ou CMCR (mener un calcul mental ou calcul raisonné). Trois sont des révisions de l'école élémentaire sur la notation décimale, le vocabulaire spécifiques aux décimaux et les multiplications ou divisions par 10, 100, 1000... La dernière activité ETO_FI porte sur l'élaboration de la technique opératoire.

Nous allons utiliser ces résultats pour comparer les activités effectives des élèves dans les quatre séquences avec les activités attendues qui émergent des énoncés proposés dans le manuel. Rappelons que le manuel est commun aux professeurs. Puis nous comparerons les séquences animées par les enseignants.

Les professeurs suivent-ils le manuel pour choisir les activités significatives ?

Notre étude des manuels pour la classe de sixième a montré leur conformité aux exigences du programme officiel. Les professeurs qui nous ont accueilli travaillent tous en classe avec le même manuel. Nous avons montré que les scénarios des professeurs étaient conformes au programme, nous avons pourtant remarqué qu'ils différaient de celui présenté dans le manuel pour trois des quatre professeurs. Voyons si la divergence de ces trois scénarios et si la convergence du quatrième se retrouvent dans les activités mathématiques dominantes des élèves.

Comparons donc les résultats obtenus sur les séquences des professeurs à celle proposée par les auteurs du manuel. En sélectionnant les activités les plus fréquentes de la séquence du manuel et en indiquant, pour chaque enseignant, leurs effectifs respectifs, nous voulons mesurer la distance prise par les professeurs avec le manuel de la classe.

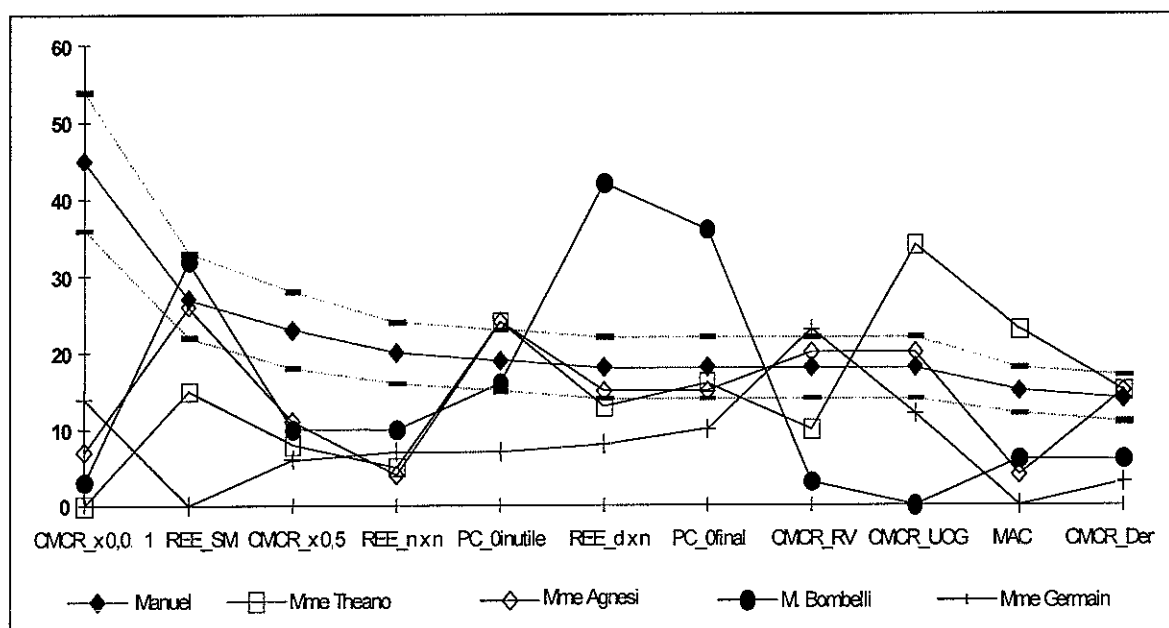
Nous ne présenterons pas les résultats bruts car la lecture du tableau obtenu fait apparaître un écart important des effectifs qui est difficilement interprétable. Nous l'avons vu, les professeurs n'induisent pas autant d'activités en classe que les énoncés du manuel permettent d'en attendre. Pour rendre les effectifs comparables, nous avons corrigé ceux des activités des élèves constatées dans les classes de façon telle que les effectifs totaux soient égaux à l'effectif total du manuel. Ainsi, par exemple, les effectifs des activités constatées dans la séquence animée par Madame Theano ont été multipliés par $333/206$ puisque 333 est l'effectif total du manuel et 206 est celui de la séquence de Madame Theano. Les résultats ainsi normés font apparaître une relative convergence entre le manuel et certains professeurs pour quelques activités spécifiques mais aussi des divergences

importantes pour certaines activités. Les résultats obtenus après cette correction figurent dans le tableau suivant.

Tableau 21. Effectifs corrigés des activités significatives du manuel dans les cinq séquences

Activités mathématiques	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
CMCR $\times 0,0...1$	45	0	7	3	14
REE SM	27	15	26	32	0
CMCR $\times 0,5$	23	8	11	10	6
REE $n \times n$	20	5	4	10	7
PC 0inutile	19	24	24	16	7
REE $d \times n$	18	13	15	42	8
PC 0final	18	16	15	36	10
CMCR RV	18	10	20	3	23
CMCR UOG	18	34	20	0	12
MAC	15	23	4	6	0
CMCR_Der	14	15	15	6	3

Pour faciliter son analyse nous avons tracé une "courbe" des effectifs pour chaque séquence.



Graphique 2. Courbes des effectifs corrigés des activités significatives pour le manuel

Nous avons porté en abscisse les activités induites les plus fréquentes du manuel classées par effectif décroissant. En ordonnée figurent les effectifs de ces activités induites par le manuel et ceux des activités effectives des élèves constatées dans les séquences des professeurs observés. Nous avons fait figurer, autour de la courbe du manuel, une bande constituée par les effectifs du manuel à $\pm 20\%$ près. Cette bande est délimitée par les deux lignes tracées en pointillés. Nous dirons qu'il existe une convergence des effectifs si les points se situent à l'intérieur de cette bande c'est-à-dire qu'ils sont identiques à ceux du manuel à 20% près.

Le graphique fait apparaître de nombreux points de divergence des enseignants avec le manuel utilisé. Le plus souvent les effectifs des activités

induites par le manuel sont supérieurs à ceux constatés dans les séquences des professeurs. Cela nous montre que les professeurs ne s'appuient pas sur les activités valorisées par le manuel pour enseigner la multiplication des décimaux.

Pour six activités induites par le manuel, nous notons une convergence d'effectif chez au moins deux des professeurs. Les onze activités qui, rappelons-le, constituent 70% de l'effectif total des activités du manuel, conduisent toutes à une divergence des effectifs dans la séquence d'au moins un des professeurs. Dix d'entre elles conduisent à une divergence d'au moins deux professeurs et, pour quatre activités, la divergence concerne tous les professeurs observés. Cette hétérogénéité des résultats rend difficile l'analyse comparée des choix des enseignants par rapports à ceux du manuel, nous tirerons davantage de conclusion de l'analyse des activités regroupées par catégories.

Néanmoins, nous pouvons terminer cette comparaison par une mesure de la distance prise par les enseignants avec le manuel en comptabilisant, pour chaque enseignant, le pourcentage des cas de divergence des effectifs. Par exemple, dans la séquence de Madame Agnesi, quatre activités sur les onze retenues (soit 36%) ont un effectif qui les placent en dehors de la zone de convergence ; nous retiendrons un pourcentage de cas de divergence de 36%. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 22. Divergence entre les séquences des professeurs et celle du manuel

	Moyenne	Madame Agnesi	Madame Theano	Monsieur Bombelli	Madame Germain
Pourcentage des cas de divergence	70%	36%	64%	82%	91%
Nombre de cas de divergence normé à 100	100	51	91	117	130
Ecart à la moyenne		-49%	-9%	+17%	+30%
Entre deux valeurs successives	$\uparrow 40\% \uparrow$ $\uparrow 26\% \uparrow$ $\uparrow 13\% \uparrow$				
Positions relatives des professeurs	<p>Le diagramme illustre la position relative des professeurs sur une échelle allant de -50 à +30. Les points sont : A (-50), T (-9), B (+17), G (+30). Les intervalles entre les points sont : A à T : -49, T à B : +26, B à G : +13.</p>				

Le tableau montre une assez grande disparité de la distance prise par les professeurs avec le manuel de la classe. Un fait nouveau cependant : alors que Monsieur Bombelli est l'enseignant qui déclare suivre le manuel, c'est Madame Agnesi qui finalement obtient le pourcentage le moins élevé de divergence avec le manuel. Monsieur Bombelli choisit toutes les tâches qu'il prescrit dans le manuel, il suit le choix des auteurs pour la présentation de la technique opératoire de la multiplication, c'est-à-dire pour les activités préparatoires. Mais la sélection des exercices par ce professeur n'est pas du tout conforme à l'éventail des propositions du manuel. Ce fait est intéressant, il montre que la responsabilité des tâches proposées aux élèves incombe bien au professeur et que, si un projet semble se dessiner à travers les énoncés qui figurent dans un manuel, l'enseignant utilisateur peut très bien, tout en n'utilisant que cette source, s'écarter complètement d'un tel projet.

Comparaison des séquences des professeurs par les activités significatives

Si l'on décide, pour comparer les séquences des professeurs, de retenir les activités des élèves qui figurent, pour une séquence au moins, parmi celles qui contribuent à expliquer 70% de l'ensemble de cette séquence, on obtient vingt-sept activités sur les quarante-deux repérées.

Seulement quinze activités ne figurent, pour aucune des séquences, parmi celles qui constituent 70% de l'ensemble²⁶⁴. Certaines d'entre elles étaient attendues compte tenu des résultats précédents. Ainsi, les activités de révisions de la technique opératoire de la multiplication de deux entiers ont été délaissées par tous les professeurs qui ont préféré effectuer cette révision sur des multiplications dont au moins l'un des facteurs est décimal. Les activités d'élaboration de la technique opératoire ont subi le même traitement, sauf celle qui concerne l'institutionnalisation. Les activités de résolution de problèmes issus de situations multiplicatives ne figurent dans aucun tableau sauf celles dont les situations portent sur des grandeurs isomorphes. On trouve enfin quelques activités de calcul mental ou raisonné ainsi que des questionnements de nature plus théorique.

Pour une de ces quinze activités, l'absence est assez surprenante : le questionnement sur le cas de la multiplication par un facteur inférieur à l'unité. Ce cas est pourtant difficile pour les élèves car il remet en question une propriété constatée sur la multiplication des entiers. L'analyse préalable menée au chapitre 4 mentionne d'ailleurs cette difficulté mais sa conséquence semble porter davantage sur la reconnaissance du modèle multiplicatif d'une situation que sur le calcul du produit lui-même. Le fait que les professeurs aient tous choisi un enseignement décontextualisé explique sans doute l'absence du cas de la multiplication par un facteur inférieur à un.

Le nombre d'activités effectives qui apparaissent au moins dans l'un des quatre tableaux des séquences des professeurs est donc suffisamment important (vingt-sept) par rapport au nombre de celles qui contribuent à 70% de l'effectif total de chaque tableau (en moyenne une dizaine) pour que nous puissions conclure à une grande hétérogénéité des choix des enseignants. Cette hétérogénéité rend difficile la comparaison. Une analyse portant sur les activités regroupées par catégories s'avérera plus fructueuse.

Conclusion : les activités significatives sont cohérentes avec le scénario prévu

Finalement, l'examen des activités les plus fréquentes et qui constituent 70% de l'effectif total de chaque séquence montre que leur nombre est environ une dizaine : suivant les séquences, il varie de huit à treize.

En ce qui concerne les séquences des professeurs, ces activités, induites par les tâches qu'ils ont prescrites à leurs élèves, montrent une animation du scénario globalement cohérente avec la stratégie élaborée. Pour deux professeurs, Madame Theano et Madame Germain, nous avons également montré que les activités des

²⁶⁴ Ces activités sont, dans l'ordre adopté pour les présenter : REE_n×n, ETO_C, ETO_DE, ETO_F, ETO_P, CMCR_×0,5, CMCR_×et<, QTQS_(D,×), QTQS_×<1, QTQS_OG, QTQS_OP, SM_×grandeur, SM_Composition, SM_Conversion, SM_fonction.

élèves dont les effectifs sont sensiblement supérieurs à celui des autres sont précisément celles qui contribueraient le plus à un apprentissage conforme à l'idée directrice de la stratégie élaborée : utilisation des ordres de grandeur pour Madame Theano et élaboration raisonnée de la technique opératoire à partir de la décomposition des décimaux pour Madame Germain. Pour les deux autres professeurs, nous retiendrons la différence entre, d'une part, Monsieur Bombelli qui restreint son enseignement à la présentation de la technique opératoire, à sa justification et à son application dans des exercices de calculs et, d'autre part, Madame Agnesi qui couvre globalement l'ensemble des thèmes de la séquence et cela de façon quasi homogène si l'on retient comme indicateur la fréquence des activités des élèves induites par les tâches qui leur sont confiées.

Pour rendre compte de la distance prise par les professeurs avec le manuel de la classe, nous avons considéré les activités qui expliquent 70% de l'ensemble du manuel et nous avons comparé leurs effectifs avec ceux de ces mêmes activités dans les séquences des professeurs. Nous considérons que le choix d'un professeur converge avec celui des auteurs du manuel à propos d'une activité si l'effectif de cette activité dans la séquence du professeur est égal, à 20% près, à celui constaté dans le manuel. Les résultats obtenus sont très hétérogènes, le nombre de cas de convergence varie de 9% à 64% des activités. Le professeur le plus proche du manuel n'est cependant pas celui qui déclare le suivre mais celui qui cherche à traiter l'ensemble des thèmes de la séquence de façon équitable. La séquence du manuel n'est donc pas suivie comme un "protocole d'enseignement" par les professeurs que nous avons observés.

La diversité des choix des enseignants est très importante en ce qui concerne les activités dominantes de leur séquence. En effet, en regroupant ces activités pour les classes de sixième observées, on obtient les deux tiers des quarante-deux activités recensées au total. Cette diversité rend compte des différences entre les stratégies d'enseignement.

Ces constats doivent être affinés. La cohérence constatée entre les activités des élèves et le projet de l'enseignant ne portent que sur les effectifs des activités les plus fréquentes. Nous allons maintenant prendre en compte l'ensemble de toutes les activités que nous regrouperons en utilisant les sept catégories qui ont été définies précédemment.

3. Analyse des activités regroupées par catégorie

Analysons maintenant les séquences en considérant les activités regroupées par catégorie²⁶⁵. Ainsi, les activités analogues qui conduisent à l'acquisition de

²⁶⁵ Rappelons ces catégories : révisions des acquis de l'école élémentaire (REE) ; élaboration de la technique opératoire (ETO) ; avec un papier et un crayon, calculer le produit de deux décimaux (PC) ; avec la machine à calculer, déterminer le produit de deux décimaux (MAC) ; effectuer un calcul mental ou un calcul raisonné (CMCR) ; (se) poser des questions théoriques ou des questions sur... (QTQS) ; résoudre un problème issu d'une situation multiplicative qui conduit au calcul du produit de deux décimaux non entiers (SM).

compétences voisines seront comptabilisées ensemble : effectuer “à la main” une multiplication de deux décimaux, et cela quelle que soit la multiplication ; résoudre un problème issu d’une situation multiplicative, quelle que soit la situation ; effectuer un calcul mental ou raisonné, quel que soit le calcul... Le regroupement permettra de faciliter les comparaisons qui restaient difficiles lorsqu’elles portaient sur les activités significatives. Mais les différences entre ces activités seront gommées ; certaines analyses, plus fines, nécessiteront parfois de distinguer les activités d’une même catégorie.

Dans les présentations qui suivent, notamment pour les graphiques, nous avons isolé le cas du manuel dont, nous l’avons vu, les effectifs des activités attendues sont difficilement comparables avec les activités effectives repérées dans les séquences animées par les professeurs. Les catégories d’activités ont été classées dans l’ordre utilisé pour leur présentation. Rappelons leurs effectifs.

Tableau 23. Effectifs des catégories d’activités dans les cinq séquences

Activités mathématiques	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
REE	88	30	29	29	42
FTO	9	35	22	14	15
PC	54	42	25	35	17
MAC	15	14	2	2	0
CMCR	146	62	51	15	107
QTQS	11	19	16	8	61
SM	10	4	7	0	1
Total général	333	206	152	103	242

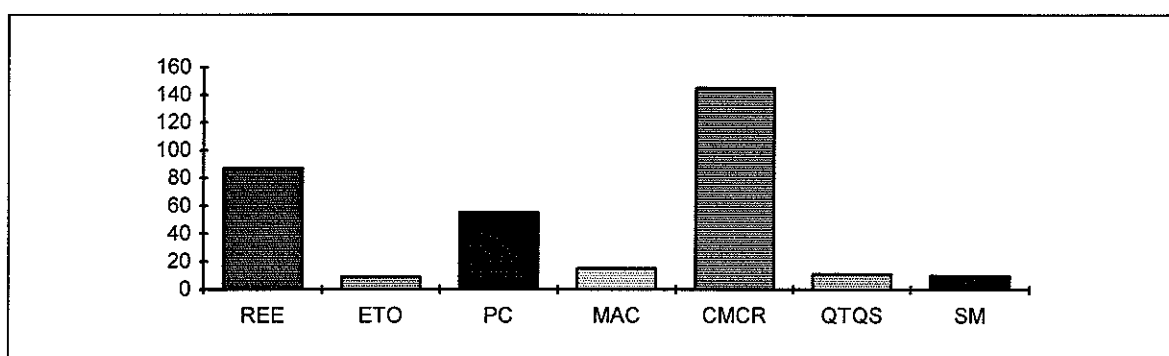
Nous allons utiliser ces résultats pour comparer les différentes séquences. Nous considérerons d’abord toutes les catégories d’activités. Nous détaillerons ensuite l’étude des activités de calcul puis celle des activités de réflexion et de questionnement par opposition aux activités d’application de techniques.

Effectifs et répartition des activités suivant leur catégorie

Nous allons dans un premier temps analyser les effectifs des catégories d’activités dans les cinq séquences, celle du manuel et les quatre qui ont été animées par les professeurs. Puis, pour rendre compte des hiérarchies établies par les auteurs et par les professeurs, et pour les comparer indépendamment des effectifs totaux des catégories, nous analyserons leur répartition relative au sein de chaque séquence.

Effectifs des catégories d’activités dans les cinq séquences

Commençons par analyser les effectifs des activités regroupées par catégorie. Rappelons qu’il s’agit des activités attendues pour le manuel et des activités effectives des élèves pour les séquences des professeurs observés. Afin de faciliter la lecture de tableau des effectifs, nous allons en dresser des histogrammes, un pour le manuel et un qui rassemble les effectifs des quatre séquences des professeurs.

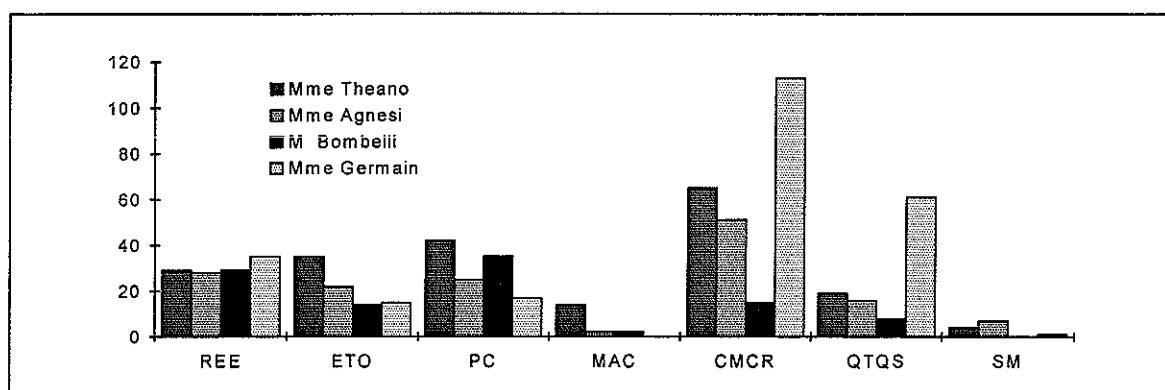


Graphique 3 : Histogramme des effectifs des catégories d'activités du manuel

L'histogramme concernant le manuel fait apparaître la domination de trois catégories d'activités : le calcul mental ou raisonné, les révisions de l'école élémentaire et l'application de la technique opératoire. Le faible effectif des activités de la catégorie SM confirme le choix d'un enseignement décontextualisé de la multiplication des nombres décimaux par les auteurs du manuel.

L'effectif des activités d'élaboration de la technique opératoire (ETO) comparé avec celui des applications de cette technique (PC) laisse à penser que, pour les auteurs du manuel, l'acquisition de la technique repose d'avantage sur un entraînement répété que sur une construction raisonnée. Néanmoins, pour moduler notre propos, signalons dès à présent que l'analyse détaillée des activités regroupées dans la catégorie "calcul mental et calcul raisonné" (CMCR) montre que certaines d'entre elles sont des occasions données aux élèves pour comprendre le fonctionnement de la technique opératoire. Terminons cette remarque par le fait que l'effectif faible des activités de questionnement théorique (QTQS) et d'élaboration de la technique opératoire (ETO) montre que si les auteurs du manuel, par les activités de calcul mental ou raisonné, souhaitent aider les élèves à comprendre le fonctionnement de la technique, ils n'envisagent pas de leur permettre de s'en approprier les fondements.

Examinons maintenant les effectifs des catégories d'activités dans les séquences des professeurs. Nous avons dressé un seul histogramme afin de permettre à la fois une étude professeur par professeur et une étude comparée.



Graphique 4 : Histogramme des effectifs des catégories d'activités des séquences des professeurs

Les professeurs font des choix analogues quant aux révisions (catégorie REE) dont les effectifs montrent l'importance qui leur est accordée dans la séquence. L'histogramme confirme aussi que l'enseignement est décontextualisé pour les quatre professeurs, les activités d'étude de situations multiplicatives (catégorie SM) ont un effectif très faible. Il en est de même pour l'utilisation de la calculatrice (catégorie MAC), elle est délaissée sauf par Madame Theano qui demande à ses élèves de l'utiliser simultanément aux ordres de grandeur pour conjecturer la règle de la virgule de la multiplication des décimaux.

Les effectifs des autres catégories d'activités montrent des choix différents. Monsieur Bombelli, par rapport à ses collègues, délaisse les activités de calcul mental ou réfléchi (catégorie CMCR). Madame Germain, au contraire, privilégie, de façon écrasante par rapport à ses collègues, les tâches qui conduisent ses élèves à des activités de questionnement plutôt théorique (catégorie QTQS) ou de calcul raisonné. Cette remarque est cohérente avec le projet de Madame Germain qui était de construire des "petites règles pour faciliter la multiplication" qui mèneront à l'élaboration de la technique opératoire.

Les effectifs totaux des activités dans les quatre séquences des professeurs ne sont pas identiques, nous allons donc examiner maintenant la répartition des catégories d'activités dans chacune de ces séquences.

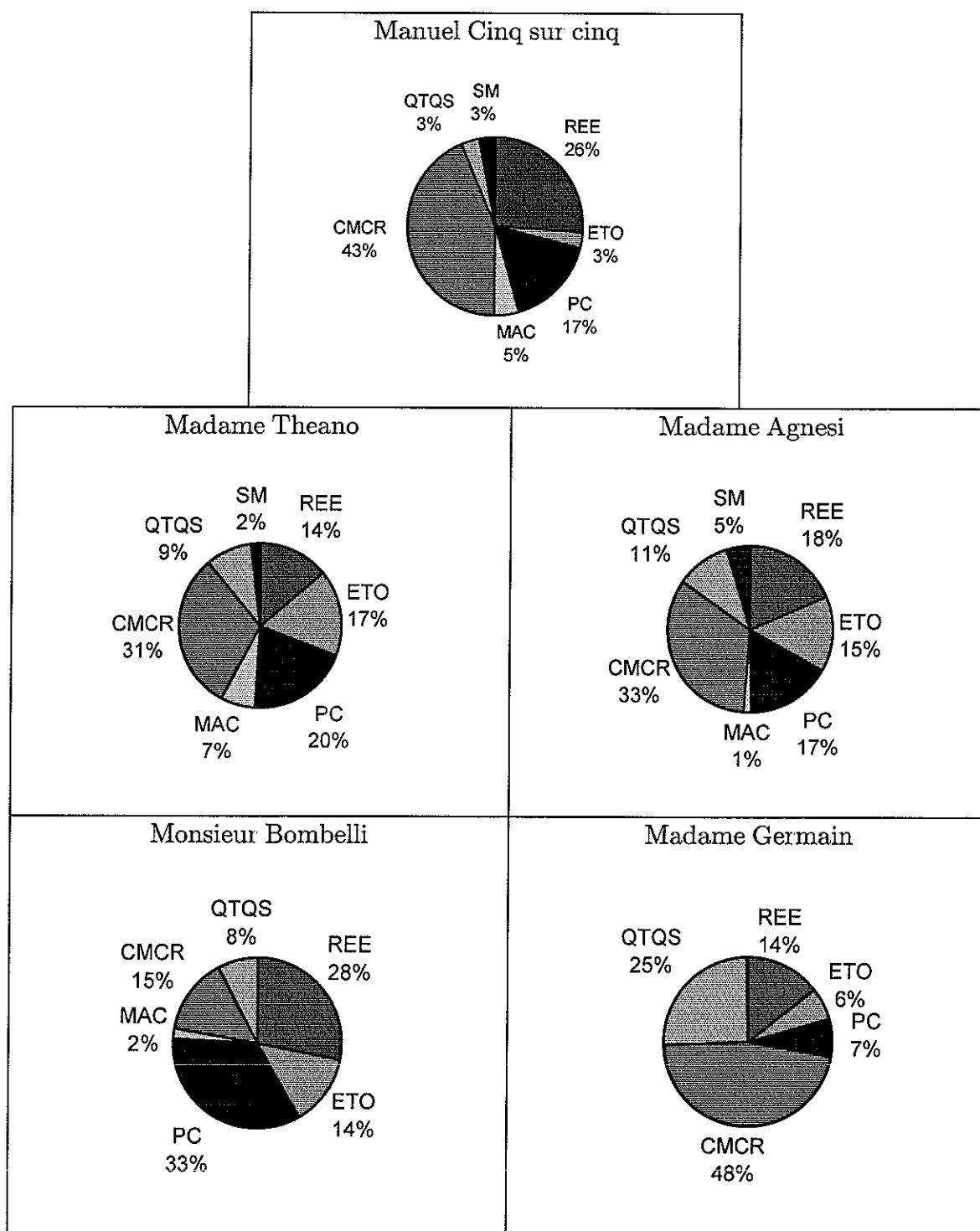
Répartition des catégories d'activités dans les cinq séquences

Nous avons simplement reporté les pourcentages de chaque catégorie d'activités dans chacune des séquences.

Tableau 24. Répartition en pourcentage des catégories d'activités dans les cinq séquences

Catégories d'activité	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
REE	26 %	14 %	18 %	28 %	14 %
ETO	3 %	17 %	15 %	14 %	6 %
PC	17 %	20 %	17 %	33 %	7 %
MAC	5 %	7 %	1 %	2 %	0 %
CMCR	43 %	31 %	33 %	15 %	48 %
QTQS	3 %	9 %	11 %	8 %	25 %
SM	3 %	2 %	5 %	0 %	0 %

Les histogrammes rendent mal compte de la répartition, surtout pour la comparaison. Nous avons donc réalisé des graphiques circulaires en indiquant les pourcentages correspondant à chaque secteur.



Graphique 5. Répartition des catégories d'activités des cinq séquences

Ces graphiques permettent de comparer la répartition des catégories d'activités. Leur allure générale montre une certaine ressemblance entre les choix des auteurs du manuel et ceux de Madame Agnesi et de Madame Theano. Les graphiques de Monsieur Bombelli et de Madame Germain sont très différents des autres.

Commençons par les trois graphiques ressemblants. On constate, pour les activités de calcul (PC, MAC et CMCR), une répartition analogue dans ces trois

séquences. Les professeurs induisent moins de calcul mental ou raisonné que le manuel mais plus d'activité de questionnement théorique. Les choix de Madame Theano, de Madame Agnesi et des auteurs du manuel se distinguent principalement par l'importance accordée aux révisions de l'école élémentaire (REE) et à l'élaboration de la technique opératoire (ETO). Leur somme est analogue dans les trois cas mais les auteurs privilégient nettement les révisions à l'élaboration de la technique opératoire ce qui n'est pas le cas des professeurs.

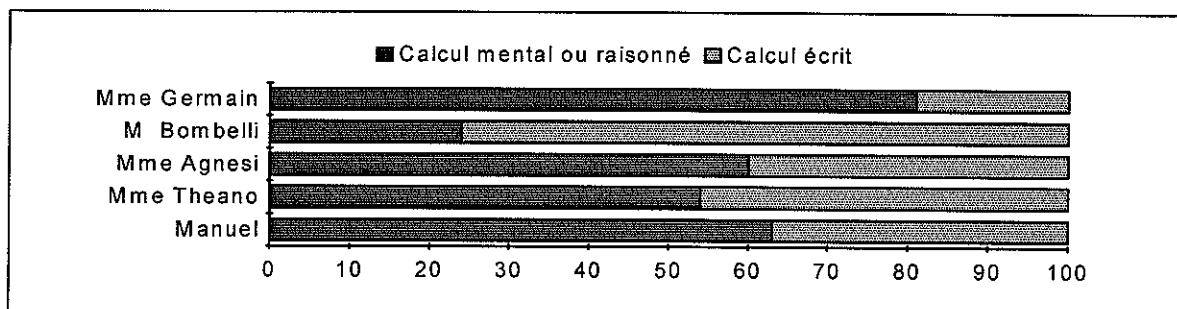
La répartition des types d'activités dans la séquence de Monsieur Bombelli est très différente. Les secteurs des deux catégories d'activités REE et PC sont comparables et couvrent 60% de la surface du disque, alors qu'ils n'en couvrent qu'un tiers pour les deux collègues précédents et environ deux cinquièmes pour le manuel. Les activités d'élaboration de la technique opératoire prennent une place analogue à celle qui lui est réservée par Madame Agnesi et Madame Theano. En conséquence, le calcul mental ou raisonné prend une part bien moins importante dans la classe de Monsieur Bombelli.

Le graphique de Madame Germain est, lui aussi, très particulier. Ses choix semblent opposés à ceux de Monsieur Bombelli. Les trois quarts du disque sont couverts par les activités de calcul mental ou raisonné et celles de questionnement théorique. Le pourcentage des activités de révisions des acquis de l'école élémentaire est analogue à ceux de Madame Theano et de Madame Agnesi. En revanche, le calcul écrit obtient une place bien moins importante que dans les autres séquences. Il en est de même des activités d'élaboration de la technique opératoire mais rappelons que Madame Germain est le seul des quatre professeurs qui termine la séquence par la technique opératoire. La chronologie montrera bien comment ce choix est radicalement différent chez Madame Germain : dans sa classe, on n'établit pas la technique pour l'appliquer et/ou l'étudier ensuite mais on travaille les propriétés de la multiplication pour en venir à la technique opératoire.

Le premier bilan que l'on peut donc tirer de cette étude des répartitions des catégories d'activités est que les professeurs ont fait des choix convergents quant à l'étude des situations multiplicatives (sauf Madame Agnesi), aux révisions de l'école élémentaire (sauf Monsieur Bombelli), à l'élaboration de la technique opératoire (sauf Madame Germain), à l'utilisation de la calculatrice (sauf Madame Theano) et au questionnement plus théorique (sauf encore Madame Germain). Nous allons montrer que l'hypothèse de cohérence, pour un professeur expérimenté, entre le scénario prévu et le déroulement permet d'interpréter chacune de ces exceptions. Ainsi, dans la classe de Madame Agnesi la proportion légèrement plus importante d'activité de résolution de problèmes issus de situations multiplicatives est liée à l'introduction de la multiplication par une succession de petits problèmes de prix. Monsieur Bombelli a choisi de présenter la technique opératoire puis de la faire appliquer dans des exercices techniques ou non en s'appuyant complètement sur le manuel. Dans cette présentation, le cas de la multiplication d'un décimal par un entier n'est pas supposé connu, il est intégré à celui où les deux facteurs sont décimaux. Comme dans le livre, les exercices techniques ou issus d'une situation multiplicative portent souvent sur le cas du

produit d'un décimal par un entier, ils ont été codés comme des exercices de révision (REE_d×n et REE_SM). Les élèves de Madame Theano ont, plus que les autres, eu l'occasion d'utiliser leur calculatrice. Rappelons que dans la stratégie de ce professeur, la technique opératoire est conjecturée à l'aide d'une comparaison des résultats fournis par l'utilisation de la calculatrice et des ordres de grandeur. Enfin, les élèves de Madame Germain ont eu à la fois peu d'activités d'élaboration de la technique opératoire et beaucoup de questionnement théorique. La stratégie de ce professeur était de cumuler au cours de la séquence des propriétés de la multiplication pour parvenir à l'élaboration de la technique. Elle explique cette particularité de la répartition des activités effectives des élèves.

Le second bilan porte sur les activités de calcul : les choix sont variés, Madame Theano et Madame Agnesi ont une répartition du calcul écrit par rapport au calcul mental ou raisonné assez équilibrée, en faveur toutefois du calcul mental. Cette répartition correspond à celle du manuel. En revanche, Monsieur Bombelli privilégie nettement les activités de calcul écrit alors que Madame Germain fait exactement le contraire. Le graphique suivant montre bien ces choix différents.



Graphique 6 Répartition des activités entre le calcul mental ou raisonné et le calcul écrit

Si l'on se rappelle que Monsieur Bombelli propose des mises en fonctionnement de la technique opératoire après l'avoir élaborée en classe alors que Madame Germain construit patiemment des propriétés de la multiplication pour aboutir à la technique opératoire, on comprend alors que le premier professeur donne plus d'importance au calcul écrit que le second. Nous pointons ici encore, pour ces deux professeurs, des traces de la cohérence entre le scénario prévu et les activités effectives des élèves. L'examen des activités de calcul, très variées, mérite d'être approfondi pour affiner les analyses.

Le calcul écrit, le calcul mental ou réfléchi, répartition des activités

La diversité des choix concernant le calcul, est difficilement interprétable en tenant compte des scénarios prévus sans affiner l'analyse. Nous allons dans un premier temps comparer les répartitions des activités de calcul écrit dans les différentes séquences puis, dans un second temps, nous nous attacherons à la comparaison des activités de calcul mental ou réfléchi.

Le calcul écrit, des choix communs aux enseignants observés

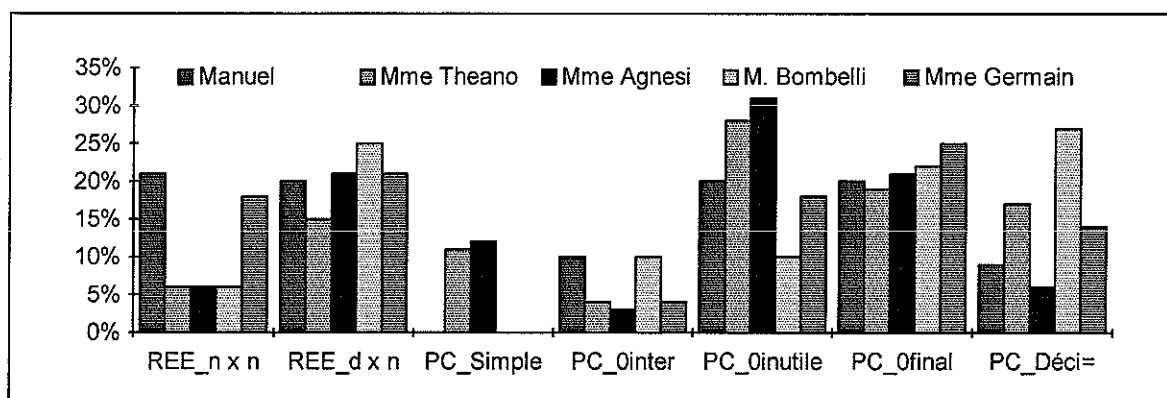
Comme nous venons de le constater, l'importance de la catégorie PC (c'est elle qui regroupe les activités de calcul écrit) est très différente dans les séquences de Monsieur Bombelli et de Madame Germain mais analogue dans celles de Madame Agnesi, de Madame Theano et du manuel. Pour approfondir ces premiers résultats concernant les choix des enseignants à propos des activités de calcul écrit, nous allons étudier leur répartition. Afin de prendre en compte toutes les activités de calcul écrit nous ajouterons, à celles qui constituent la catégorie PC, deux activités de révision de l'école élémentaire : le calcul du produit de deux entiers et celui d'un décimal par un entier. Voici la répartition obtenue.

Tableau 25. Répartition des activités de calcul écrit

Activités	Manuel	Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain
REE_n×n	21 %	6 %	6 %	6 %	18 %
REE_d×n	20 %	15 %	21 %	25 %	21 %
PC Simple	0 %	11 %	12 %	0 %	0 %
PC_0inter	10 %	4 %	3 %	10 %	4 %
PC_0inutile	20 %	28 %	31 %	10 %	18 %
PC_0final	20 %	19 %	21 %	22 %	25 %
PC_Déci=	9 %	17 %	6 %	27 %	14 %

Dans la colonne " Activités " de ce tableau, nous avons commencé par les activités dont la difficulté éventuelle ne concerne pas directement la multiplication de deux décimaux : REE_n×n et REE_d×n (le calcul du produit de deux entiers et d'un décimal par un entier), PC_Simple puis PC_0inter (calcul du produit de deux décimaux sans difficulté identifiée puis où le multiplicateur comporte un zéro intercalaire). Nous avons placé ensuite les activités dont la difficulté porte plus spécifiquement sur le calcul du produit de deux décimaux : PC_0inutile (3,14×2,5), PC_0final (3,1×2,80) et PC_Déci= (3,14×2,82)

Afin de faciliter l'analyse de ce tableau, nous avons dressé l'histogramme correspondant.



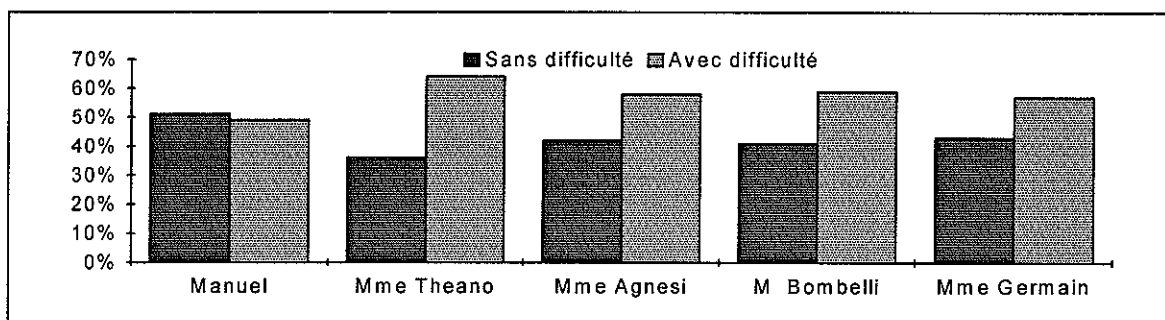
Graphique 7. Répartition des activités de calcul écrit dans les cinq séquences

Comparons d'abord les trois premières barres de chaque activité qui concernent respectivement les séquences du manuel, de Madame Theano et de Madame Agnesi. Les séquences des auteurs et de ces deux professeurs, rappelons-le,

présentaient un pourcentage analogue d'activités de calcul écrit (PC). On constate une nouveauté quant à la divergence de ces professeurs avec le manuel concernant les révisions : elle ne porte, en fait, que sur le calcul du produit de deux entiers. On constate en outre une différence concernant les activités de calcul du produit de deux décimaux ne présentant pas de difficulté spécifique. Notre interprétation de ces trois derniers résultats est que les deux professeurs ont préféré proposer des applications simples de la règle de la virgule pour, par la même occasion, faire réviser la technique de la multiplication des entiers.

Ce choix semble être aussi celui de Monsieur Bombelli bien qu'il ait proposé des calculs avec un zéro intercalaire au multiplicateur plutôt que sans difficulté spécifique. Dans la séquence de Madame Germain, les activités sans difficulté technique (PC_Simple) et les calculs où le multiplicateur possède un zéro intercalaire (PC_0inter, $3,14 \times 2,08$) n'ont pas d'intérêt puisque ce professeur ne propose pas d'entraînement à la technique opératoire.

En regroupant, d'une part, les activités qui ne posent pas de difficulté spécifique quant à la multiplication de deux décimaux²⁶⁶ et, d'autre part, celles qui en posent²⁶⁷, on aboutit à une convergence de choix des quatre professeurs, c'est ce qu'illustre le graphique suivant.



Graphique 8. Calcul écrit avec ou sans difficulté spécifique à la multiplication des décimaux

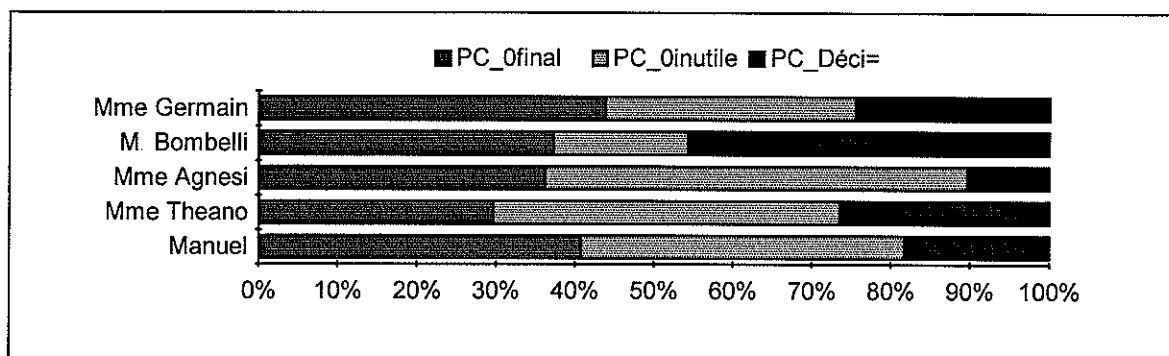
Cette convergence des professeurs, qui les distingue des auteurs du manuel, montre la préférence des enseignants pour les exercices qui posent des difficultés spécifiques aux savoirs en cours d'apprentissage. Il ne nous semble pas qu'il faille trouver là le signe d'une différence de niveau entre les séquences observées et celle du manuel. Il nous semble plutôt que les professeurs choisissent des tâches qui permettent, à cause des difficultés qu'elles provoquent, un questionnement des élèves favorable aux apprentissages.

Selon cette hypothèse, les choix des professeurs parmi les calculs écrits qui posent des difficultés spécifiques à la multiplication de deux décimaux sont intéressants à comparer. Les activités PC_0inutile ($3,14 \times 2,5$) et PC_0final ($3,1 \times 2,80$) comportent toutes les deux le fait de placer la virgule à un produit dont le chiffre des unités est un zéro qui devient "inutile". L'activité PC_Déci = ($3,14 \times 2,82$) comporte le fait de placer la virgule à un produit alors que celles des

²⁶⁶ REE_n×n (314×28), REE_d×n ($3,14 \times 28$), PC_Simple ($3,14 \times 2,8$) et PC_0inter ($3,14 \times 2,08$)

²⁶⁷ PC_0inutile ($3,14 \times 2,5$), PC_0final ($3,1 \times 2,80$) et PC_Déci = ($3,14 \times 2,82$)

facteurs sont disposées comme dans le cas d'une addition. Voici la répartition de ces trois activités.



Graphique 9. Répartition des calculs avec difficulté spécifique à la multiplication des décimaux.

Le graphique montre que Monsieur Bombelli est le seul professeur à ne pas consacrer plus de 70% des activités des élèves à la difficulté d'application de la règle de la virgule lorsque le nombre de décimales du produit n'est pas égal à la somme des nombres de décimales des facteurs (PC_Final ou PC_Inutile). Madame Agnesi est le seul professeur à consacrer moins de 10% des activités des élèves à la confusion éventuelle entre la règle de la virgule de l'addition et celle de la multiplication qui est favorisée dans le cas où les facteurs ont le même nombre de décimales (PC_Déci=). Madame Theano et Madame Germain, ont une répartition équivalente de ces deux difficultés spécifiques à la multiplication des nombres décimaux : environ trois quarts des activités relèvent de la première difficulté et un quart relève de la seconde. Cette répartition est pratiquement identique à celle du manuel.

Avant de tirer des conclusions de ces constats, il sera prudent de les croiser avec ceux qui concernent les activités de calcul mental ou de calcul raisonné. En effet, nous avons remarqué que certains exercices de calcul raisonné du manuel, qui ont été proposés par les professeurs, portent précisément sur ces difficultés spécifiques à la multiplication des nombres décimaux.

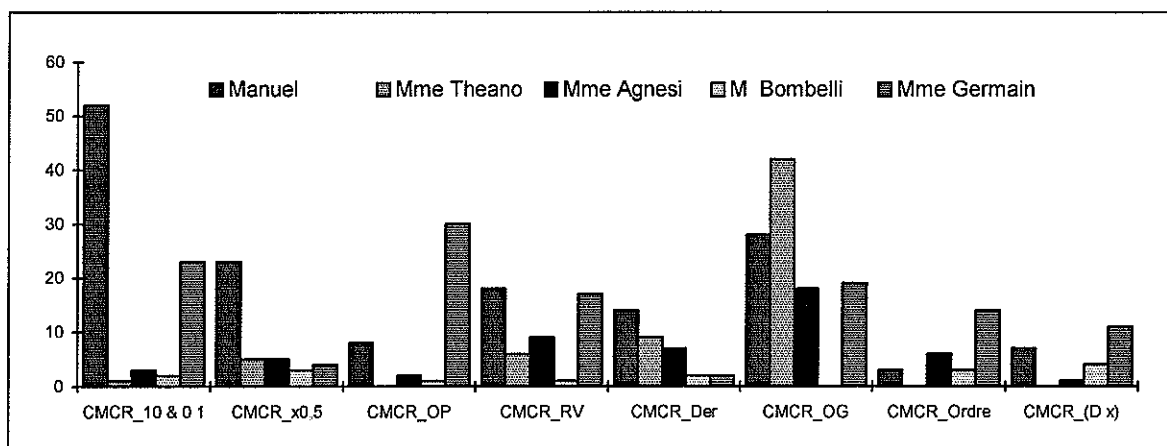
Le calcul mental ou réfléchi, cohérence avec le projet d'enseignement

Pour analyser plus facilement les effectifs des activités de calcul mental et de calcul raisonné qui sont très nombreuses ainsi que leur répartition, nous avons regroupé celles qui sont assez proches. Nous avons noté "CMCR_10 & 0,1" le calcul du produit ou d'un quotient d'un décimal par 10, 100, 1 000... ainsi que le produit d'un décimal par 0,1, 0,01, 0,001... Nous avons noté CMCR_OG les activités qui mobilisent les ordres de grandeur (Vrai ou faux ? $3,4 \times 2,5 = 0,85$, Placer la virgule au résultat : $3,4 \times 2,5 = 85$) et CMCR_Ordre les activités qui lient la multiplication et la comparaison ou les encadrements (Vrai ou Faux ? $3,1 \times 0,3 < 3,1 \times 0,4$, Vrai ou faux ? $3,4 \times 2,5 < 6$). Les effectifs obtenus sont les suivants.

Tableau 26. Effectifs des activités de calcul mental ou de calcul raisonné

Activités de calcul mental ou réfléchi	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
CMCR_10 & 0,1	52	1	3	2	23
CMCR_×0,5	23	5	5	3	4
CMCR_OP	8	0	2	1	30
CMCR_RV	18	6	9	1	17
CMCR_Der	14	9	7	2	2
CMCR_OG	28	42	18	0	19
CMCR_Ordre	3	0	6	3	14
CMCR_(D,×)	7	0	1	4	11
Total	153	63	51	16	120

L'histogramme des effectifs de ces activités facilite la lecture du tableau.



Graphique 10. Effectifs des activités de calcul mental ou réfléchi

L'allure globale du graphique indique des écarts très importants entre les effectifs des différentes activités qui montrent des choix nettement affirmés de la part des auteurs du manuel comme des professeurs que nous avons observés.

Ainsi les auteurs du manuel, comme Madame Germain, accordent une place importante aux activités de multiplication par 10 ou 0,1 qui lient l'écriture décimale à la multiplication. Madame Germain anime aussi de nombreuses activités liées à l'application d'opérateurs ($\times 10$, $\div 10$, $\times 100$, $\div 100$...) aux facteurs d'un produit. Le choix de ce professeur, de privilégier ces deux activités, doit être relié au projet de sa séquence : rappelons que la technique opératoire va être établie en décomposant les facteurs décimaux sous la forme du produit d'un entier par une puissance négative de dix écrite sous la forme 0,0...1. Nous constatons à nouveau une cohérence entre les activités des élèves encadrées durant la séquence et le projet d'apprentissage élaboré par l'enseignant. Mais, *a contrario*, comme nous l'avons déjà remarqué, nous ne pouvons pas formuler un tel constat pour la séquence du manuel où la technique opératoire est établie à l'aide des opérateurs alors que l'activité de calcul correspondante est très peu présente. Ainsi, nous pouvons compléter le constat amorcé lors de l'analyse des effectifs des catégories d'activités du manuel : l'élaboration de la technique opératoire occupe une place très faible et les activités de calcul raisonné (CMCR_OP, sachant $314 \times 3 = 942$ en déduire $3,14 \times 3 = ?$) qui auraient pu en renforcer sa compréhension ne sont pas

proposées. Cette absence confirme l'hypothèse que nous avons émise : les auteurs du manuel proposent une séquence où l'apprentissage de la technique opératoire est le fruit d'un entraînement plutôt que de la compréhension de ses fondements.

Les activités qui mobilisent les ordres de grandeur sont très présentes dans toutes les séquences, exceptée celle de Monsieur Bombelli. Nous constatons à nouveau l'importance particulière qui lui est accordée par Madame Theano, en cohérence avec son projet d'enseignement : rappelons que ce professeur fait conjecturer puis admettre la règle de la virgule par comparaison des résultats obtenus à la calculatrice et en utilisant les ordres de grandeur.

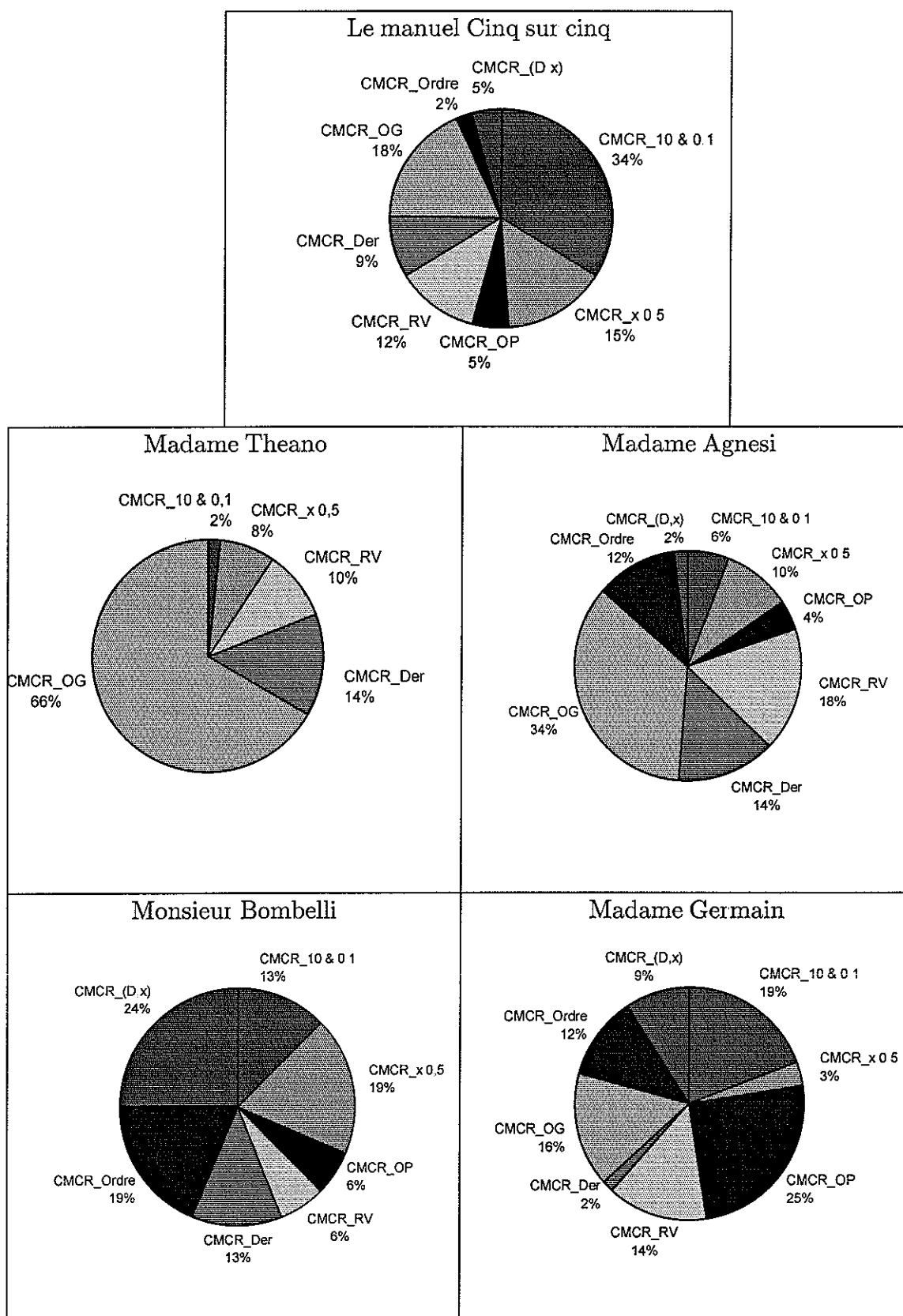
En ce qui concerne les autres activités de calcul mental ou réfléchi, leurs effectifs sont trop faibles pour pouvoir être comparés. On constatera simplement que Madame Germain, conformément à son projet d'enseignement, provoque de nombreuses activités liées aux propriétés de la multiplication (propriétés liées à l'ordre et propriétés algébriques). On remarquera enfin que les techniques de calcul mental pour déterminer le produit d'un décimal par 0,5, 0,2 ou 0,25 sont traitées de façon analogue par les quatre professeurs qui leur consacrent de trois à cinq activités dans toute la séquence alors que le manuel leur en consacre cinq fois plus.

Afin de compléter ces analyses, nous allons examiner les fréquences en pourcentage des activités de calcul mental ou raisonné dans chacune des séquences.

Tableau 27. Fréquences des activités de calcul mental ou de calcul raisonné

Activités de calcul mental ou réfléchi	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
CMCR 10 & 0,1	34%	2%	6%	13%	19%
CMCR $\times 0,5$	15%	8%	10%	19%	3%
CMCR OP	5%	0%	4%	6%	25%
CMCR RV	12%	10%	18%	6%	14%
CMCR Der	9%	14%	14%	13%	2%
CMCR OG	18%	66%	34%	0%	16%
CMCR Ordre	2%	0%	12%	19%	12%
CMCR (D, \times)	5%	0%	2%	24%	9%

Ce tableau fait apparaître des différences importantes entre les séquences que nous pourrions apprécier plus facilement à l'aide de représentations graphiques.



Graphique 11. Répartition des activités de calcul mental ou réfléchi dans les cinq séquences

Ces nouvelles données permettent de renforcer l'analyse précédente et de rajouter quelques éléments.

Une confirmation de la cohérence des activités de calcul mental ou raisonné avec le projet du professeur apparaît dans les diagrammes des séquences de Madame Theano et de Madame Germain.

On remarque aussi cette cohérence dans le graphique de la séquence de Madame Agnesi qui souhaitait traiter l'ensemble de façon assez homogène : les techniques de calcul mental (multiplication par une puissance de dix ou par un décimal particulier comme 0,5, 0,25 ou 0,2), l'utilisation de la règle de la virgule, des ordres de grandeurs ou des propriétés de la multiplication occupent des parts assez importantes du diagramme. Seules les activités liées à l'utilisation d'opérateurs sont rares.

Le graphique de Monsieur Bombelli fait apparaître l'importance réservée aux techniques de calcul mental (32%) mais aussi aux activités liées aux propriétés de la multiplication (43%). Il semble qu'après avoir exposé et prouvé la technique opératoire, après l'avoir fait appliquer par des activités de calcul écrit, après avoir abordé les techniques de calcul mental, le professeur ait jugé important d'évoquer les propriétés de l'opération, avec une préférence pour les propriétés algébriques. Sans doute faut-il voir là un complément plus "mathématique" à cette séquence considérée par le professeur comme étant d'un niveau très élémentaire...

Pour terminer, on remarquera la proportion identique donnée par tous les professeurs, à l'exception de Madame Germain, à l'utilisation du dernier chiffre du produit pour vérifier un résultat. Cette propriété est un moyen souvent utilisé pour montrer aux élèves qu'un nombre décimal ne peut pas être le produit attendu. Madame Agnesi l'a utilisé pour attirer l'attention de ses élèves sur le fait que le nombre affiché par la calculatrice n'est pas toujours la valeur exacte du produit, par exemple lorsqu'elle la tronque, faute de pouvoir afficher toutes les décimales.

L'analyse des activités de calcul écrit a révélé une hétérogénéité des effectifs dans les séquences mais aussi des choix convergents des quatre professeurs sur la répartition de ces activités entre celles qui soulèvent des difficultés spécifiques à la multiplication de deux nombres décimaux et celles qui n'en soulèvent pas. Cette répartition est donc indépendante du scénario. En revanche, l'étude des activités de calcul mental ou raisonné montre une cohérence entre leur répartition et le projet du professeur. Mais ce n'est pas le cas pour le manuel dans lequel les activités de calcul liées à l'élaboration de la technique opératoire sont très peu nombreuses.

Il semble donc que les activités de calcul écrit doivent être perçues plutôt comme des applications de la technique opératoire, et comme sources éventuelles de questionnement relatif à la règle de la virgule alors que certaines activités de calcul mental ou raisonné permettraient aux élèves d'accéder à une réflexion et à des recherches davantage liées au projet d'apprentissage du professeur. Sous cette hypothèse, compte tenu des scénarios de ces deux professeurs, les activités de recherche devraient être prépondérantes dans la séquence de Madame Germain et minoritaires dans celle de Monsieur Bombelli. C'est ce que nous nous proposons de

vérifier pour terminer cette analyse des effectifs des activités des élèves. Qu'en est-il, à ce sujet, pour les séquences de Madame Theano et de Madame Agnesi ? Les deux professeurs ont élaboré une progression analogue où la technique opératoire est établie après quelques activités (utilisation des ordres de grandeur pour Madame Theano et de conversions pour Madame Agnesi) puis elle est appliquée et questionnée lors d'activités de calcul mental ou raisonné. Impossible *a priori* de savoir laquelle des deux séquences est la plus riche en activités de recherche.

Application d'une technique ou activités de recherche

Nous avons classé les quarante-deux activités en trois nouvelles catégories. Dans la première figurent les activités qui sont clairement des applications d'une technique. Dans la deuxième, nous avons rassemblé les activités qui mettent les élèves en situation de questionnement ou de recherche. La dernière catégorie est composée des activités qui ne classent pas selon l'un des deux critères ²⁶⁸.

A partir de ce classement, nous avons pu calculer les effectifs des deux catégories d'activités dans les cinq séquences, celle du manuel et celles des quatre professeurs observés. Nous avons résumé les résultats dans le tableau suivant.

Tableau 28. Effectifs des activités " d'application " ou de " recherche "

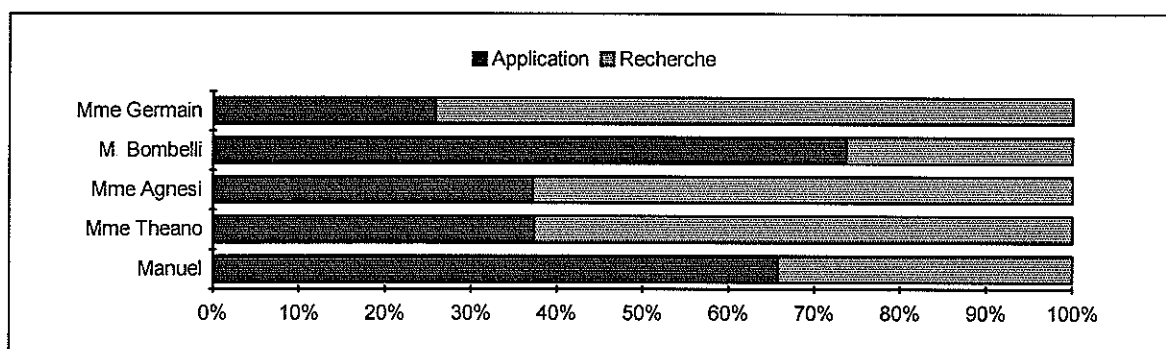
Activités mathématiques	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
Application	167	59	42	56	55
Recherche	87	99	71	20	158

Le premier fait qui apparaît à la lecture de ce tableau est que le nombre d'activités de la catégorie " application " est pratiquement le même pour tous les professeurs. En revanche on remarque une très grande diversité du nombre d'activités de la catégorie " recherche ". Tout ce passe comme si les professeurs avait trouvé un consensus sur le nombre d'exercices d'application que les élèves devaient résoudre pour faire le tour de la question traitée dans la séquence, cela compte tenu des contraintes des instructions officielles. Le nombre d'activités où les élèves se trouvent en situation de questionnement ou de recherche dépend des enseignants.

Ce critère nous semble important au regard des apprentissages car, rappelons-le, un des objectifs de l'enseignement est bien que les élèves apprennent à résoudre des problèmes et, en particulier, ceux qu'ils n'ont jamais rencontrés auparavant. Sous cette hypothèse, les activités de recherche nous semblent fondamentales pour que les élèves apprennent à résoudre des problèmes.

²⁶⁸ Dans la catégorie " application ", nous avons regroupé les dix activités suivantes : REE_ $\times/10$...0 ; REE_ $d \times n$; REE_ $n \times n$; les activités de la catégorie PC ; CMCR_ $\times 0,0$...1 et CMCR_ $\times 0,5$. Dans la catégorie " recherche ", nous avons regroupé les vingt-cinq activités suivantes : les activités de la catégorie ETO à l'exception de ETO_FI et ETO_P ; les activités du catégorie QTQS et SM ; CMCR_ $\times et <$; CMCR_ $< >$; CMCR_(D, \times) ; CMCR_OP ; CMCR_RV ; CMCR_DOG ; CMCR_UOG Dans la dernière catégorie, il en reste sept : REE_Voca ; REE_D ; REE_SM ; ETO_FI ; ETO_P ; CMCR_Der ; MAC.

Comme nous l'avions envisagé, Monsieur Bombelli et Madame Germain animent des séquences très différentes à ce sujet. Le graphique suivant montre la répartition des deux catégories dans les cinq séquences.



Graphique 12. Répartition des activités d'application ou de recherche

Ainsi Madame Germain consacre 25% des activités aux applications alors que Monsieur Bombelli en consacre 75%. La répartition des activités de la séquence de ce dernier professeur est proche de celle du manuel qui propose 66% d'activité d'application. Madame Theano et Madame Agnesi animent des séquences différentes de celles du manuel et tout à fait équivalente de ce point de vue : 34% des activités sont consacrées aux applications.

Conclusion : les catégories d'activités différencient les déroulements

L'analyse des effectifs des activités regroupées par catégories confirme le peu d'importance accordée aux situations multiplicatives dans les cinq séquences. Nous avons déjà montré que les contraintes de temps peuvent expliquer pour une grande part le choix d'un enseignement décontextualisé de la multiplication des décimaux dans cette séquence qui lui est spécifiquement consacrée.

Dans la séquence du manuel, la part réservée à l'élaboration de la technique opératoire est très faible et les activités de calcul mental ou raisonné qui permettraient de renforcer l'acquisition de ses fondements (celles qui reposent sur l'utilisation d'opérateurs) ne sont pas proposées. Cette faible part s'explique en partie par le nombre important d'exercices d'application technique. Dans l'ensemble de la séquence, les auteurs ont privilégié les révisions des acquis de l'école élémentaire ainsi que les techniques de calcul, qu'il soit écrit ou mental. Quelques rares exercices induisent des activités où les élèves sont en situation de recherche ou de questionnement. L'ensemble des activités attendues des élèves est cohérent avec la stratégie des auteurs du manuel : ils proposent un enseignement précoce et limité de la technique opératoire suivi d'un entraînement technique important assorti de quelques activités de recherche.

La répartition des activités concernant les révisions de l'école élémentaire, l'élaboration de la technique opératoire, l'utilisation de la calculatrice et la résolution de problèmes issus de situations multiplicatives est analogue pour trois professeurs sur quatre (ce n'est pas le même à chaque fois). Invariablement, nous

pouvons interpréter l'exception comme une trace de la cohérence entre la séquence animée par le professeur et son projet initial.

Le bilan est plus hétérogène en revanche sur les activités de calcul écrit, de calcul mental ou raisonné et de questionnement plus théorique. Deux professeurs, Monsieur Bombelli et Madame Germain, semblent se situer à des pôles opposés alors que Madame Theano et Madame Agnesi occuperaient une position plus médiane. Ces différences reflètent les choix concernant la place du calcul et du questionnement dans les scénarios. Cette disposition des professeurs rejoint celle que nous avons constatée en considérant le nombre d'activités effectives de la séquence. Ainsi, pour les professeurs observés, plus les activités effectives des élèves sont nombreuses, plus ces élèves ont été en situation de recherche.

Nous constatons cependant deux choix analogues pour les quatre professeurs. Le nombre d'activités d'applications techniques est pratiquement identique dans les quatre séquences. En ce qui concerne le calcul écrit, si les exercices comportant des difficultés de calcul spécifiques à la multiplication des nombres décimaux sont choisis de façon variée d'un professeur à l'autre, on constate cependant un véritable consensus sur la répartition entre les exercices qui ne comportent pas de difficulté spécifique et ceux qui en comportent : ces derniers représentent environ 60% des exercices proposés. Et cette répartition n'est pas celle du manuel qui réserve des parts identiques à ces deux catégories d'exercices. Les professeurs insistent donc, en classe, sur les sources de difficulté pour les élèves. Sans doute pensent-ils ainsi mieux les aider à les surmonter.

4. Analyse chronologique des activités effectives

Comme nous l'avons déjà indiqué, la chronologie des activités est également un choix déterminant sur les apprentissages des élèves. Son étude peut montrer des traces des contraintes de temps liées au métier de l'enseignant ainsi que de la cohérence entre le scénario prévu par le professeur et les activités effectives des élèves en classe. Cette étude est l'objet du paragraphe suivant.

Un complément méthodologique : comment rendre compte de la chronologie

Comme nous l'avons indiqué, pour rendre compte de la chronologie d'une séquence, nous n'avons pas procédé à un chronométrage du déroulement mais à un repérage des activités des élèves dans le temps. C'est la méthode pour effectuer ce repérage que nous voulons détailler ici.

Découpage "pédagogique" des séquences observées

Nous avons montré que la stratégie d'enseignement d'une séquence possède à la fois au moins deux fonctions, l'une est pédagogique et l'autre est professionnelle. La première de ces fonctions est de construire une progression des apprentissages qui soit adaptée à la classe et qui respecte la prescription plus globale des programmes officiels. Une telle progression est fondée sur des arguments de natures différentes qui forment un ensemble cohérent pour chaque professeur mais qui peut varier d'un professeur à l'autre. Ces arguments sont de nature

épistémologique, didactique, psychologique, sociologique, ergonomique... Rappelons que nous ne cherchons pas ici à reconstituer les arguments qui ont motivé les professeurs que nous avons observés quand ils ont élaboré puis animé le scénario de leur séquence mais seulement à analyser, par les activités effectives des élèves, le déroulement chronologique de leur séquence pour montrer des régularités et des variations éventuelles entre ces déroulements, ainsi que des traces de la cohérence admise, pour un professeur expérimenté, entre le projet élaboré et son animation en classe.

Afin de rendre compte de la progression choisie par chaque professeur, nous avons repéré, dans les narrations des séquences, des unités successives, chacune d'elle est définie par l'objectif d'enseignement visé par le professeur à ce moment du déroulement de la séquence.

Ces unités sont les *épisodes* du déroulement. Nous avons choisi d'appeler *épisode* ce que Marcel Postic²⁶⁹, qui travaille sur l'observation de situations éducatives appelle séquence car le mot séquence est déjà employé avec une autre signification en didactique des mathématiques et, en particulier, dans cette recherche. En citant Marcel Postic, nous entendons par épisode :

un enchaînement d'actes pédagogiques et d'échanges entre l'enseignant et les élèves en vue de parvenir à un but donné. Chaque *épisode* possède son unité propre par le but spécifique qu'il veut atteindre et il est une étape dans la progression globale vers le ou les objectifs de l'activité pédagogique.

Ainsi, c'est l'unité de l'objectif du travail mathématique qui nous a permis de délimiter les épisodes. Avec une telle définition d'un épisode, on obtient un enchaînement d'activités des élèves et du professeur qui vont le même sens pour réaliser un objectif d'apprentissage. La définition adoptée correspond globalement à celle que proposent Christophe Hache & Aline Robert pour analyser des pratiques effectives d'enseignants en classe de seconde²⁷⁰ :

Ceci nous permet de découper la séance en épisodes, chaque épisode étant défini, si possible par une seule activité des élèves, celle qui est attendue par l'enseignant à ce moment-là. Autrement dit, par exemple, s'il s'agit d'une phase de résolution d'exercice, un épisode correspond à une tâche prescrite, ou à plusieurs de même nature. S'il s'agit d'une phase d'exposition des connaissances, à un épisode correspond l'énoncé d'une seule propriété (ou définition).

Cette définition est un peu plus stricte que celle que nous avons proposée : lorsqu'un professeur propose trois exercices de révision de la somme vectorielle, Christophe Hache & Aline Robert comptent trois épisodes alors que nous n'en

²⁶⁹ POSTIC M. & DE KETELE J.-M. (1988), *Observer des situations éducatives*, Paris, PUF. Dans la citation suivante nous avons remplacé le terme séquence par épisode (en italique).

²⁷⁰ HACHE C. & ROBERT A. (1997), Analyse de pratiques effectives en classe de seconde, in *Recherches en didactique des mathématiques* 17/3 (103-150), Grenoble : La Pensée Sauvage [p. 118].

compterions qu'un²⁷¹. Cette différence n'est pas une divergence de notre part mais seulement une adaptation à une quantité plus importante de séances : Christophe Hache & Aline Robert ont étudié quatre séances alors que nous avons étudié quatre séquences c'est-à-dire quatorze séances.

Le découpage complet des séquences en épisodes figure dans leur narration. Comme dans le travail de Christophe Hache & Aline Robert, nous avons repéré chaque épisode par un titre qui rend compte de son objectif. Citons quelques exemples : utiliser les ordres de grandeur pour contrôler une multiplication, utiliser la règle de la virgule pour trouver des produits égaux, institutionnalisation de la technique opératoire, multiplier par 0,25 c'est diviser par 4.

Découpage chronologique des séquences observées

La chronologie des activités des élèves dans les séquences est rendue par un procédé de numérotation. Cette prise d'information possède une utilité double pour notre recherche. Elle nous permettra de comparer l'ordre dans lequel les élèves effectuent certaines tâches suivant leur professeur, cet ordre reflète le cheminement suivi par les élèves pour apprendre. Elle nous permettra aussi, quand nous analyserons l'adaptation des professeurs en classe, de comparer, pour chacun d'entre eux, ce cheminement avec la stratégie d'enseignement prévue durant la préparation des cours.

Afin de répondre à ce double objectif, il n'est pas nécessaire de chronométrer la séquence. Il suffit de décomposer la durée totale en différentes unités successives qui ont un sens par rapport à l'apprentissage. Dans cette étude chronologique, nous ne tenons donc pas compte de la durée réelle des activités. Nous avons choisi de reprendre l'épisode comme unité, d'une part parce que chacun d'eux possède un objectif pédagogique dominant et a donc un sens par rapport à l'apprentissage et, d'autre part, parce que les épisodes se succèdent et réalisent ainsi une partition ordonnée du déroulement de chaque séquence.

Codage des activités pour représenter graphiquement la chronologie

Au sein de chaque épisode, nous avons repéré les activités des élèves dans les narrations des séquences. Si une même activité est répétée plusieurs fois dans le même épisode, elle ne figure qu'une seule fois sur le graphique chronologique. Si deux activités différentes apparaissent dans le même épisode, nous n'avons pas toujours pu tenir compte de l'ordre chronologique de leur apparition car, pour certaines d'entre elles, leur chevauchement empêchait de les ordonner. Pour des raisons techniques liées au logiciel d'élaboration des graphiques utilisé²⁷², nous avons cependant été contraint de fixer un ordre, il conviendra donc, sur le graphique, de ne pas tenir compte de l'ordre concernant deux activités très proches chronologiquement.

Afin de porter les activités en ordonnée, nous avons attribué un numéro à chacune d'elle. Le nombre très faible des activités des catégories SM (résolution de

²⁷¹ *Ibid.* [p. 128].

²⁷² Microsoft Graph, version 3.

problèmes issus de situations multiplicatives) et MAC (utilisation de la machine à calculer) nous a conduit à les négliger dans l'analyse chronologique. Les graphiques chronologiques portent donc sur les cinq autres catégories d'activités : révisions de l'école élémentaire (REE), élaboration de la technique opératoire (ETO), calcul écrit (PC), calcul mental ou raisonné (CMCR) et questionnement plus théorique (QTQS). Voici, pour chaque catégorie, la numérotation adoptée²⁷³

Tableau 29. Numérotation des activités par catégorie

Code des activités	N° des activités
REE	11 à 16
ETO	21 à 28
PC	31 à 35
CMCR	40 à 49
QTQS	51 à 56

Nous allons présenter les graphiques obtenus sur lesquels chaque point représente un couple dont l'abscisse rend compte de la position dans la durée de la séquence et dont l'ordonnée est le numéro d'une activité. Les catégories d'activités sont séparées par des lignes parallèles à l'axe des abscisses, chaque graphique se présente donc sous la forme de cinq bandes horizontales ; chacune d'elle correspond à une catégorie d'activité.

Avant de présenter ces graphiques, nous allons indiquer deux enrichissements qui ont été portés et qui en facilitent l'analyse.

Deux moyens graphiques pour aider l'analyse

♦ L'organisation chronologique des séquences, définition des phases

L'observation de ces graphiques, et notamment de la bande correspondant aux activités d'élaboration de la technique opératoire ou de propriétés de la multiplication des décimaux, montre que les séquences comportent différentes phases. Nous en avons distingué cinq. Sur les graphiques, nous les avons indiquées par des bandes parallèles à l'axe des ordonnées, chaque phase est repérée par une lettre de A, B, C, D ou E sur l'axe des abscisses :

- la phase A (Phase préparatoire) commence au début de la séquence et se termine juste avant la première activité d'élaboration de la technique opératoire ou de propriétés de la multiplication (ETO). Ainsi, la phase A est celle où les professeurs posent des problèmes aux élèves à propos de leurs connaissances antérieures qui seront utiles pour la séquence ;

- la phase B (Première phase de construction des connaissances) commence avec la première activité de la catégorie ETO. Les activités de cette catégorie sont souvent proches dans le temps si bien que l'on peut distinguer, sur les graphiques, deux groupements de points de la bande ETO. La phase B se termine avec la dernière activité du premier groupement. Dans la phase B nous avons indiqué, par une ligne en pointillé parallèle à l'axe des ordonnées, l'apparition de la première

²⁷³ La numérotation complète des activités n'est pas utile à la lecture du graphique, elle figure en annexe.

activité de calcul écrit d'un produit de deux décimaux qui correspond au premier exemple étudié ;

- la phase C (Première phase d'entraînement) correspond à une succession d'épisodes où ne figurent plus de points dans la bande ETO sauf des exceptions isolées. Dans les différentes séquences, elle correspond à un entraînement où apparaissent de nombreuses activités de catégorie PC mais aussi, suivant les séquences, des activités des autres catégories ;

- la phase D (Deuxième phase de construction des connaissances) débute avec la première activité de la catégorie ETO du second groupement et se termine avec la dernière. C'est une phase analogue à la phase B ;

- la phase E (Deuxième phase d'entraînement) ne comporte plus d'activité de la catégorie ETO. Nous interprétons cette absence par le fait que toutes les connaissances qui "devaient" être institutionnalisées l'ont été. C'est une phase analogue à la phase C.

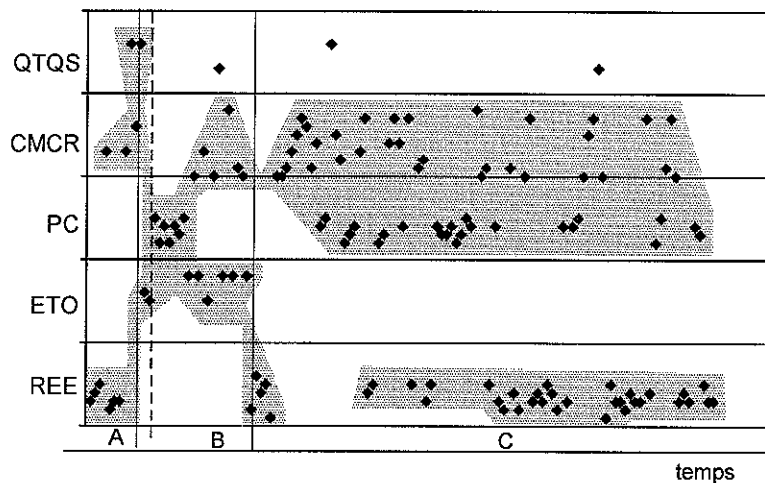
♦ *Des zones de variation des catégories des activités effectives*

Pour rendre compte des allers et retours ménagés par les professeurs (ou les auteurs) entre les différentes catégories d'activités, nous avons fait abstraction des points isolés et nous avons colorié dans chaque bande horizontale, les zones qui comportent des points. Les formes qui apparaissent alors sur les graphiques montrent l'organisation chronologique des catégories d'activités dans la séquence.

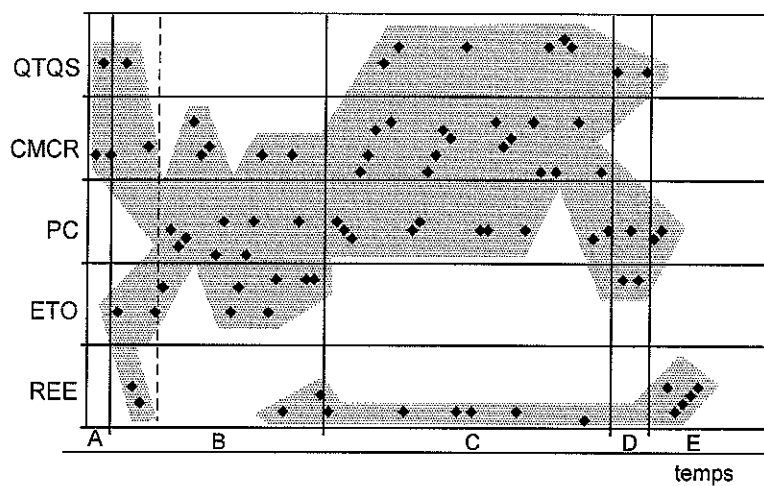
Résultats et analyse de la chronologie des séquences

Pour faciliter la lecture comparée des graphiques, nous les présentons sur une même double page.

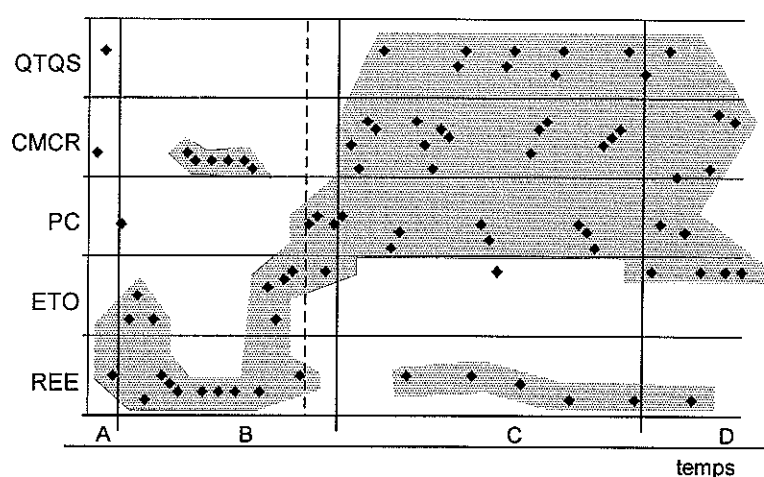
Présentation des graphiques chronologiques des cinq séquences



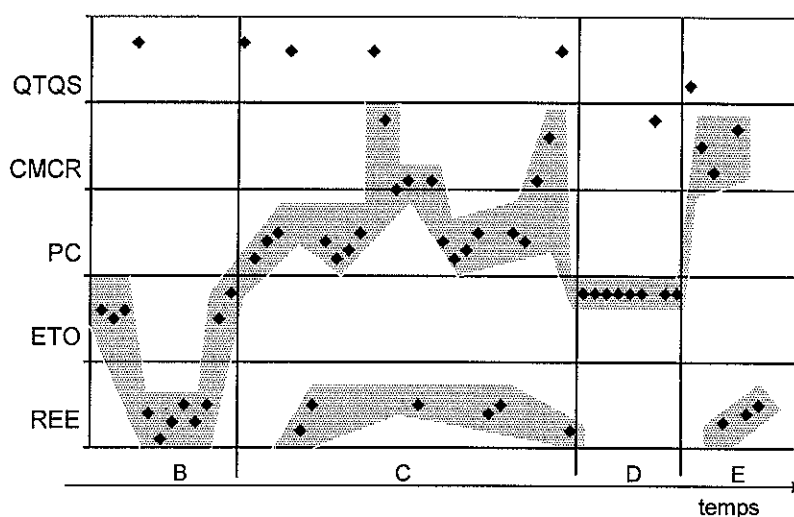
Graphique 12. Chronologie des activités induites dans la séquence du Manuel



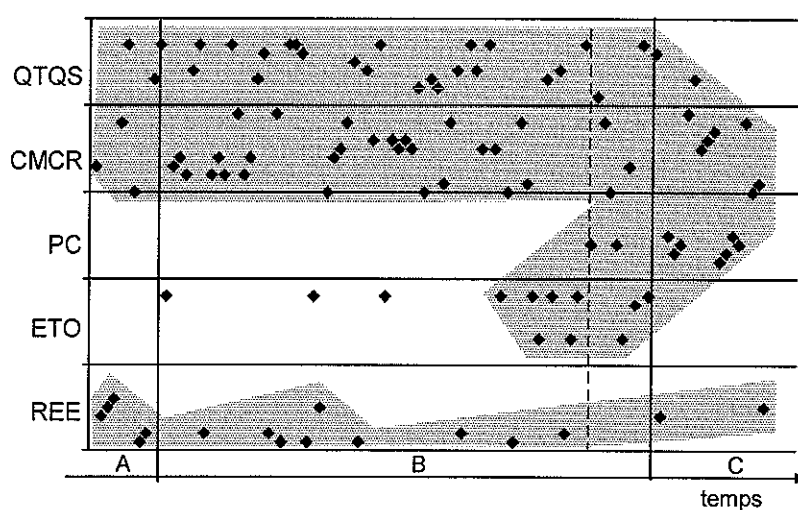
Graphique 13. Chronologie des activités de la séquence de Madame Theano (3h)



Graphique 14. Chronologie des activités de la séquence de Madame Agnesi (3h30)



Graphique 15. Chronologie des activités de la séquence de Monsieur Bombelli (2h30)



Graphique 16. Chronologie des activités de la séquence de Madame Germain (5h)

Les phases des séquences montrent des organisations chronologiques diverses

La séquence du manuel comporte, comme on pouvait l'attendre, trois phases qui sont d'ailleurs nettement indiquées par la maquette. La phase préparatoire comporte des révisions de l'école élémentaire accompagnées d'énoncés induisant des activités de calcul mental ou raisonné ainsi que des questionnements plus théoriques. La première phase de construction des connaissances est constituée des activités préparatoires et des pages destinées à "retenir" l'essentiel. Les énoncés de cette phase, par les exemples proposés, induisent principalement des activités des catégories ETO, PC et CMCR. Suit enfin la première phase d'entraînement qui est constituée par un éventail d'exercices. Comme nous l'avait déjà montré l'analyse des activités regroupées par catégories, le manuel propose très peu d'énoncés qui induisent des activités de questionnement. Sur les zones coloriées du graphique, la densité des points représentant les activités est assez élevée. On retrouve là l'importance du nombre d'activités induites par le manuel. On remarquera enfin que les révisions des acquis de l'école élémentaire ne sont pas limitées à la première phase mais sont réparties, de façon assez homogène, dans toute la phase d'entraînement.

Les graphiques des séquences de Madame Theano et de Madame Agnesi sont assez ressemblants. Ils présentent les quatre phases de A à D, celui de Madame Theano comporte aussi une phase E. Les durées de ces phases sont équivalentes, relativement à la durée totale de la séquence. Le coloriage des zones montre quelques différences entre les progressions des deux séquences.

La phase préparatoire de la séquence de Madame Theano comporte, comme dans le manuel, des activités des catégories CMCR et QTQS alors que celle de Madame Agnesi repose sur des révisions de l'école élémentaire (REE).

Dans la séquence de Madame Theano, les activités de calcul écrit (PC) apparaissent très rapidement alors que Madame Agnesi construit plus longuement la technique opératoire. On se rappellera que Madame Theano avait confronté très tôt ses élèves au problème de la multiplication de deux décimaux en leur proposant d'utiliser les ordres de grandeur et leur calculatrice pour constater la place de la virgule alors que Madame Agnesi leur avait soumis une suite d'exercices portant sur des situations de calcul de prix que les élèves pouvaient résoudre par des conversions d'unité de mesure. Ainsi, la répartition chronologique des activités de la première phase de construction des connaissances (B) est différente dans les deux séquences. Néanmoins, sur le graphique, la zone coloriée de la phase B couvre les quatre catégories REE, ETO, PC et CMCR, les activités des élèves sont donc diversifiées et de la même façon. Remarquons enfin que, dans ces deux séquences, la technique opératoire est élaborée tout en reprenant des acquis de l'année précédente.

Dans la deuxième phase de construction des connaissances (C), les deux professeurs proposent des tâches qui conduisent les élèves à des activités des catégories PC, CMCR et REE mais aussi, et cela contrairement au manuel, de la catégorie QTQS. La zone coloriée montre, dans les deux séquences, que les activités varient beaucoup au cours du temps.

La fin de la séquence de Madame Theano se répartit entre une courte deuxième phase de construction des connaissances (D) où les propriétés de la multiplication des décimaux sont institutionnalisées et une deuxième phase d'entraînement comprenant du calcul écrit et des révisions de l'école élémentaire. Madame Agnesi termine sa séquence par une seule phase D dont la durée est identique à celle des deux phases D et E de la séquence de Madame Theano. Cette phase comporte des activités de toutes les catégories : Madame Agnesi institutionnalise les propriétés de la multiplication et les illustre par des exemples en faisant participer les élèves.

L'examen du graphique chronologique de la séquence de Monsieur Bombelli montre une ressemblance avec les séquences du manuel, de Madame Theano et de Madame Agnesi mais il en fait figure de "squelette". La phase préparatoire qui était très courte dans les trois séquences précédentes est inexistante dans celle de Monsieur Bombelli. La première phase de construction des connaissances (B) est plus courte que celles des deux collègues de ce professeur et elle porte sur des activités de deux catégories seulement : ETO et REE. Comme dans le manuel la première phase d'entraînement (C) ne contient pas d'activité de la catégorie QTQS. La phase D est, chez Monsieur Bombelli, une phase d'institutionnalisation des savoirs construits dans la séquence, elle consiste en une lecture de la page de cours du manuel. La séquence se termine avec une deuxième phase d'entraînement (E) composée d'activités de calcul mental ou raisonné et de révisions des acquis de l'école élémentaire.

Cette progression chronologique ressemble donc à celles qui ont déjà été étudiées. La particularité nouvelle de la séquence de Monsieur Bombelli que l'analyse chronologique permet de faire émerger est que, sur une durée assez longue, les activités des élèves ne sont le plus souvent que d'une seule catégorie à la fois. De ce fait la zone colorée est très fine d'où cette impression de graphique "squelette" des graphiques précédents.

Le graphique de la séquence de Madame Germain montre une chronologie des activités très différente de celle qui a été constatée jusqu'à présent. Les critères qui nous ont permis de définir les différentes phases d'une séquence permettent de distinguer les trois phases A, B, et C dans l'enseignement de Madame Germain. Mais les activités et leur organisation chronologique ne correspondent pas avec celles qui ont été observées précédemment, sauf dans la phase préparatoire (A) qui ne représente que 10% de la durée de la séquence.

La phase A comporte, comme c'est le cas dans la séquence du manuel, des activités des catégories REE, CMCR et QTQS. Elle dure un peu plus longtemps que dans les séquences des autres professeurs. Durant les deux premiers tiers de la phase de construction des connaissances (B), les activités de la catégorie ETO sont rares et très espacées dans le temps. Nous avons constaté le phénomène inverse dans les autres séquences. Les activités d'élaboration de la technique opératoire ou de propriétés de la multiplication sont plus nombreuses et plus proches les unes des autres dans le dernier tiers de la phase B. Les premiers calculs écrits apparaissent seulement à la fin de cette phase. Ils deviennent plus nombreux et

plus proches dans la phase d'entraînement (C) qui est très courte comparée aux autres. Une autre particularité du graphique de la séquence de Madame Germain est que les activités des catégories REE, CMCR et QTQS sont présentes et assez uniformément réparties durant toute la durée de l'enseignement.

La séquence de Madame Germain se distingue donc des autres par deux caractéristiques : d'une part la durée très longue de la construction de la technique opératoire et des propriétés de la multiplication et, d'autre part, la présence continue des activités de catégorie REE, CMCR et QTQS durant toute la séquence.

Nous avons donc montré que les séquences se décomposent en différentes phases, les unes sont plutôt centrées sur la construction des savoirs, les autres plutôt sur leur mise en fonctionnement. Mais derrière cette apparente homogénéité nous avons constaté que l'organisation chronologique des séquences permet de distinguer deux types de séquence suivant la durée de la phase de construction des savoirs. Ainsi, parce que cette phase y est beaucoup plus longue, la séquence de Madame Germain est différente de celles de ses collègues qui se ressemblent davantage et qui ressemblent aussi de la séquence du manuel. Nous avons montré en outre que la variété des activités effectives dans les phases distingue les séquences étudiées. Dans celle de Monsieur Bombelli, les activités effectives sont de la même catégorie pendant des durées assez longues alors qu'elles sont très variées dans celles de ses collègues ou du manuel.

Enfin, nous constatons que l'organisation chronologique du déroulement des séquences est conforme à la stratégie d'enseignement des professeurs. Monsieur Bombelli expose le savoir et le fait appliquer, à l'opposé, Madame Germain fait construire des petites règles pour faciliter les multiplications qui conduiront à l'élaboration de la technique opératoire. Entre ces deux pôles, Madame Theano et Madame Agnesi ont proposé une phase d'introduction (respectivement par les ordres de grandeur et par des problèmes de prix) pour aboutir assez vite à la technique opératoire et proposer de nombreux exercices d'application (où les élèves questionnent la règle de la virgule) et de calcul mental.

Une analyse quantitative confirme cette diversité des séquences

L'étude qui vient d'être développée reste qualitative, nous nous proposons d'en confirmer l'essentiel par une analyse quantitative. Comme nous n'avons pas chronométré les activités effectives, nous avons utilisé un procédé qui rend compte de la durée des phases et qui repose sur le constat déjà signalé que les activités sont toutes assez courtes, nous considérons leur durée identique. Afin de comparer l'importance relative de chaque phase par rapport à l'ensemble de la séquence, nous avons mesuré les longueurs des segments correspondants sur l'axe des abscisses puis nous avons exprimé cette mesure en pourcentage de la longueur totale. Nous avons complété ces résultats bruts par la somme des durées des phases A, B et D d'une part et C et E d'autre part qui représentent respectivement les phases de construction des savoirs et les phases de mise en fonctionnement. Ces regroupements ont permis en outre de situer les séquences les unes par rapport aux autres. Nous avons obtenu les résultats suivants.

Tableau 30. Les phases des cinq séquences d'enseignement

Phases	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
A	7 %	4 %	5 %	0 %	10 %
B	13 %	33 %	32 %	21 %	70 %
C	80 %	45 %	47 %	49 %	20 %
D	0 %	7 %	16 %	16 %	0 %
E	0 %	11 %	0 %	14 %	0 %
A, B et D	20 %	44 %	53 %	37 %	80 %
C et E	80 %	56 %	47 %	63 %	20 %
Position relative des différentes séquences					

La position relative des différentes séquences confirme la ressemblance observée des séquences des trois professeurs Madame Theano, Madame Agnesi et Monsieur Bombelli quant à leur découpage en phases. La séquence de Madame Germain et celle du manuel sont à l'opposé, la première est constituée, à 80% de sa durée, de phases de construction des savoirs alors que la seconde n'en comporte que 20%. Dans la séquence du manuel, les savoirs sont construits rapidement au début, les élèves sont sensés les apprendre en résolvant les exercices ; à l'inverse, dans la séquence de Madame Germain, la construction des savoirs occupe la plus grande partie de la séquence.

Afin de comparer la variété des activités effectives des élèves dans les différentes séquences, nous avons comparé l'aire des surfaces grisées des différents graphiques chronologiques. En effet, plus les activités sont variées sur une durée assez courte plus le nombre de bandes couvertes par la zone grisée est grand et donc plus l'aire de cette zone est importante. Puisque les bandes ont la même largeur, nous avons mesuré les longueurs de bandes grisées (nous les avons simplement mesurées en cm puis nous avons calculé le pourcentage de la longueur totale correspondant) puis nous avons ajouté ces longueurs et nous avons situé ces sommes par rapport à leur moyenne.

Tableau 31. Variété des activités des cinq séquences d'enseignement

Catégories d'activité	Manuel Cinq sur cinq	Madame Theano	Madame Agnesi	Monsieur Bombelli	Madame Germain
QTQS	5	58	47	0	89
CMCR	74	68	79	16	100
PC	70	74	63	42	26
ETO	16	32	32	26	26
REE	68	68	79	63	74
Somme	233	300	300	147	315
Ecart à la moyenne (259)	-10 %	+16 %	+16 %	-43 %	+25 %
Position relative des différentes séquences					

La mesure de la variété des activités des élèves dans les séquences des professeurs montre la proximité des séquences de Madame Theano, Madame Agnesi et de Madame Germain où la variété est supérieure à la moyenne. La position du manuel est intermédiaire. Celle de la séquence de Monsieur Bombelli confirme l'apparence "squelettique" du graphique chronologique : suivant les phases, les catégories d'activités sont différents et se succèdent donc dans la durée. Cette remarque doit être modérée pour la séquence du manuel. Elle est fautive pour celles des trois autres professeurs. Pour ceux-là, en effet, la distinction des phases de construction de savoirs et de celles de leur mobilisation ne doit pas dissimuler que les activités des élèves sont diversifiées tout au long de la séquence, comme si dans chaque situation proposée ces trois professeurs savaient induire des activités de révision, de calcul mental ou réfléchi et des questionnements plus théoriques.

Les activités effectives des élèves différencient les pratiques

L'analyse des activités effectives des élèves induites dans les cinq séquences d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux que nous avons étudiées nous a permis de dégager plusieurs résultats. Ils concernent l'utilisation du manuel par les professeurs, la diversité des enseignements dispensés et la cohérence entre le projet des professeurs et l'animation, en classe, du scénario prévu.

Des résultats sur l'utilisation du manuel par les professeurs

Les tâches proposées induisent des activités des élèves. Pour notre analyse du manuel, nous n'avons retenu que les activités attendues compte tenu des énoncés. Nous savons pourtant que si ces tâches avaient effectivement été prescrites en classe, les activités qui en auraient découlé auraient été bien plus nombreuses car les élèves réagissent de façon très diverse, ils se posent des questions, interrogent leur professeur qui retransmet souvent ces interrogations à toute la classe. Néanmoins, le nombre d'activités retenues montre que le manuel est bien trop riche pour être intégralement suivi par un professeur qui respecte les contraintes horaires imposées en classes de sixième. Le manuel ne peut donc pas être assimilé à un protocole d'enseignement.

Les professeurs que nous avons observés ont tous pris une distance assez importante avec le manuel de la classe. L'un d'entre eux, pourtant, a déclaré le suivre, d'autres l'ont adapté en proposant des énoncés qu'ils ont eux-mêmes élaborés. En mesurant la distance prise par les enseignants avec leur manuel, nous avons montré que ce n'est pas le professeur qui déclare le suivre qui prend le moins de distance avec la séquence proposée. Nous ne négligeons pas l'effet inducteur d'un manuel sur l'enseignement d'un professeur qui l'utilise mais nous constatons que les enseignants choisissent certains énoncés dans l'éventail proposé, qu'ils les enrichissent par des questions, parfois soulevées par les élèves eux-mêmes, directement ou indirectement. L'enseignement qui en résulte n'est alors pas nécessairement conforme à celui qui était proposé par les auteurs.

L'organisation chronologique de la séquence du manuel montre deux phases principales dont l'importance est très inégale, la première concerne l'élaboration des savoirs, elle est mineure par rapport à la seconde qui concerne les applications. Les professeurs observés accordent une place d'importance très variable aux activités d'élaboration des nouveaux savoirs par rapport aux applications mais dans toutes les séquences l'élaboration des savoirs a une place beaucoup plus importante que dans le manuel.

Diversité des enseignements, cohérence avec le scénario prévu

L'analyse des scénarios prévus avait déjà montré un champ mathématique identique pour les quatre séquences mais des stratégies d'enseignement très différentes. Les activités des élèves comportent des caractéristiques communes mais aussi des divergences importantes.

Dans les séquences des professeurs, alors que quarante-deux activités différentes ont été recensées, une dizaine seulement totalise 70% de l'effectif total²⁷⁴. Ces activités dominantes sont différentes d'un professeur à l'autre, elles témoignent de la conformité du déroulement du scénario en classe à la stratégie d'enseignement qui avait été prévue. Pour trois professeurs, les effectifs de certaines activités dominantes sont très importants. Ces professeurs semblent "savoir" que la répétition d'une activité, sous certaines conditions, permet de renforcer l'apprentissage qui en découle. La répétition ne doit pas se comprendre ici comme une suite d'activités identiques à elles-mêmes. Rappelons un exemple, la dénomination commune de l'activité CMCR_OP (utiliser des opérateurs dans un calcul mental ou raisonné pour déterminer le produit de deux décimaux) qui apparaît trente fois dans la séquence de Madame Germain ne doit pas dissimuler que chez les élèves il existe une évolution au fur et à mesure de la répétition de cette même activité mathématique. La lecture de la narration de la séquence montre que les élèves de Madame Germain "progressent" dans cette activité c'est-à-dire que leurs réponses sont de plus en plus conformes à l'attente de leur professeur.

En ce qui concerne les applications des méthodes ou des techniques de calcul enseignées dans cette séquence relative à la multiplication des décimaux, nous constatons deux choix identiques pour tous les professeurs. Premièrement, le nombre de ces applications est pratiquement le même dans les quatre séquences, indépendamment du scénario. Le manuel en propose pourtant davantage. Les enseignants semblent donc "savoir" combien d'exercices d'application les élèves doivent avoir résolus pour que l'enseignement soit suffisamment efficace. Deuxièmement, la répartition entre les exercices d'application qui posent des difficultés spécifiques à la multiplication des décimaux et ceux qui n'en posent pas est, elle aussi, pratiquement identique dans les quatre séquences. Pourtant cette

²⁷⁴ Rappelons la signification de ce pourcentage. A chacune des quarante-deux activités effectives, pour chaque séquence, nous avons associé son effectif, c'est-à-dire le nombre de fois où elle est réalisée en classe. La fréquence cumulée décroissante atteint 70% lorsqu'on atteint (environ) la dixième activité.

répartition n'est pas la même dans le manuel. Les professeurs semblent donc encore "savoir" comment déstabiliser suffisamment – mais aussi suffisamment peu – les connaissances des élèves pour qu'ils puissent les reconsidérer – mais aussi les reconstruire – en fonction des difficultés qu'ils ont éprouvées ou des erreurs qu'ils ont commises. Cet équilibre, nous l'avons interprété dans une perspective d'efficacité de l'enseignement. Nous pensons qu'il tient aussi du "bon" fonctionnement de la classe, les élèves ne doivent pas être trop déroutés pour que le professeur conserve leur confiance. Une telle contrainte liée à l'exercice du métier a déjà été montrée lors de l'analyse des projets d'enseignement des professeurs.

En ce qui concerne les activités de calcul mental ou raisonné ainsi que les questionnements plus théoriques qui mettent les élèves en situation de recherche, les séquences des professeurs sont très différentes. Le choix de ces activités est lié au projet d'enseignement. Le nombre de ces activités dépend peut-être davantage de l'enseignant lui-même que du thème de la séquence. Toujours est-il que d'un professeur à l'autre, le nombre d'activités de recherche varie de 20 à 158. Et ce résultat est à rapprocher de l'organisation chronologique des séquences : plus longue est la phase d'élaboration des savoirs, plus nombreuses sont les activités qui mettent les élèves en situation de recherche.

Finalement, l'analyse des activités effectives s'inscrit dans celles des contraintes liées à l'exercice du métier qui pèsent sur les choix des professeurs lors de l'élaboration de leur projet. Elle atteste l'existence d'une marge de manœuvre qui concerne davantage l'organisation de l'enseignement et la nature du travail demandé aux élèves. En outre, la comparaison des activités effectives et des scénarios prévus confirme une grande cohérence, pour ces professeurs expérimentés, entre le projet et sa réalisation. Nous allons maintenant procéder à l'analyse des échanges entre les élèves et le professeur.

CHAPITRE 7

LES ADAPTATIONS DU PROFESSEUR, DES ÉCHANGES AVEC LES ÉLÈVES

Sommaire du chapitre 7

1. Complément méthodologique : incidents et adaptations

Définition de la notion d'incident

Typologie des incidents relevés

La place des incidents dans le scénario de la séquence

Les modes de gestion des incidents

Quelques remarques a priori sur les adaptations des professeurs

2. L'adaptation : une pratique professionnelle au service de l'apprentissage ?

Quelle possibilité les professeurs laissent-ils à l'émergence d'incidents ?

La nature des incidents, quelle répartition suivant les professeurs ?

La gestion des incidents, tendances générales

Les modes de gestion suivant les incidents : recherche de compensations

3. Influence du scénario prévu sur les adaptations

Quelle émergence des incidents en fonction du scénario prévu ?

La nature et la gestion des incidents en fonction des activités des élèves

Conclusion : les points fondamentaux du scénario influencent les adaptations

4. Influence du temps sur la gestion des incidents

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Theano

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Agnesi

Chronologie de la gestion des incidents par Monsieur Bombelli

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Germain

Bilan de la contrainte temporelle sur le mode de gestion des incidents

Les adaptations, une pratique peu contrainte

En analysant le déroulement de la séquence d'un enseignant par les activités des élèves qu'il induit dans sa classe, nous avons montré que ce déroulement est particulier à chaque professeur et globalement conforme au scénario prévu. Les professeurs investissent une marge de manœuvre qui leur reste pour élaborer leur projet d'enseignement et ils animent ce scénario en conséquence. Dans les classes, les élèves ont eu des activités similaires en ce qui concerne les applications directes des nouvelles connaissances construites, ce que l'analyse des stratégies d'enseignement ne laissait pas prévoir. En revanche, c'est par les activités d'élaboration de ces connaissances, et plus généralement celles qui mettent les élèves en situation de recherche, que les professeurs se distinguent, conformément aux choix qu'ils avaient effectué et cela malgré l'utilisation du même manuel scolaire.

Nous proposons maintenant de procéder à une analyse des pratiques en classe qui concerne les échanges avec les élèves. L'analyse des stratégies d'enseignement a montré leur fonction d'aide à l'improvisation en classe. Des exemples ont illustré des "mesures préventives" prises par les enseignants pour éviter la dispersion des élèves dans la réalisation de la tâche prescrite ainsi que des "gestions d'incidents" causés par des réactions des élèves. Dans la classe, en effet, par leur activité, ces derniers perturbent parfois le scénario prévu par le professeur : ils commettent des erreurs, ils posent des questions, ils soumettent des propositions ou des réflexions qui n'étaient pas anticipées, parfois ils sèchent... Les professeurs s'adaptent à toutes ces perturbations issues de la dynamique propre à l'apprentissage de chaque élève, dynamiques qui se composent pour former celle de la classe. Font-ils acte d'autorité en interdisant ce qui n'était pas prévu ? Laissent-ils évoluer la classe librement ? Non, le plus souvent, les professeurs interviennent et, finalement, avec quelques détours, les élèves parcourent l'itinéraire programmé. Plus rarement, les professeurs improvisent une trajectoire qui ne figurait pas dans le scénario prévu.

Les exemples d'improvisations que nous avons cités pour montrer la fonction professionnelle de la stratégie d'enseignement²⁷⁵ montrent que le repérage systématique des "mesures préventives" nécessite une analyse très fine du déroulement que ne permettent pas les narrations des séquences. Nous avons

²⁷⁵ Cette analyse de la stratégie d'enseignement figure au chapitre 5.

choisi de ne pas les analyser de manière spécifique dans cette recherche parce que les activités mathématiques effectives des élèves de la classe étant de très courte durée, les occasions d'aides ou d'explications *a priori* ont été assez rares et nous ont donc semblé peu significatives. Nous avons donc décidé de limiter l'étude des échanges avec les élèves aux seules "gestions des incidents".

Rappelons que nous cherchons à déterminer des régularités et des variations entre les pratiques et au sein même de chacune d'elles pour déterminer des contraintes et des marges de manœuvre investies par les professeurs ainsi que des traces de la cohérence entre le projet et son animation en classe. Nous commencerons par définir précisément les incidents relevés dans les déroulements ainsi que leur gestion par les enseignants, nous analyserons ces échanges en fonction de leur influence sur le processus d'apprentissage des élèves puis en fonction du scénario prévu et du temps.

1. Complément méthodologique : incidents et adaptations

Nous repérons, à la lecture des narrations des séquences d'enseignement, les *incidents*, provoqués par les élèves, qui émergent du déroulement. Nous retenons seulement ceux qui concernent directement l'accomplissement des tâches mathématiques prescrites par les professeurs, nous avons donc choisi de ne pas tenir compte des incidents qui concernent la vie générale de la classe²⁷⁶.

Pour chaque incident, nous précisons sa *place par rapport au scénario* du professeur : le problème soulevé concerne-t-il ou non le champ mathématique défini lors de la préparation de la séquence, et, dans l'affirmative, ce problème concerne-t-il aussi la stratégie d'enseignement élaborée par le professeur ?

Puis nous relevons les différents *modes de gestion des incidents* que les professeurs observés ont utilisés durant cette séquence c'est-à-dire les réponses apportées aux élèves par les professeurs à ces incidents.

Chaque triplet ainsi formé constitue une *adaptation* du professeur aux réactions de sa classe. Afin de pouvoir interpréter les choix des modes de gestion des incidents, nous relevons, pour chaque adaptation, sa place dans la chronologie de la séquence ainsi que la catégorie d'activité mathématique de la classe²⁷⁷ au moment de cette adaptation.

Après avoir défini la notion d'incident, nous détaillerons les différentes valeurs des trois variables – incident, place par rapport au scénario et gestion – qui

²⁷⁶ Problèmes matériels (demande de consigne de présentation, emprunt matériel...), demande de participation (répondre à une question, aller au tableau...), problèmes de discipline (retard, bavardage...),...

²⁷⁷ Il s'agit des sept catégories d'activités qui ont servi à l'analyse des activités des élèves : réviser des acquis de l'école élémentaire (REE), élaborer la technique opératoire ou des propriétés de la multiplication (ETO), calculer un produit de deux décimaux à l'aide d'un papier et d'un crayon (PC), calculer un produit à l'aide d'une machine à calculer (MAC), effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR), se poser des questions théoriques ou des questions sur (QTQS), résoudre un problème issu d'une situation multiplicative faisant intervenir le produit de deux décimaux (SM).

composent une adaptation. Nous procéderons à un nouveau codage des narrations que nous analyserons pour analyser ces échanges entre le professeur et ses élèves ²⁷⁸.

Définition de la notion d'incident

Pour définir la notion d'incident, nous nous référons au travail de Janine Rogalski ²⁷⁹, plus précisément à son approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. L'auteur définit l'incident comme un décalage entre ce qui était prévu et ce qui se réalise :

La définition la plus générique d'incident est le fait qu'il y a décalage entre ce qui est attendu de l'action et ce qui se passe effectivement. On réserve en général le terme d'incident aux cas où on évalue que ce décalage est " négatif ", et met en question l'atteinte du but visé. L'incident en ce sens générique n'est donc pas l'incident de discipline, mais celui directement lié au contenu de l'enseignement en jeu.

En considérant l'enseignement comme la gestion d'un *environnement dynamique ouvert* ²⁸⁰, nous interprétons chaque adaptation d'un professeur comme la gestion d'un incident pour éviter, ou plutôt pour minorer, un risque qui concerne l'apprentissage des élèves, risque qui peut avoir des conséquences néfastes sur l'exercice du métier lui-même.

Exemple d'incident et des gestions possibles

Un exemple simple peut illustrer le phénomène. Une réponse fausse est proposée par un ou plusieurs élèves. En essayant de travailler sur cette erreur et sur les connaissances des élèves qui l'ont commise, le professeur risque de s'écarter tellement de la trajectoire prévue que les élèves pourraient perdre de vue l'objectif initial. Du point de vue des apprentissages recherchés dans la séquence, ce choix ne serait pas forcément pertinent. Et du point de vue de l'exercice même du métier, si le travail sur l'erreur commise par certains élèves n'intéresse pas suffisamment les autres, ils risquent de s'ennuyer et de s'occuper autrement.... Le professeur devra alors déployer une énergie importante pour ramener la classe entière vers le calme et une énergie plus importante encore pour remettre les élèves au travail. S'il y parvient, on pourra penser que de tels événements doivent rester suffisamment exceptionnels pour que le professeur ne soit pas épuisé trop rapidement. S'il n'y parvient pas, le bilan sera bien négatif tant pour les apprentissages des élèves que pour son autorité (au sens large) de professeur. Mais

²⁷⁸ Les résultats complets de ce codage figurent en annexe.

²⁷⁹ ROGALSKI J (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

²⁸⁰ Janine Rogalski propose de modéliser l'enseignement comme la gestion d'un environnement dynamique ouvert. Dynamique parce que cet environnement a la possibilité de se modifier sous sa propre dynamique, ouvert parce que le professeur ne dispose, pour la gestion, d'aucun modèle précis et complet de la dynamique propre des acquisitions ni de l'impact de l'intervention didactique.

si le professeur ignore les problèmes soulevés par les élèves, il risque aussi de les démobiliser, d'en voir certains suivre passivement l'enseignement prévu en se contentant de noter ce qui est inscrit au tableau et en bavardant le reste du temps, d'en voir d'autres se désintéresser de l'activité de la classe pour résoudre eux-mêmes leurs problèmes individuellement ou en petits groupes – ce qui provoque alors un brouhaha de fond difficile à gérer. Tout cela nuirait sûrement aux apprentissages des élèves et rendrait, plus sûrement encore, le travail pénible pour le professeur.

Cet exemple montre comment chaque adaptation d'un professeur doit se considérer comme une réponse à un choix entre divers modes de gestion possibles de chaque incident qui survient durant le déroulement de la séquence. Une typologie des modes de gestion constatés dans les séquences observées sera proposée après celle des incidents.

Cet exemple montre aussi qu'il serait vain de prétendre focaliser son analyse sur une adaptation précise pour en tirer des informations quant à son effet sur l'apprentissage des élèves ou sur l'exercice du métier. Nous nous proposons pourtant de mener, dans le cadre de cette recherche, une étude qui porte sur les adaptations du professeur pour conduire sa classe le long de l'itinéraire prévu, mais nous n'envisageons pas un examen de chaque adaptation considérée isolément.

Définition des incidents et précision sur l'étude proposée

Comme le propose Janine Rogalski, dans le cadre de cette recherche, nous n'avons pas tenu compte des incidents de discipline qui sont souvent difficiles à gérer et qui trouvent parfois leur origine dans un décalage entre la préparation de la leçon et ce que les élèves sont prêts à accepter compte tenu de condition internes à la classe (attention, niveau, présence de personnalités particulières...), de conditions externes (période de l'année scolaire, horaire...) et de l'animation elle-même du projet de l'enseignant. Les incidents que nous avons retenus sont bien ceux qui concernent directement l'enseignement en jeu.

Néanmoins nous allons préciser comment il faut comprendre le “*décalage entre ce qui est attendu de l'action et ce qui se passe effectivement*”. Un professeur interroge un élève, celui-ci commet une erreur, le professeur doit s'adapter à cette réponse alors qu'il n'aurait peut-être pas eu à le faire s'il avait interrogé un autre élève qui aurait répondu correctement. Il convient donc de préciser que ce qui est “*attendu*” est défini par la tâche prescrite. Il ne s'agit pas de l'attente du professeur qui pourrait, par exemple, interroger le meilleur élève de sa classe pour obtenir la réponse correcte et finalement être déçu. Le *décalage* doit donc être considéré en référence à la tâche et à son objectif mais pas nécessairement par rapport à l'attente du professeur qui a prescrit cette tâche.

Nous proposons donc de compter comme un incident toute manifestation publique (au sens où elle s'intègre dans la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe d'élèves en relation directe avec l'enseignement en jeu, en décalage par rapport à l'objectif visé de cet enseignement. Parmi ces manifestations

publiques des élèves, nous n'avons donc pas compté comme des incidents celles où les élèves répondent correctement à la demande de leur professeur.

Les décalages entre ce qui est attendu et ce qui se passe effectivement ne sont pas tous équivalents. Plus ce décalage est grand, plus le travail du professeur est difficile. Sa réaction peut donc varier en fonction du décalage mais aussi de l'importance de la tâche prescrite par rapport à la stratégie d'enseignement prévue, ou encore du temps (suivant que l'incident survient au début ou à la fin de la séquence). L'étude des gestions des incidents nécessite donc l'élaboration d'une typologie des incidents, des gestions ainsi qu'un repérage de la tâche prescrite et du temps. Nous proposons d'analyser ces échanges entre le professeur et ses élèves en étudiant les effectifs et les répartitions des incidents et de leurs gestions, puis en croisant ces résultats entre eux, avec les tâches et avec la chronologie.

Présentons la typologie des incidents et celle des gestions par les professeurs.²⁸¹

Typologie des incidents relevés

En tenant compte de l'importance du décalage entre ce qui est attendu et ce qui se passe effectivement, nous avons classé les incidents en six catégories que nous allons définir plus précisément et illustrer : les erreurs, les questions, les réponses incomplètes, les silences, les réponses impossibles et les divergences entre élèves. Nous ne prétendons pas obtenir une liste exhaustive des incidents qui peuvent survenir dans une classe de mathématique mais elle nous a semblé suffisante pour décrire ceux que nous avons pu observer dans les classes.

Les erreurs commises

Les élèves commettent des erreurs, ils se trompent ou bien ils ne respectent pas une consigne de la tâche prescrite. Si une telle erreur apparaît publiquement en classe dans le déroulement de la séquence, nous l'avons repérée comme un incident. Nous avons aussi compté dans cette catégorie les réponses qui ne sont pas conformes à celle qui était manifestement attendue par le professeur. Par exemple, lorsque Madame Theano demande comment calculer l'aire d'un rectangle, nous avons considéré comme un incident du type "Erreurs" (E) le fait que des élèves répondent qu'il faut ajouter les côtés. Lorsque Madame Germain demande un ordre de grandeur du produit $20 \times 408,1$ nous avons considéré comme un incident de cette catégorie le fait qu'un élève interrogé réponde 8 162 parce qu'il a effectué mentalement le calcul.

Les questions posées ou les propositions émises

Les élèves posent des questions, ils expriment des propositions de méthodes différentes de celle préconisée par leur professeur ou bien ils introduisent des

²⁸¹ Dans le texte ou les tableaux qui suivent, chacune des six catégories d'incidents qui vont être définies est repérée par une lettre "significative" : E pour "Erreurs", Q pour "Questions", etc. Ces lettres sont indiquées entre parenthèses dans le texte. Nous avons procédé de la même façon pour repérer la place des incidents par rapport au scénario et les modes de gestion des incidents par les professeurs.

éléments nouveaux en cours de résolution d'un problème. Chacun de ces événements constitue un incident que le professeur doit gérer. Ainsi, lorsque Monsieur Bombelli affirme que multiplier par 0,1 revient à diviser par 10, nous avons considéré comme un incident de la catégorie " Questions " (Q) le fait qu'une élève demande si l'on peut affirmer aussi que diviser par 0,1 revient à multiplier par 10. De même, lorsque Madame Agnesi demande comment calculer le produit $0,7 \times 41,50$ pour déterminer le prix de 0,7 kg de chocolat à 41,50 F/kg, nous avons classé dans cette catégorie la proposition d'une élève de convertir les données en hectogramme et en francs par hectogramme alors que l'enseignante attendait une réponse concernant la gestion de la virgule des deux facteurs.

Les réponses incomplètes

Aux questions du professeur, les élèves proposent parfois des réponses incomplètes ou qui ne sont pas suffisamment argumentées. Par exemple, Madame Germain demande de trouver la valeur du produit $234 \times 11,5$ parmi les trois nombres 269,1, 9 621 et 2 691, nous avons codé dans cette catégorie " réponse Incomplète " (I) la réponse d'un élève qui explique que 11,5 est un peu plus grand que 10 et qu'il choisit 2 691 parce que 269,1 est trop petit et que 9 621 lui semble vraiment trop grand. De même, lorsque Madame Agnesi demande à la classe s'il est possible d'acheter 48 objets valant 0,95 F chacun avec un billet de 50 F, nous avons classé la réponse " oui, j'ai assez " dans la catégorie des réponses incomplètes parce qu'elle n'est pas justifiée. Dans ces deux exemples les professeurs attendaient des arguments qui font intervenir la conservation de l'ordre dans la multiplication par un nombre décimal (positif).

Les élèves interrogés qui restent silencieux

Lorsqu'un élève qui n'était pas volontaire est désigné pour répondre à une question, il reste parfois silencieux. Il arrive qu'il ne sache pas répondre et qu'il le dise simplement ou bien qu'il attende une réaction du professeur si son silence dure trop longtemps. Nous avons codé ces incidents dans la catégorie " élève Silencieux " (S). Par exemple, lorsque Madame Theano demande à une élève de placer correctement la virgule au nombre 336 pour obtenir le produit $12 \times 2,8$, l'élève interrogée reste muette.

Ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur portée

Nous avons classé dans la catégorie d'incidents " réponse hors de Portée " (P) toutes les réponses d'élèves (y compris les non-réponses) à une question posée alors que le niveau mathématique des élèves est insuffisant pour répondre correctement. Il arrive que cette question soit posée par maladresse du professeur ou bien parce qu'elle est à l'origine d'une préoccupation d'un groupe d'élèves. Madame Agnesi, par exemple, demande de déterminer un ordre de grandeur du produit $1\,230 \times 0,4$. Mais les élèves n'ont pas appris à estimer un facteur inférieur à l'unité et proposent soit zéro soit un comme ordre de grandeur de 0,4. Dans la classe de Madame Germain un élève a proposé 552 comme approximation du produit $12,3 \times 45,6$ (il a calculé 12×46 mentalement) et l'enseignante lui demande si 552 est une approximation par défaut ou par excès de ce produit. Bien

sûr l'élève ne peut pas répondre à cette question destinée à montrer à la classe qu'il n'est pas toujours possible de préciser si une approximation est supérieure ou inférieure à la valeur exacte que l'on a estimée. Pourtant l'élève ne reste pas silencieux et Madame Germain doit s'adapter à la réponse de son élève pour atteindre son objectif pédagogique.

Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort

Lorsque plusieurs méthodes permettent de répondre à une question du professeur, des élèves peuvent proposer simultanément chacun une réponse ou un élève peut exprimer son désaccord avec la proposition de l'un de ses pairs. Nous avons, par exemple, classé dans cette catégorie "Désaccord mais personne n'a tort" (D) l'incident survenu dans la classe de Monsieur Bombelli lorsqu'un élève a posé la multiplication $68 \times 4,03$ en disposant le chiffre 4 (des unités) sous le chiffre 8 (des unités) alors que d'autres élèves demandent que ce soit le chiffre 3 qui soit inscrit sous le chiffre 8 parce qu'ils ont appris que, pour les multiplications, on pouvait (ou l'on devait) aligner les chiffres en partant de la droite. Ce type d'incident n'est pas rare ; durant l'année scolaire, un professeur est toujours confronté aux conséquences des exigences de l'enseignant qui l'a précédé. Dans le cas présent, Monsieur Bombelli doit s'adapter pour apporter une réponse commune à des élèves en désaccord parce qu'ils respectent des indications différentes prescrites l'année précédente. Dans la classe de Madame Agnesi, nous avons relevé un incident de ce type lorsque, pour calculer $2,8 \times 52$, un élève propose d'ajouter 2×52 et $(8 \times 52) \div 10$ alors qu'un autre propose de poser directement la multiplication.

La place des incidents dans le scénario de la séquence

Nous avons noté, pour chaque incident, sa place par rapport au scénario de la séquence parce qu'il nous semble, *a priori*, que le mode de gestion choisi par le professeur peut en dépendre. Nous avons distingué trois places que nous allons expliciter.

L'incident porte sur un fait non compris dans le champ mathématique de la séquence

Madame Germain, avant de commencer à poser le problème de la multiplication de deux décimaux, voulait s'assurer que les élèves ne considéraient pas chaque décimal comme une juxtaposition de deux entiers indépendants et elle leur avait demandé de multiplier 10,9 par 3 pour détecter ceux qui répondraient 30,27 parce qu'ils multiplieraient séparément la partie entière et la partie décimale par 3. Cette question ne concerne pas directement le champ mathématique de la séquence de Madame Germain aussi. Un incident consécutif à cette question relève donc de cette première catégorie "Hors Champ" (HC).

L'incident porte sur un fait mathématique compris dans le champ mathématique mais ne concerne pas la stratégie du professeur

Présentons un exemple. Madame Theano avait demandé à une élève d'effectuer la multiplication $11,2 \times 0,5$. L'élève avait répondu 5,60 puis revient sur

sa décision, demande au professeur d'aller corriger son résultat, obtient cette autorisation et inscrit 05,60. Cette élève n'avait pas inscrit une ligne de zéros obtenue en considérant le chiffre 0 du nombre 0,5 mais elle avait craint qu'on le lui reproche, peut-être parce qu'elle a vu d'autres élèves le faire l'année précédente ou cette année. Le problème pédagogique posé au professeur fait bien partie du champ mathématique défini par Madame Theano puisqu'il porte sur la multiplication de deux décimaux, néanmoins ce problème ne concerne pas la stratégie de ce professeur qui avait choisi de mettre l'accent sur les ordres de grandeur des nombres ou sur le nombre de décimales des facteurs afin de placer la virgule. Nous l'avons donc classé dans la catégorie "dans le Champ mais Hors Stratégie" (CHS).

L'incident porte sur un fait mathématique compris dans le champ mathématique et s'inscrit dans la stratégie du professeur

La plupart des incidents occupent cette place par rapport au scénario, on les retrouve dans la catégorie "dans la Stratégie" (S). Citons-en un exemple. Monsieur Bombelli avait demandé de corriger l'égalité suivante en plaçant une virgule au nombre écrit en caractère gras :

$$\mathbf{246} \times 0,25 = 6,15.$$

Une élève interrogée propose de conserver l'égalité qui lui semble juste. Le professeur, qui attendait cette erreur, souhaitait mettre l'accent sur une interprétation abusive de la "règle de la virgule" pour insister sur ce qui se passe lorsqu'on pose l'opération. L'incident causé par l'erreur de l'élève concerne donc bien directement la stratégie d'enseignement de ce professeur pour lequel l'acquisition de la technique opératoire est dominante.

Les modes de gestion des incidents

A chaque incident qui survient durant le déroulement de la séquence, le professeur intervient, éventuellement il ignore la réaction d'un ou de plusieurs élève(s) de la classe. Cette intervention résulte d'un choix. Si un élève commet une erreur, le professeur peut donner la réponse correcte, signaler l'erreur et demander simplement à l'élève de reprendre sa réponse, ou bien faciliter la tâche prescrite pour aider l'élève à trouver la réponse correcte ou encore guider complètement l'élève pour qu'il formule la réponse attendue, il peut aussi demander à un autre élève de répondre à la question posée. Nous interprétons chacune de ces interventions possibles du professeur comme une gestion de l'incident survenu durant le déroulement.

Les gestions se distinguent quant à l'autonomie de réflexion laissée à l'élève. Si le professeur répond à sa place, il s'y substitue totalement ; s'il lui demande de reprendre sa réponse, il le laisse approfondir sa réflexion lui-même. Nous dirons que la première gestion est plus fermée que la deuxième, qui est donc plus ouverte. Ces deux gestions ne sont pas équivalentes par rapport à l'apprentissage de l'élève, sauf si la connaissance à construire est dans sa zone proximale de développement, ce que le professeur peut repérer, par exemple lorsque la réponse de l'élève est incomplète mais très proche de la réponse attendue. A la lecture des narrations des

séquences des professeurs observés, nous avons repéré huit modes de gestion des incidents en considérant le degré de substitution de l'élève par le professeur.

Les modes des gestions ne sont pas non plus équivalents pour le professeur. Il est certainement plus difficile d'insister pour qu'un élève produise lui-même la réponse attendue, alors que peut-être il se lasse ou que les autres élèves insistent pour répondre, que de donner la solution ou d'interroger un volontaire.

Ces modes de gestion ont des conséquences qui ne sont pas équivalentes ni pour les apprentissages des élèves ni pour l'exercice du métier. C'est pourquoi nous en proposons l'étude. Nous allons donc présenter les huit modes de gestion des incidents que nous avons repérés, par ordre croissant d'ouverture.

Le professeur ignore la réaction d'un élève ou de la classe

Le professeur, pour diverses raisons, peut choisir de ne pas traiter un problème soulevé par un élève. Ce peut être le cas lorsque le problème soulevé n'est détecté que par le professeur lui-même (et l'observateur) mais pas par les élèves qui n'ont pas les connaissances mathématiques ou didactiques suffisantes. Ce peut être le cas aussi, plus simplement, lorsque le professeur fait semblant de ne pas entendre une question posée, une erreur, une remarque... Nous dirons alors que l'enseignant ignore l'incident.

Madame Theano avait demandé à ses élèves d'utiliser les ordres de grandeur pour placer la virgule manquante au nombre **246** afin de vérifier l'égalité :

$$246 \times 0,25 = 6,15.$$

Mais les élèves n'ont pas appris à estimer les décimaux inférieurs à l'unité. Un élève propose de ne pas écrire de virgule (l'élève a compté le nombre de décimales des facteurs et du produit) et justifie sa réponse en remplaçant 0,25 par zéro et en affirmant que le produit obtenu, zéro, est un nombre proche de 6,15. Madame Theano propose alors, sans répondre à l'intervention de l'élève, de "voir ce que ça donne en posant l'opération". Nous avons classé cette gestion de l'incident dans le mode "Ignore" (I) car aucune réponse n'a été, ni ne sera, apportée à l'élève sur sa façon d'utiliser les ordres de grandeur.

Le professeur répond à la place de l'élève

Quelle que soit l'origine de l'incident, un silence, une erreur, une réponse incomplète, une question, un désaccord entre élèves, etc., le professeur choisit parfois d'apporter lui-même la réponse correcte plutôt que de laisser sa classe l'élaborer. Le mode de gestion est alors "le professeur Répond" (R) ; il exécute la tâche à la place des élèves. Ce peut être pour montrer une technique à reproduire, pour analyser une démarche que les élèves n'ont pas su construire, pour accélérer le rythme du déroulement, ou bien encore parce que le professeur estime qu'il est en classe pour apporter des réponses à ses élèves.

Madame Theano voulait faire remarquer que la multiplication par 0,25 revient à une division par 4. Malgré un premier exemple, sa classe n'a pas souhaité généraliser le constat. L'enseignante propose alors un autre exemple et lors de ce deuxième constat, c'est elle-même qui répond à la question posée : "on pourrait essayer avec autant d'exemples qu'on voudrait..."

Monsieur Bombelli fait constater à ses élèves que deux calculs conduisent au même résultat : $12,75 \times 6,7$ et $(1\,275 \times 67) \div 1\,000$. Mais quand il demande des explications, la classe reste muette. Le professeur décide alors d'expliquer lui-même, à l'aide d'opérateurs, pourquoi ces calculs donnent des résultats identiques.

Le professeur récupère et enrichit une question ou une réponse

Le professeur peut choisir d'utiliser l'intervention d'un élève ou d'un groupe d'élèves pour l'enrichir. Un élève lui pose une question ; il en élargit le sens et pose cette nouvelle question à toute la classe ou bien il y répond lui-même. Un élève apporte une information, et le professeur la reprend en la complétant ou en la transformant ; par exemple, il passe du particulier au général ou bien il décontextualise une remarque... Le mode de gestion est " d'Enrichir la question ou la réponse d'un élève " (E).

Certains élèves de Monsieur Bombelli ont écrit que $246 \times 0,25 = 6,15$ en constatant que les facteurs comportaient ainsi autant de décimales que le produit. Un élève critique ce résultat, il utilise en fait que la multiplication par 0,25 revient à une division par 4 et propose d'écrire $24,6 \times 0,25 = 6,15$. Le professeur reprend cette explication ajoutant que " on se rend bien compte que c'est 24,6 qui divisé par 4 donnera 6,15 " et, sans doute sachant que tous ses élèves ne seraient pas convaincus, il ajoute " mais pour bien expliquer ce qui se passe, il vaut mieux poser l'opération ". Monsieur Bombelli a détourné la remarque d'un élève en l'enrichissant pour conduire sa classe vers l'activité qu'il souhaitait induire.

Madame Theano voulait faire remarquer à ses élèves qu'une multiplication par 0,5 revient à une division par 2. Elle a proposé plusieurs exemples et demande à la classe d'en tirer une conclusion. Un élève répond qu'ils ont multiplié par 0,5 et que cela donnait un nombre entier, qu'ils ont divisé par 2 et que cela donnait aussi un nombre entier. L'enseignante reprend alors la réponse à son compte mais en transformant complètement le sens de ce qui a été exprimé par l'élève (on ne peut d'ailleurs pas être certain qu'il n'avait pas en outre constaté l'égalité des résultats) : on a vu que multiplier par 0,5 revenait à diviser par 2.

Le professeur change d'intervenant en sollicitant un autre élève

Lorsqu'un élève ou un groupe d'élèves provoque un incident durant le déroulement de la séquence, le professeur peut choisir d'entendre d'autres élèves de la classe. Il " Change d'intervenant " (C). Ce mode de gestion des incidents nous semble important à souligner car le professeur gère une classe alors qu'en sixième, les élèves attendent encore souvent des réponses individuelles. L'objectif poursuivi par le professeur peut être d'enrichir le débat en classe, d'obtenir la réponse attendue pour la soumettre à ceux qui ne l'ont pas trouvée, de sonder sa classe pour savoir si une erreur ou une difficulté est isolée ou répandue... Nous avons aussi classé dans ce mode de gestion le fait qu'un professeur temporise, c'est-à-dire qu'il fasse patienter un élève ou un groupe d'élèves avant de traiter le problème qu'il pose. Voyons deux exemples.

Les élèves de la classe de Monsieur Bombelli devaient compléter une suite de nombres en respectant une même règle à découvrir : ... ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; ... ; ... Le

professeur demande la règle, un élève répond qu'on divise par 2 pour passer d'un nombre au suivant. Monsieur Bombelli aurait préféré une réponse utilisant une multiplication mais la consigne ne le précisait pas. Aussi laisse-t-il s'exprimer un autre élève qui demande la parole en espérant obtenir la réponse attendue, le professeur ne sera pas déçu.

Madame Agnesi avait demandé à ses élèves de déterminer la valeur du produit $2,05 \times 3\,860$ sachant que $386 \times 205 = 79\,130$. Un élève devait fournir la justification du résultat annoncé. Comme l'élève restait silencieux et que des camarades prétendaient qu'il avait utilisé sa calculatrice, Madame Agnesi a choisi de changer d'intervenant et de demander à un autre élève de justifier le résultat.

Le professeur guide l'élève

Parce qu'il estime que l'élève ne pourra pas trouver seul la réponse à la question posée ou parce qu'il pense que cela pourrait prendre trop de temps, le professeur choisit parfois de guider un élève dans l'exécution de la tâche de façon telle que, peut-être "malgré lui", l'élève produit la réponse attendue. Nous avons appelé "le professeur Guide" (G) ce type de gestion. Un exemple célèbre de ce mode d'intervention du professeur est décrit par Platon exposant la méthode d'enseignement de la duplication du carré de Socrate.

Dans les séances que nous avons observées, les professeurs ont parfois choisi ce mode d'intervention. Madame Germain par exemple avait demandé à ses élèves d'utiliser les ordres de grandeur pour contrôler l'égalité $20 \times 408,1 = 8\,162$. Un élève pourtant met en doute l'égalité parce que, selon lui, un nombre entier multiplié par un nombre à virgule ne peut pas donner un nombre entier. Son professeur lui fera dire que $20 \times 408,1$ est un nombre entier en lui faisant exécuter différentes sous-tâches sans que l'élève en maîtrise la progression : décomposer 20 comme le produit 2×10 , calculer $10 \times 408,1$ puis $2 \times (10 \times 408,1)$.

Madame Theano voulait insister sur le fait que le produit de deux facteurs qui comportent chacun une seule décimale n'est pas forcément un nombre à deux décimales. Elle interroge alors un élève qui répond strictement aux questions successives qui lui sont posées pour aboutir à la conclusion, au cours de ces questions, il montrera que le produit de 5,5 par 1,2 est un nombre à une seule décimale : 6,6.

Le professeur facilite l'exécution de la tâche

Pour des raisons analogues à celles que nous avons exposées ci-dessus, le professeur peut choisir, non pas de guider l'élève dans la résolution de la tâche, mais seulement de faciliter son travail en exécutant une partie. Nous dirons que le professeur "Facilite l'exécution de la tâche" (F). Il peut, par exemple, lui indiquer la méthode à suivre, lui rappeler un exercice analogue qui a été résolu, lui décomposer la tâche... Nous distinguons ce mode d'intervention du précédent par l'autonomie laissée à l'élève. Il en conserve une part quand le professeur "facilite" contrairement à ce qui se passerait si le professeur "guidait".

Madame Germain souhaitait institutionnaliser l'effet de la multiplication par un facteur inférieur à l'unité, elle demande une phrase aux élèves. L'un d'entre eux dit que "quand on multiplie par zéro virgule quelque chose, on trouve un résultat

inférieur au nombre dont on était parti ». Avant d'inscrire une phrase au tableau, le professeur demande à l'élève comment peuvent se dire les nombres de la forme zéro virgule quelque chose. Madame Germain facilite ainsi la tâche de formalisation prescrite à l'élève.

Le professeur demande un approfondissement

Qu'un élève ou un groupe d'élèves exprime une erreur, une réponse incomplète, un silence ou un désaccord, le professeur peut relancer son travail sans aide supplémentaire en exigeant un approfondissement, une justification, une généralisation ou une reformulation. Le mode de gestion est "une demande d'Approfondissement" (A).

Nous avons vu que Madame Agnesi avait proposé à ses élèves de résoudre des problèmes de calcul de prix à payer connaissant le prix au kg et la masse en kg. La première fois que les élèves ont été confrontés à deux données décimales, l'enseignante souhaitait que la classe remarque cette nouveauté mais aussi que la situation n'étant pas modifiée, il fallait toujours multiplier les deux valeurs. Un des élèves intervient et indique qu'un des deux nombres est inférieur à l'unité. Madame Agnesi lui signale que ce cas avait déjà été rencontré et pose à nouveau la question, sans indication supplémentaire.

Reprenons un exercice proposé par Madame Germain : les élèves devaient trouver la valeur du produit $234 \times 11,5$ parmi les trois nombres 269,1 ; 9 621 et 2 691. Un élève avait expliqué que 11,5 est un peu plus grand que 10 et qu'il choisit 2 691 parce que 269,1 est trop petit et que 9 621 lui semble vraiment trop grand. Plusieurs fois consécutives l'enseignante demandera à ses élèves d'approfondir leur réponse afin qu'ils utilisent la conservation de l'ordre dans une multiplication par un décimal (positif) mais sans les y aider. Madame Germain commence par mettre en doute le "vraiment trop grand" de l'élève et demande une explication. Après quelques considérations qualitatives exprimées par différents élèves, l'enseignante demande que les choses soit dites plus clairement. Les élèves font quelques progrès mais leur expression est confuse et Madame Germain en profite pour exprimer un doute et relancer le travail des élèves dans une autre direction : elle veut vraiment savoir *pourquoi* ce nombre 9 621 est trop grand.

Le professeur reprend, de façon neutre, l'expression d'un élève

Pour conclure ou pour relancer l'activité de la classe, le professeur peut choisir de reprendre simplement l'expression d'un élève ou d'un groupe d'élève, sans en transformer le sens. Lorsque cette expression constitue un incident, la "reprise de façon Neutre" (N) est une façon de relancer l'activité de la classe.

Ainsi, lorsque Monsieur Bombelli avait demandé de placer la virgule au nombre 246 pour vérifier l'égalité $246 \times 0,25 = 6,15$ et qu'un élève avait proposé de ne rien changer (sans doute avait-il compté deux décimales au produit comme aux facteurs), le professeur s'est contenté de copier cette réponse au tableau sans commentaire. Certainement, Monsieur Bombelli souhaitait que d'autres élèves réagissent à cette erreur.

Madame Agnesi a demandé à ses élèves comment calculer le produit de trois facteurs $2 \times 17 \times 0,5$. Un élève répond qu'il commence par les deux premiers

facteurs. L'enseignante souhaitait certainement que les élèves réorganisent le calcul mais elle ne l'a pas fait remarquer, elle a repris la proposition d'élève, qui a complété en divisant le résultat obtenu par 2. Encore une fois l'enseignante a approuvé, espérant sans doute qu'un élève signale enfin une méthode plus astucieuse.

Quelques remarques *a priori* sur les adaptations des professeurs

A travers ces définitions des incidents et des différents modes de gestion que les enseignants peuvent utiliser, à travers les exemples qui les ont illustrées, nous avons montré que de nombreuses combinaisons sont possibles. A la lecture des narrations des séquences, nous avons effectué un relevé de toutes les adaptations. Ce relevé figure en annexe.

Avant de commencer l'analyse des adaptations, nous pensons utile de préciser que certains couplages incident/gestion sont impossibles et qu'il est donc normal de ne pas les trouver chez les enseignants. Ainsi, face au silence d'un élève interrogé, le professeur ne peut ni ignorer, ni enrichir, ni relancer de façon neutre. De même, si une réponse est hors de la portée des élèves, le professeur ne pourra faciliter la tâche, tout au plus pourrait-il guider un élève pour qu'il produise la réponse attendue. Enfin, face à un désaccord entre élèves alors qu'aucun d'entre eux n'a tort, le professeur ne peut ni faciliter ni guider, cela n'a aucun sens. Finalement, parmi les quarante-huit combinaisons incident/gestion, nous en avons repéré six qui ne sont pas pertinentes. Il en reste donc quarante-deux qui peuvent chacune occuper trois places par rapport au scénario prévu.

Nous allons présenter les résultats obtenus et les analyser pour déceler des tendances propres à chacun des professeurs observés mais aussi d'éventuelles compensations. Nous cherchons à montrer que l'adaptation est une pratique professionnelle dont l'effet sur l'apprentissage des élèves n'est sûrement pas neutre.

2. L'adaptation : une pratique professionnelle au service de l'apprentissage ?

Nous avons défini les adaptations des professeurs comme des triplets composés d'un incident, de sa place par rapport au scénario et du mode choisi pour gérer cet incident. La définition que nous avons donnée des incidents ne comprend pas les interventions des élèves qui vont dans le sens prévu par le professeur, nous n'avons retenu que celles qui perturbent son scénario. Ainsi, nous interprétons chaque adaptation comme un détour consenti par l'enseignant par rapport à sa programmation. Les adaptations pourront être analysées pour leurs conséquences sur l'apprentissage des élèves mais aussi comme une pratique professionnelle qui dépend des représentations que les enseignants ont de leur tâche et qui est soumise à des contraintes.

Une première comparaison des professeurs sera menée en considérant les incidents de leur séquence, d'un point de vue quantitatif comme d'un point de vue qualitatif. La "perméabilité" d'un professeur à l'apparition d'incidents constitue

un indicateur de sa pratique professionnelle. En forçant la caricature, un professeur "magistral" rencontrera peu d'incidents et seulement quelques questions, un professeur qui anime des "cours dialogués" beaucoup plus d'incidents, et de nombreuses erreurs... Un professeur qui n'interroge jamais un élève qui n'est pas volontaire, aura moins qu'un autre à gérer l'incident causé par le silence d'un élève. Compte tenu des résultats déjà obtenus sur les séquences des quatre professeurs, nous nous attendons à une divergence entre les enseignants quant à l'effectif total et à la répartition des incidents.

Une seconde source de différence possible entre les professeurs est la façon qu'ils ont de gérer les incidents qu'ils rencontrent durant les séquences : quels sont les choix des modes de gestion des incidents qu'ils privilégient ? Comme nous l'avons dit, nous ne nous attendons pas à découvrir qu'un professeur choisit pratiquement toujours le même mode de gestion mais nous pensons obtenir des tendances, éventuellement différentes suivant les professeurs, reflétées par la répartition des modes de gestion des incidents qu'ils ont utilisés durant le déroulement de leur séquence. Nous tenterons d'analyser ces choix en fonction des apprentissages des élèves en pointant d'éventuels effets de compensation entre les différents modes utilisés suivant les incidents rencontrés.

Quelle possibilité les professeurs laissent-ils à l'émergence d'incidents ?

Nous allons présenter les résultats obtenus concernant le nombre d'incidents survenus dans chacune des quatre séquences que nous avons observées. Afin de mieux pouvoir analyser ces résultats, il nous semble nécessaire de tenir compte du fait que les séquences n'ont pas toutes la même durée, qu'elles ne comportent pas le même nombre d'activités et qu'enfin elles ne comportent pas non plus le même taux horaire d'activités. Pour chaque séquence, nous avons donc indiqué l'effectif total des incidents puis nous avons rappelé le taux horaire d'activités, enfin nous avons rapporté le nombre d'incidents à la durée de la séquence et au nombre d'activités. Nous avons préféré ne pas indiquer de résultat total concernant l'ensemble des professeurs car les durées des séquences sont différentes, le nombre d'incidents dépend de la durée, et nous voulions éviter d'augmenter l'importance de la séquence de Madame Germain qui est très longue dans sa contribution à la référence globale. Nous n'avons pas non plus souhaité uniformiser les durées des séquences car les choix des professeurs, en ce qui concerne leur "perméabilité" aux incidents dépend vraisemblablement du temps dont ils disposent.

Tableau 32. Effectif total des incidents, taux horaire et taux pour dix activités

	Mme Theano (3h)	Mme Agnesi (3h30)	M. Bombelli (2h30)	Mme Germain (5h)
Effectif total des incidents	56	80	25	95
Taux horaire des activités (rappel)	69	43	41	48
Taux horaire des incidents	15,33	22,86	10	19
Taux des incidents pour dix activités	2,71	5,26	2,42	3,92

Le tableau obtenu fait apparaître une assez grande diversité des résultats concernant la possibilité laissée par les professeurs à l'émergence d'incidents. Les effectifs totaux varient du simple au quadruple mais on constate, ce qui est moins étonnant, que plus la durée de la séquence est longue plus grand est le nombre d'incidents.

Le taux horaire des incidents montre que Madame Agnesi et Madame Germain laissent apparaître une vingtaine d'incident par heure, à l'opposé Monsieur Bombelli n'en laisse apparaître qu'une dizaine, Madame Theano se situe à mi-chemin. Ces taux horaires varient donc du simple au double, ils montrent cependant, même pour Monsieur Bombelli, que les professeurs, dans le cadre d'un enseignement ordinaire, doivent s'adapter très fréquemment aux réactions de leur classe. Sachant qu'une heure de cours dure environ cinquante minutes, Monsieur Bombelli s'adapte à sa classe une fois toutes les cinq minutes et Madame Agnesi pratiquement une fois toutes les deux minutes. Ce résultat est intéressant pour deux raisons. D'une part il montre, chez les professeurs que nous avons observés, que l'enseignement par un cours magistral est très loin de leur pratique ordinaire. D'autre part, du point de vue méthodologique, on aurait pu craindre que la présence d'un observateur et celle d'un procédé d'enregistrement effacent les relations habituelles entre le professeur et ses élèves, nous pouvons constater que, même si elles ont été modifiées d'un point de vue quantitatif, elles sont loin d'avoir été éliminées.

Le taux des incidents pour dix activités, lui aussi, varie du simple au double suivant les enseignants. On remarquera que les taux induisent un classement des quatre professeurs dans le même ordre mais leur distance relative est modifiée. La variation la plus importante est celle de la position de Madame Theano. Rappelons que ce professeur est celui pour lequel le taux horaire d'activités est le plus important : 69 activités par heure alors qu'il varie de 41 à 48 pour les trois autres professeurs. De façon imagée, nous avons dit que ce professeur "harcele" les élèves de sa classe.

Afin de comparer la possibilité que laisse chaque professeur à l'apparition d'incidents au cours des activités des élèves, nous avons neutralisé à la fois deux variables influencent les résultats : la durée de la séquence et le nombre d'activités des élèves. Nous considérons le nombre moyen d'incidents pour dix activités (fictives) de même durée. Pour cela, le taux des incidents pour dix activités de chaque professeur a été pondéré par le rapport du taux horaire d'activités de sa séquence au taux horaire moyen d'activités qui est égal à 50. On obtient ainsi des résultats qui portent (de façon fictive mais qui aide à la comparaison) sur des activités de même durée. On trouve les résultats suivants.

Tableau 33. Nombre moyen d'incidents pour dix activités (fictives) de même durée

Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain
3,74	4,52	1,98	3,76
2	3	4	

Le graphique montre une très grande proximité de Madame Theano et de Madame Germain ; il permet aussi de distinguer deux groupes, le premier est formé par Madame Theano, Madame Germain et Madame Agnesi qui laissent émerger environ quatre incidents pour dix activités de même durée, le deuxième ne comprend que Monsieur Bombelli qui laisse émerger seulement deux incidents pour dix activités de même durée.

Nous avons montré que les professeurs observés permettent des interventions fréquentes de leurs élèves même si ces interventions leur demandent de s'adapter pour suivre le scénario prévu. Néanmoins, d'un enseignant à l'autre, cette fréquence varie globalement du simple au double, qu'on la mesure par rapport à la durée de la séquence ou par rapport aux activités des élèves. Cette considération est très globale, nous allons maintenant analyser la nature de ces incidents pour permettre des interprétations.

La nature des incidents, quelle répartition suivant les professeurs ?

Nous avons donc remarqué que les professeurs ne laissent pas tous émerger autant d'incidents pendant la classe, mais aussi qu'ils sont nombreux. Rappelons que nous avons défini six formes d'incidents : les erreurs, les questions (des élèves), les réponses incomplètes, les silences, les réponses aux questions hors de portée des élèves et les désaccords entre élèves alors qu'aucun n'a tort.

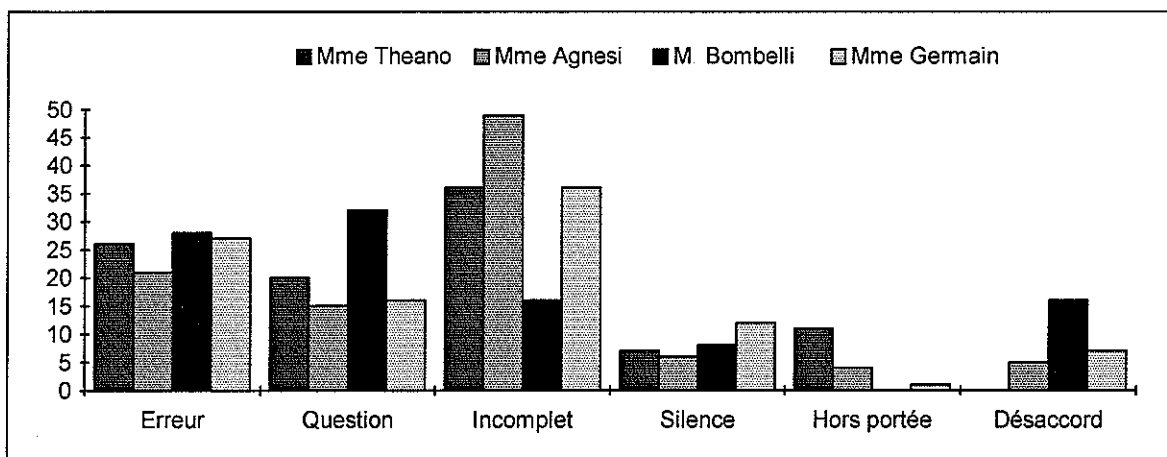
Avant même de comptabiliser les différentes formes d'incidents, on peut s'attendre à ce que les trois premières dominent nettement l'effectif global. En fait les résultats sont un peu plus nuancés. Pour faciliter la lecture des résultats, nous avons indiqué ceux qui concernent l'ensemble des professeurs à partir des résultats bruts ce qui revient à respecter le poids constitué par l'effectif total des incidents. Cette pondération n'est pas gênante car *a priori*, la nature des incidents ne semble pas dépendre de la durée de la séquence. Cette hypothèse sera d'ailleurs confirmée par l'analyse chronologique des adaptations des professeurs.

Tableau 34 Nature des incidents survenus durant les séquences observées, répartition.

	Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain	Ensemble
Erreur	26%	21%	28%	27%	25%
Question	20%	15%	32%	16%	18%
Incomplet	36%	49%	16%	36%	38%
Silence	7%	6%	8%	12%	9%
Hors de portée	11%	4%	0%	1%	4%
Désaccord	0%	5%	16%	7%	6%

Une lecture globale du tableau obtenu laisse apparaître une répartition moyenne des formes d'incidents les plus importantes : environ un cinquième de questions, un quart d'erreurs et un tiers de réponses incomplètes. Les séquences que nous avons observées obtiennent des répartitions assez proches de cette répartition de l'ensemble. Si l'on considère cette répartition comme une tendance, tendance globalement respectée par les quatre professeurs que nous avons observés, il est intéressant pour l'analyse de repérer les résultats qui s'en écartent et que nous interprétons comme des indicateurs de pratiques individuelles des enseignants.

Afin de mieux les visualiser, nous avons imprimé en caractères gras les chiffres atypiques par rapport à ceux de l'ensemble dans le tableau et nous avons dressé un histogramme de ces résultats.



Graphique 18. Répartition des formes d'incidents apparus dans les séquences observées.

Nous remarquons ainsi, indiquées en caractères gras dans le tableau précédent, trois valeurs atypiques parmi les formes dominantes d'incidents et deux valeurs atypiques parmi les trois autres formes d'incidents. Nous allons commencer par ces deux dernières valeurs en reprenant l'ordre habituel d'observation des professeurs.

Madame Theano propose, beaucoup plus que ses trois autres collègues, des questions dont la réponse est hors de portée d'un élève de sixième. Ce constat s'explique par le choix stratégique de Madame Theano qui a construit son enseignement de la multiplication des décimaux sur l'utilisation des ordres de grandeur pour placer la virgule au produit. Or ce professeur s'est contenté d'une approche intuitive des ordres de grandeur qui n'est pas suffisante pour mener à bien théoriquement ce projet. D'une part les élèves ne savent pas estimer les décimaux positifs inférieurs à l'unité, d'autre part ils ne savent pas comparer l'estimation du produit obtenue avec les différents résultats possibles suivant la position de la virgule. Il nous avait semblé (et Madame Theano nous l'a confirmé) que le professeur n'avait pas approfondi théoriquement le problème mais avait constaté, par son expérience personnelle, que sa démarche était justifiable sinon justifiée. En choisissant peut-être trop hâtivement les exercices dans le manuel, Madame Theano s'est retrouvée confrontée à des situations qu'elle n'avait pas prévues, ce qui explique le nombre de questions dont la réponse est hors de portée des élèves de sixième. Cette explication montre que le résultat atypique est un phénomène directement lié à la leçon étudiée et donc ne nous semble pas devoir être attribué à une volonté pédagogique particulière de Madame Theano.

Dans la séquence de Monsieur Bombelli, 16% des incidents proviennent d'un désaccord entre élèves alors qu'aucun d'entre eux n'a tort. Ici encore, la stratégie d'enseignement de la multiplication des décimaux choisie par Monsieur Bombelli nous semble expliquer ce résultat atypique. Ce professeur avait choisi de privilégier la technique opératoire. Aussi, plus que ses autres collègues, Monsieur

Bombelli a renforcé l'importance de la technique et donc celle des divergences causées par les consignes différentes qui ont été données aux élèves à l'école élémentaire pour multiplier deux nombres entiers ou un décimal par un entier. Faut-il laisser un espace vide, marquer un point ou écrire un zéro pour décaler les produits partiels ? Faut-il écrire une ligne de zéro ou procéder à un décalage supplémentaire lorsque le multiplicateur contient un zéro intercalaire ? Faut-il traiter normalement ou seulement à la fin le zéro final ou initial d'un facteur ? Faut-il aligner les chiffres des deux facteurs en respectant les colonnes du système décimal auxquels ils appartiennent ? Autant de questions que Monsieur Bombelli n'avait pas prévu d'approfondir et qui ont animé le déroulement de sa séquence.

Ces deux valeurs atypiques s'expliquent donc par le projet du professeur.

Les trois valeurs atypiques qui correspondent aux incidents les plus fréquents ne s'expliquent pas, en revanche, par des choix liés au scénario. La séquence de Madame Agnesi et celle de Monsieur Bombelli s'opposent par les incidents issus de réponses incomplètes : ils sont sur-représentés dans la première séquence et sous-représentés dans la seconde. On retrouve une opposition de ces deux séquences par l'importance générale des incidents. En effet, celle de Madame Agnesi présente à la fois le taux horaire d'incidents et le nombre moyen d'incidents pour dix activités (fictives) de même durée les plus élevés, alors que celle de Monsieur Bombelli présente les deux chiffres les plus bas. Cette constatation ne suffit pas à expliquer la différence concernant les incidents causés par des réponses incomplètes. Néanmoins, il semble que si Madame Agnesi laisse facilement ses élèves s'exprimer, peut-être que ceux-ci proposent des réponses moins abouties qu'ils le pourraient. Il sera donc intéressant de croiser ce chiffre avec le mode de gestion de ces incidents pour savoir si Madame Agnesi complète elle-même ces réponses ou bien si elle relance l'activité en laissant à la charge des élèves l'élaboration de réponses abouties.

Une dernière remarque concerne la sur-représentation des questions dans la séquence de Monsieur Bombelli. Ce résultat semble confirmer l'hypothèse que ce professeur demande des réponses plus abouties, les élèves démunis seraient alors plus enclins à questionner leur professeur plutôt que de proposer une réponse incomplète. Là encore, il sera intéressant de croiser ce chiffre avec le mode de gestion des questions par Monsieur Bombelli pour apprécier si ces constats émanent d'une réelle préoccupation pédagogique.

De façon plus générale, cette liberté "mesurée" laissée par les professeurs à l'apparition d'incidents durant le déroulement de leur séquence semblent correspondre à des choix pédagogiques qui dessinent des tendances personnelles de "perméabilité" aux incidents. Ces tendances pourraient être perçues par les élèves et jouer un rôle de régulateur du fonctionnement de la classe.

La gestion des incidents, tendances générales

Étudions comment les professeurs ont géré les incidents que nous avons relevés dans les séquences observées. Nous n'étudierons pas le nombre de gestions des professeurs puisque, par définition d'une adaptation, il correspond exactement

au nombre d'incidents. Nous allons donc décrire et comparer la répartition des différents modes de gestions pour chacun des professeurs.

Tableau 35. Répartition des différents modes de gestions pour chaque professeur

	Theano	Agnesi	Bombelli	Germain	Ensemble
Changer d'intervenant	2%	6%	8%	12%	8%
Ignorer	14%	1%	24%	4%	7%
Répondre	18%	40%	44%	18%	27%
Guider	9%	14%	0%	5%	8%
Faciliter	4%	2%	0%	7%	4%
demande d'Approfondir	20%	14%	0%	34%	22%
Enrichir	20%	19%	12%	8%	14%
reprendre de façon Neutre	14%	3%	12%	12%	10%

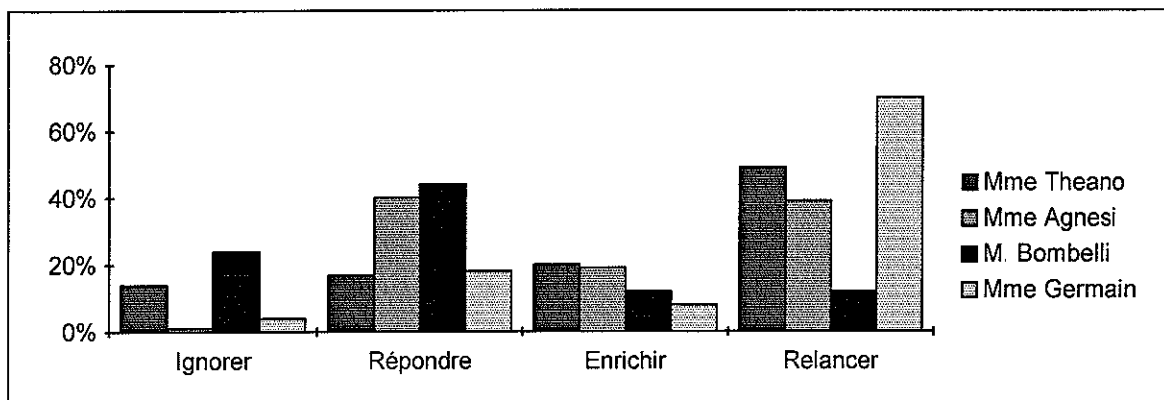
Les résultats obtenus sont très hétérogènes, les professeurs choisissent de façon très différente leurs modes de gestion des incidents. "Reprendre de façon neutre" la réponse de l'élève est le seul mode de gestion qui, sauf pour Madame Agnesi, est utilisé avec la même proportion par les professeurs.

Afin de rendre plus lisible la manière de gérer les incidents de chaque enseignant, nous allons, dans un premier temps, procéder à des regroupements et classer les gestions suivant quatre fonctions : Ignorer, Répondre, Enrichir ou Relancer. Les trois premières fonctions correspondent aux trois modes de gestion qui ont la même dénomination. Les autres modes ont été regroupés car, de façon plus ou moins fermée, le professeur "relance" l'activité d'un élève ou d'un groupe d'élèves lorsqu'il reprend une réponse de façon neutre, lorsqu'il change d'intervenant, lorsqu'il guide la démarche d'un élève ou facilite sa tâche et lorsqu'il demande d'approfondir la réponse.

Dans un second temps nous examinerons comment les professeurs relancent l'activité de la classe après un incident.

Gestion des incidents : les tendances des professeurs

Les résultats obtenus concernant la répartition des quatre fonctions de la gestion des incidents sont représentés ci-dessous.



Graphique 19. Répartition des fonctions des modes de gestion des incidents pour chaque professeur

Le graphique obtenu montre que les professeurs privilégient une ou deux fonctions des modes de gestion des incidents, fonctions auxquelles ils recourent plus

fréquemment, mais ces fonctions ne sont pas les mêmes pour les quatre professeurs que nous avons observés dans leur classe. Nous interprétons ces répartitions comme des “tendances” des professeurs pour gérer les incidents qui surviennent dans leur classe.

Ainsi, la tendance de Madame Theano est de relancer l'activité de la classe, ce qu'elle fait une fois sur deux ; sinon, de façon pratiquement équivalente, elle ignore, répond ou enrichit. Madame Agnesi possède deux modes de gestion privilégiés qu'elle utilise de façon équivalente environ deux fois sur cinq chacun : elle répond ou elle relance ; sinon, elle enrichit. On retrouve ces deux modes de gestion privilégiés dans la pratique de Madame Germain mais cette enseignante les utilise quantitativement de façon très différente : sur dix interventions, on trouve en moyenne sept relances et deux réponses ; une fois sur dix seulement, Madame Germain ignore ou enrichit. Monsieur Bombelli, en revanche, gère les incidents de façon très particulière par rapport à ses collègues : en moyenne, il répond deux fois sur quatre et il ignore la troisième fois ; sinon il enrichit ou relance. Ce professeur laisse donc apparaître de nombreux incidents mais sa façon de les gérer, comparée à celle de ses collègues, paraît assez “magistrale”.

Madame Germain et Madame Theano sont les deux professeurs dont la gestion par des relances est nettement dominante. Madame Theano semble avoir eu plus souvent besoin de recourir à des modes de gestion plus fermés à cause du problème théorique que lui a posé l'utilisation trop intuitive des ordres de grandeur dans sa stratégie d'enseignement. Rappelons que l'année où nous avons procédé à nos observations, les professeurs enseignaient pour la première fois de leur carrière la multiplication des nombres décimaux et Madame Theano n'avait peut-être pas mesuré les difficultés engendrées par la stratégie qu'elle avait élaborée. Madame Agnesi relance ou répond, l'importance des “réponses” s'explique sans doute par le nombre important d'incidents que ce professeur laisse apparaître. Rappelons que c'est Madame Agnesi qui obtient le nombre moyen d'incidents par heure ou pour dix activités le plus élevé. Monsieur Bombelli, en revanche est le professeur qui gère de façon la plus fermée les incidents qui surviennent durant le déroulement de sa séquence. Cette gestion est cohérente avec le scénario qu'il avait élaboré, ce professeur souhaitait simplement exposer et justifier la technique opératoire puis donner aux élèves quelques exercices d'entraînement.

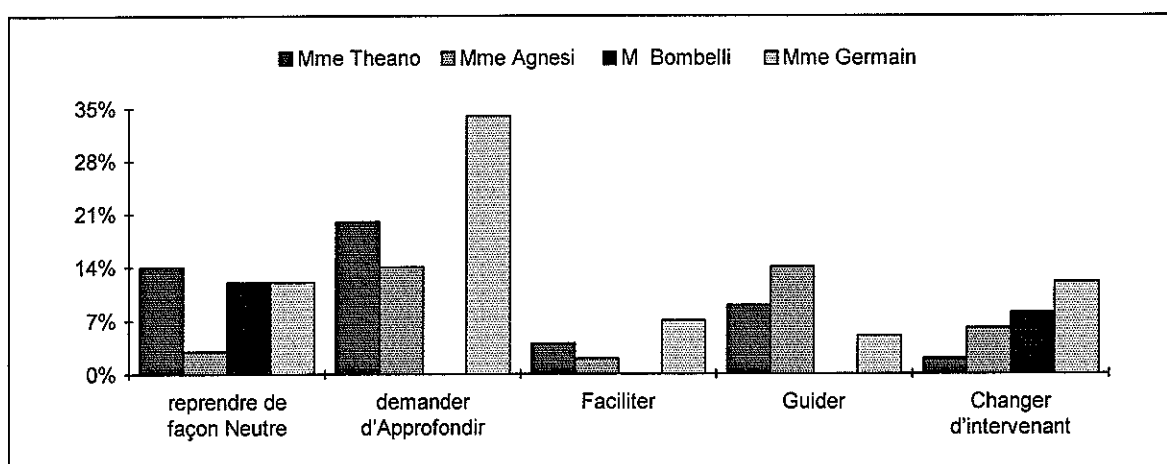
Les effectifs importants des “relances” justifient que nous les étudions spécifiquement.

Comment les professeurs “relancent-ils” l'activité de la classe ?

Pour analyser les modes de gestion de type “relance” des professeurs, nous supposons que le professeur a jugé qu'il ne devait pas laisser passer l'incident provoqué par une réaction de la classe sans qu'elle tente de répondre elle-même au problème qui se pose, avec une aide éventuelle, autrement dit qu'il ne devait ni ignorer, ni répondre ni même enrichir. Dans ces conditions, la “relance” se perçoit comme un effort du professeur pour laisser la classe travailler à la recherche de cette réponse, un effort car cette recherche peut conduire les élèves à s'écarter de

l'itinéraire prévu, un effort aussi car les questions nécessitent parfois d'improviser des nouveaux échanges. En analysant les gestions de la catégorie "relance" nous voulons déterminer quel "effort supplémentaire" les professeurs fournissent pour laisser les élèves combler eux-mêmes le décalage entre leur activité et l'activité attendue.

Au sein même de la catégorie "relance", les modes de gestion n'ont pas la même ouverture et se distinguent par l'existence ou non d'un réel échange entre le professeur et les élèves. Nous avons donc classé les cinq modes de deux façons. D'une part nous avons repris l'ordre, du plus ouvert au plus fermé, et d'autre part nous les avons partagés en deux groupes, ceux qui nécessitent une interaction directe avec les élèves et ceux qui n'en nécessitent pas. Voici la répartition de ces cinq modes de gestion pour chacun des professeurs observés.

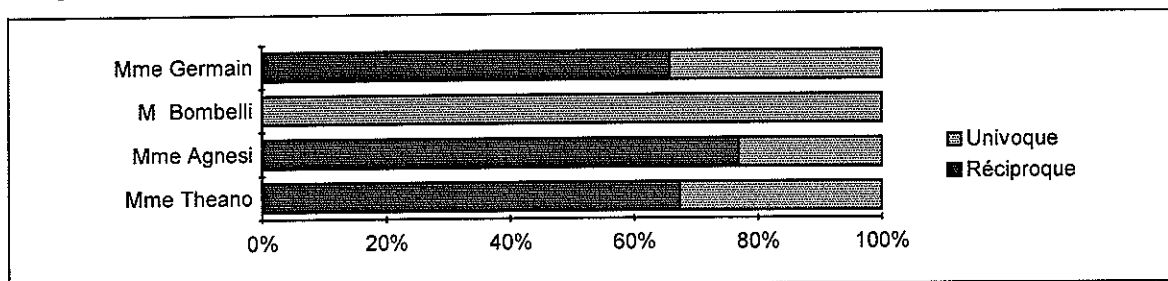


Graphique 20. Répartition des cinq modes de gestion qui relancent l'activité de la classe

De gauche à droite, le graphique propose un classement des modes de gestion suivant l'ouverture qu'ils permettent à la relance de l'activité de la classe. Si l'on excepte le cas de Monsieur Bombelli, on remarque que les relances sont à l'image de la gestion globale des incidents par les professeurs. Ainsi, Madame Germain est le professeur qui sollicite le plus le travail autonome de ses élèves, vient ensuite Madame Theano puis Madame Agnesi. Remarquons que Madame Agnesi était, parmi les trois, l'enseignante qui "répondait" le plus, c'est encore elle qui "guide" le plus ses élèves pour qu'ils fournissent la réponse attendue par le professeur. Le cas de Monsieur Bombelli est particulier car il n'utilise que deux modes de gestion des incidents pour relancer l'activité des élèves de sa classe. Jamais il ne demande d'approfondissement, jamais il ne facilite la tâche de l'élève ou ne le guide dans sa démarche. Or ces modes de gestions sont précisément ceux qui reposent sur une interaction directe avec les élèves ; changer d'intervenant ou reprendre de façon neutre n'instaure pas un réel dialogue.

Pour aider la comparaison des gestions de Monsieur Bombelli avec celles de ses trois collègues, nous allons dresser un graphique où les modes de gestion de type "relance" sont classés en deux groupes suivant qu'elles nécessitent ou non des interactions directes avec les élèves, autrement dit suivant que la communication entre le professeur et sa classe est réciproque ou univoque. Le

groupe "Réciproque" comporte les trois modes de gestion "demander un approfondissement", "faciliter" et "guider". Le groupe "Univoque" comporte les deux autres modes de gestions "changer d'intervenant" et "reprendre de façon neutre". Les résultats obtenus sont très éclairants.



Graphique 21. Communication entre le professeur et sa classe, "Réciproque" ou "Univoque"

On remarque que Monsieur Bombelli n'utilise jamais de mode de gestion qui lui demande d'interagir avec ses élèves. L'analyse globale des gestions des incidents avait permis de montrer un côté "magistral" de ce professeur, qui pratiquement neuf fois sur dix, ignore, enrichit ou répond. Il apparaît donc que ce professeur fonctionne en maintenant une distance assez grande avec les élèves de sa classe. Ce caractère le distingue radicalement de ses trois autres collègues qui, environ trois fois sur quatre, choisissent un mode de gestion qui repose sur une communication réciproque avec leurs élèves.

Finalement, l'analyse de l'ensemble des modes de gestion des incidents sollicités dans les quatre séquences observées montre, chez chaque professeur, des dominantes qui dessinent, pour les interprétations, des tendances générales différentes pour gérer les incidents. Ces tendances sont liées à l'autonomie laissée aux élèves dans leur activité et à l'interaction entre le professeur et sa classe. On constate qu'une dimension personnelle intervient fortement dans ces échanges.

Afin de compléter notre analyse des modes de gestion des incidents, nous allons croiser ces résultats avec ceux qui concernent les incidents, nous voulons déterminer si les modes de gestions restent conformes à la tendance générale quels que soient les incidents ou si les professeurs, suivant la nature des incidents, renforcent ou atténuent cette tendance générale. Du point de vue de l'interprétation, nous dirons qu'une modification de la tendance générale de gestion d'un professeur en fonction de la nature des incidents constitue une compensation locale²⁸². Dans le paragraphe suivant, nous allons donc étudier la

²⁸² Dans cette recherche, rappelons que nous supposons une cohérence interne des pratiques enseignantes de chaque professeur. Malgré les découpages de la réalité auxquels nous procédons, il nous semble important de ne pas négliger le fait que derrière toute pratique enseignante, il y a un professeur, c'est-à-dire un individu en situation de travail. Cette hypothèse de cohérence des pratiques aide aux interprétations quand les analyses se situent au bon niveau pour le professeur considéré, elle permet de déterminer des logiques personnelles qui expliquent la conduite d'un professeur. Quand des résultats obtenus par des croisements nous semblent contredire ces logiques, nous considérons la contradiction apparente comme une compensation, une exception pour laquelle nous ne disposons pas de moyen qui permette de lever la

gestion en fonction des incidents, nous ne traiterons pas le problème inverse (les incidents en fonction de la gestion) à cause de la chronologie des événements : la gestion, décidée par le professeur, intervient après l'incident. Comme nous l'avons déjà signalé, on peut penser que la tendance générale de gestion des incidents est repérée par les élèves et joue un rôle de régulateur dans la classe. Nous n'avons cependant pas conduit cette analyse car nos observations ont eu lieu en novembre et décembre, c'est-à-dire suffisamment tard dans l'année scolaire pour que des professeurs expérimentés aient leur classe "en main" mais sans doute trop tôt pour que les élèves ajustent leurs incidents aux modes de gestion de leur professeur.

Les modes de gestion suivant les incidents : recherche de compensations

Rappelons que certains couplages incident/gestion ont été repérés comme étant dénués de sens pédagogique. Il ne sera pas étonnant de constater de ce fait quelques écarts avec une tendance plus générale de gestion des incidents par les professeurs. Hormis ces quelques couplages impossibles, nos observations des professeurs dans leur classe nous laissaient penser que les modes de gestion des incidents sont *a priori* indépendants de la nature des incidents qui surviennent durant la séquence.

Par ailleurs, la façon de gérer un incident dépend éventuellement de la place de cet incident par rapport au scénario prévu : un professeur peut, par exemple, plus facilement demander à un élève d'attendre une autre séance pour répondre à sa question si cette question ne porte pas sur l'objet de la leçon alors que l'élève s'accommodera mal d'une telle réponse si sa préoccupation concerne directement son activité présente c'est-à-dire si elle concerne la stratégie d'enseignement du professeur. Pour analyser comment les professeurs gèrent les incidents suivant leur nature, nous avons donc écarté tous ceux qui ne concernaient pas directement la stratégie d'enseignement.

Indiquons maintenant comment nous avons procédé pour croiser les résultats concernant les incidents et leur gestion puis pour interpréter ces croisements.

La recherche de compensations locales, un problème méthodologique

Pour répondre à ce problème, nous allons présenter, pour chaque professeur, un tableau qui croise le mode de gestion des incidents et leur nature. Chaque case de ce tableau contient donc l'effectif de tel mode de gestion pour des incidents de telle nature qui ont été constatés durant le déroulement de la séquence de ce professeur. Par exemple, la case intersection de la colonne "R" et de la ligne "Q" contient le nombre de fois où le professeur a choisi de "Répondre" aux incidents de nature "Question" qui sont apparus durant la séquence.

Supposons (au sens mathématique) que le mode de gestion des incidents soit indépendant de la nature de ces incidents. Nous pourrions alors considérer le mode de gestion et la nature comme deux variables aléatoires indépendantes associées

contradiction parce que les analyses ne sont pas effectuées au niveau adapté, niveau dont nous supposons tout de même l'existence, en conséquence de l'hypothèse de cohérence des pratiques.

aux incidents. En utilisant les effectifs des modes de gestion et ceux des différentes natures d'incidents, nous pourrions donc calculer théoriquement l'effectif de chaque mode de gestion pour chaque nature d'incident.

Ainsi, pour un professeur, la confrontation du tableau des effectifs constatés et du tableau des effectifs théoriques, calculés sous l'hypothèse d'indépendance du mode de gestion et de la nature des incidents, nous permettra de déceler d'éventuelles modifications de sa tendance générale en fonction de la nature des incidents. Mais à partir de quels écarts entre les effectifs théoriques et les effectifs constatés peut-on affirmer que le mode de gestion n'est pas indépendant de la nature des incidents ? Nos résultats ne sont pas assez nombreux pour que nous puissions utiliser correctement un test d'indépendance par la méthode dite du χ^2 . Ce test, parce qu'il repose sur une comparaison globale du tableau des effectifs constatés et du tableau théorique, nous aurait permis, le cas échéant, de fonder l'intérêt d'observer l'écart entre un résultat constaté et un résultat théorique, et de l'interpréter en retournant éventuellement à la narration de la séquence pour obtenir des informations plus précises. Nous avons donc eu recours à un procédé plus empirique.

Afin de pointer directement les résultats qui nous intéressent, nous avons dressé un seul tableau et nous avons indiqué dans chaque case, sous l'effectif constaté et en petits caractères, l'effectif théorique qui correspond à l'indépendance des deux variables aléatoires que sont le mode de gestion et la nature des incidents. De façon empirique, nous avons considéré que la valeur constatée et la valeur théorique présentent un écart significatif si cet écart est supérieur à 20% de la valeur théorique et s'il est aussi (à cause des faibles effectifs) strictement supérieur à 1. Pour faciliter la lecture de ces écarts, nous les avons indiqués en caractère gras. Nous avons en outre précisé si l'effectif observé est supérieur ou inférieur à la valeur théorique. Le fait que des écarts significatifs se compensent sur une même ligne (c'est-à-dire pour un même incident) indique une modification de la tendance générale en fonction de la nature de l'incident.

La méthode employée nécessite de dissocier l'étude de chaque professeur. Nous tirerons ensuite un bilan plus global. Indiquons que la dernière ligne du tableau (la marge inférieure) reprend les effectifs des différents modes de gestion et que l'analyse de cette ligne est celle que nous avons effectuée lors de l'étude des tendances générales des professeurs pour gérer les incidents.

La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Theano

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant laissent apparaître quelques écarts entre les effectifs constatés et les valeurs théoriques. Nous présentons donc ces résultats puis nous examinons chaque ligne dans laquelle apparaissent des écarts qui se compensent entre les effectifs constatés et les valeurs théoriques.

Tableau 36. Modes de gestion des incidents en fonction de leur nature, cas de Madame Theano

I \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
E	0 0,2173	1 1,3043	0 < 1,3043	0 0,8695	0 0,4347	5 > 1,9565	1 < 2,3913	3 > 1,5217	10
Q	0 0,1956	3 > 1,1739	1 1,1739	0 0,7826	1 0,3913	1 1,7608	1 < 2,1521	2 1,3695	9
I	0 0,3695	1 < 2,2173	4 > 2,2173	2 1,4782	0 0,7391	2 < 3,3260	6 > 4,0652	2 2,5869	17
S	0 0,0869	0 0,5217	1 0,5217	2 > 0,3478	1 0,1739	0 0,7826	0 0,9565	0 0,6087	4
P	1 0,1304	1 0,7826	0 0,7826	0 0,5217	0 0,2608	1 1,1739	3 > 1,4347	0 0,9130	6
	1	6	6	4	2	9	11	7	46

Les deux lignes les plus riches en écarts sont celles qui portent sur les erreurs des élèves et sur leurs réponses incomplètes. Pour les autres formes d'incidents, les écarts sont assez faibles ce qui signifie que Madame Theano suit sa tendance générale de gestion des incidents.

En cas d'erreur d'un élève, Madame Theano "relance" plus qu'elle ne le fait en moyenne, elle répète la réponse erronée pour permettre à la classe de réagir, et en particulier l'élève qui a commis l'erreur ; elle demande un approfondissement complémentaire de la réponse. Remarquons qu'elle ne répond jamais à la place de l'élève et qu'elle ne va jamais chercher la bonne réponse chez un autre élève. Madame Theano semble donc gérer les incidents dus à une erreur en les exploitant pédagogiquement pour que les élèves comprennent les causes de leur erreur. Ce choix nous apparaît comme un "renforcement" de la tendance générale de Madame Theano.

En revanche, la gestion des incidents causés par des réponses incomplètes apparaît comme une forme d'atténuation de la tendance générale. En effet, Madame Theano répond davantage à la place des élèves, elle reprend et complète leur réponse. On remarquera enfin que devant le silence d'un élève interrogé, plus souvent qu'elle ne le fait en moyenne, l'enseignante choisit de guider l'élève pour qu'il produise la réponse attendue.

La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Agnesi

Utilisons la même méthode pour étudier comment Madame Agnesi adapte sa tendance générale de gestion des incidents en fonction de leur nature. Comme pour Madame Theano, nous observons des écarts entre les effectifs constatés et les effectifs théorique dans les deux lignes qui correspondent aux erreurs et aux réponses incomplètes.

Tableau 37. Modes de gestion des incidents en fonction de leur nature, cas de Madame Agnesi

I \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
E	1 1,1038	1 0,2207	8 > 6,4025	3 2,3375	1 0,425	0 < 2,3375	1 < 3,1875	2 > 0,6375	17
Q	0 0,5844	0 0,1168	5 > 3,3896	1 1,2375	0 0,225	1 1,2375	2 1,6875	0 0,3375	9
I	1 < 2,5324	0 0,5064	12 14,688	4 5,3625	1 0,975	10 > 5,3625	11 > 7,3125	0 < 1,4625	39
S	3 > 0,3246	0 0,0649	0 < 1,8831	2 > 0,6875	0 0,125	0 0,6875	0 0,9375	0 0,1875	5
P	0 0,1948	0 0,0389	2 1,1298	1 0,4125	0 0,075	0 0,4125	0 0,5625	0 0,1125	3
D	0 0,2597	0 0,0519	2 1,5064	0 0,55	0 0,1	0 0,55	1 0,75	1 0,15	4
	5	1	29	11	2	11	15	3	77

Madame Agnesi ne gère pas les erreurs et les réponses incomplètes comme le fait sa collègue. En cas d'erreur, plus qu'elle ne le fait en moyenne, l'enseignante apporte la réponse correcte et elle ne demande jamais d'approfondir. Elle relance aussi en répétant l'erreur pour que sa classe réagisse. En revanche, en cas de réponse incomplète, Madame Agnesi demande de compléter deux fois plus qu'elle ne le ferait si elle suivait sa tendance générale. L'examen de la narration de sa séquence montre que c'est souvent pour que les réponses soient argumentées. Sinon, elle ne relance pas l'activité de la classe en répétant simplement la réponse incomplète de l'élève, elle préfère l'enrichir en la complétant elle-même. Remarquons enfin que si un élève interrogé ne répond pas, elle le guide ou bien elle change d'intervenant pour obtenir la réponse attendue mais elle n'apporte pas elle-même cette réponse.

Ces résultats montrent que Madame Agnesi, comme Madame Theano, adapte sa tendance générale de gestion des incidents à leur nature. Il est intéressant de constater que ces deux professeurs effectuent des choix opposés. Ceux de Madame Agnesi apparaissent comme un moyen de laisser aux élèves une certaine autonomie de travail à condition que cela ne soit pas trop coûteux en temps c'est-à-dire lorsqu'ils ont déjà exprimé une partie de la réponse. Madame Theano s'expose davantage à des difficultés pédagogiques puisqu'elle permet à ceux qui se trompent d'approfondir leur réflexion.

La gestion des incidents en fonction de leur nature par Monsieur Bombelli

Contrairement à ce que nous avons observé jusqu'à présent, les résultats obtenus concernant la gestion des incidents par Monsieur Bombelli en fonction de la nature de ces incidents montrent que ce professeur ne change pas sa tendance générale de gestion. Les deux exceptions semblent liées au cumul des écarts dus au fait que les valeurs théoriques ne sont pas entières alors que les valeurs constatées le sont. En effet, il n'y a pas de compensation au sein des lignes, les effectifs observés sont conformes aux valeurs théoriques.

Tableau 38. Modes de gestion des incidents en fonction de leur nature, cas de Monsieur Bombelli

I \ G	C	I	R	E	N	
E	0 0,5833	2 1,75	3 2,9167	0 0,875	2 > 0,875	7
Q	0 0,5833	2 1,75	3 2,9167	1 0,875	1 0,875	7
I	0 0,3333	0 1	2 1,6667	2 > 0,5	0 0,5	4
S	1 0,1666	0 0,5	1 0,8333	0 0,25	0 0,25	2
D	1 0,3333	2 1	1 1,6667	0 0,5	0 0,5	4
	2	6	10	3	3	24

Nous concluons que Monsieur Bombelli suit parfaitement sa tendance générale de gestion des incidents quelle que soit leur nature.

La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Germain

Le tableau de valeurs présente des écarts nombreux.

Tableau 39. Modes de gestion des incidents en fonction de leur nature, cas de Madame Germain

I \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
E	2 2,8426	1 1,0337	4 3,8764	1 1,2921	0 < 1,8089	11 > 7,4943	1 1,5505	3 2,5842	23
Q	3 > 1,9775	1 0,7191	5 > 2,6966	0 0,8988	1 1,2584	2 < 5,2134	1 1,0786	3 > 1,7977	16
I	2 < 3,9550	0 < 1,4382	2 < 5,3932	3 > 1,7977	3 2,5168	15 > 10,426	4 > 2,1573	3 3,5955	32
S	4 > 1,3595	0 0,4943	1 1,8539	1 0,6179	3 > 0,8651	2 < 3,5842	0 0,7415	0 1,2359	11
P	0 0,1235	1 0,0449	0 0,1685	0 0,0561	0 0,0786	0 0,3258	0 0,0674	0 0,1123	1
D	0 0,7415	1 0,2696	3 > 1,0112	0 0,3370	0 0,4719	1 1,9550	0 0,4044	1 0,6741	6
	11	4	15	5	7	29	6	10	89

L'examen des résultats concernant la gestion des incidents par Madame Germain en fonction de leur nature montre clairement qu'elle adapte sa tendance générale pour optimiser l'autonomie de ses élèves lorsqu'ils se retrouvent en difficulté.

Quand Madame Germain est confrontée à un incident dont l'origine est une erreur d'un élève ou d'un groupe d'élèves, plus qu'elle ne le ferait en suivant sa tendance générale de gestion des incidents, cette enseignante demande d'approfondir et de compléter le travail. Elle ne facilite jamais la tâche prescrite. De même, lorsque la réponse n'est pas complète, Madame Germain ignore ou répond à la place des élèves moins qu'elle ne le fait en moyenne, mais elle demande d'approfondir ou de compléter le travail, éventuellement elle guide la démarche de l'élève ou récupère et complète sa réponse. D'une certaine façon, Madame Germain cumule les efforts pédagogiques que nous avons constatés chez Madame Theano et chez Madame Agnesi.

La gestion des incidents en fonction de leur nature montre que, dans le cas où les incidents ont pour origine des questions ou le silence d'un élève, Madame Germain atténue sa tendance générale. En cas de question, plus qu'elle ne le fait en moyenne, Madame Germain répond directement ou demande la réponse à quelqu'un d'autre. Quand un élève ne sait pas répondre, plus fréquemment, elle facilite la tâche de l'élève interrogé ou change d'intervenant et, moins souvent, elle sollicite un approfondissement de sa réflexion, elle facilite sa tâche.

La gestion des incidents en fonction de leur nature, bilan

Le bilan est donc assez hétérogène. Monsieur Bombelli ne change pas sa tendance générale de gestion des incidents en fonction de la nature de ces incidents. En revanche, les trois autres professeurs semblent concentrer davantage leurs efforts pédagogiques sur certaines difficultés des élèves. Ainsi Madame Theano est plus exigeante avec les élèves qui commettent des erreurs et l'est moins lorsqu'ils produisent une réponse incomplète alors que Madame Agnesi fait exactement le contraire. Madame Germain, quant à elle et en reprenant ses propres termes, "embête" davantage ses élèves dans les deux cas : qu'ils commettent une erreur ou qu'ils produisent une réponse incomplète. En compensation, sa gestion sera plus fermée quand ils posent des questions ou quand ils ne savent pas répondre.

Ces modifications de la tendance générale de gestion des incidents indiquent clairement des choix pédagogiques qui viennent en renforcement de la tendance générale. Les atténuations observées peuvent s'expliquer de deux façons. Pour des raisons simplement arithmétiques, la méthode retenue pour montrer les modifications impliquent que ces modifications se compensent. On peut aussi penser que des contraintes professionnelles, liées à l'exercice du métier, expliquent la nécessité de ces atténuations. On ne peut ignorer qu'il n'est pas confortable, pour un enseignant, de demander trop souvent à ses élèves d'approfondir leur travail. Madame Germain l'explicite d'ailleurs à un moment de sa séquence en disant qu'elle a "embêté" ses élèves pour qu'ils produisent des réponses mieux construites. On ne peut ignorer non plus que le fait de demander à un élève d'approfondir son travail prend du temps, surtout quand l'élève ne sait pas répondre ou commet une erreur. Or, d'une part, le temps d'enseignement est compté et, d'autre part, s'occuper d'un élève ou d'un groupe d'élèves en particulier risque de démobiliser l'autre partie de la classe.

Finalement, nous avons montré que les enseignants s'adaptent souvent aux réactions de leurs élèves. Le nombre d'incidents et leur nature varient d'un professeur à l'autre. La façon générale de gérer ces incidents varie aussi d'un professeur à l'autre. Ces différences font apparaître des choix pédagogiques qui concernent l'autonomie laissée aux élèves durant leur apprentissage ainsi que les échanges entre le professeur et sa classe. En outre les professeurs modifient leur gestion générale des incidents en fonction de leur nature. Certaines modifications ont comme objectif d'optimiser les apprentissages des élèves, d'autres correspondent à des choix "économiques" qui permettent aux professeurs de

gérer leur classe sans se mettre trop souvent dans une position inconfortable par rapport à leurs élèves

On peut aussi penser que d'autres contraintes pèsent sur l'action pédagogique des enseignants. La première d'entre elles est sans doute la volonté d'animer le scénario qu'ils ont élaboré pour répondre à la demande du programme. Et cela dans un temps qui est compté, voilà certainement la deuxième des contraintes. Vient aussi le désir de faire réussir les élèves, éventuellement la volonté de respecter des engagements pris avec les collègues, de ne pas déplaire aux parents d'élèves, au chef d'établissement, à l'inspecteur ... Dans le cadre de cette recherche, nous nous limiterons à l'examen de l'influence des deux premières contraintes sur les adaptations des professeurs aux réactions de leurs élèves.

3. Influence du scénario prévu sur les adaptations

L'étude des activités effectives des élèves avait montré une cohérence entre le scénario prévu et le déroulement de la séquence. Pour examiner l'influence du scénario sur les adaptations des professeurs, nous allons croiser les données concernant les types d'activités des élèves avec celles relatives aux incidents, leur quantité et leur nature, et au mode de gestion de ces incidents. Suivant les activités des élèves et leur place par rapport au scénario, le nombre et la nature des incidents sont-ils modifiés, le mode de gestion de ces incidents est-il différent de la tendance générale du professeur ? Dans le prochain paragraphe nous examinerons l'influence du temps sur les adaptations.

Toute réponse, même partielle, à ces questions représente une piste pour interpréter, en fonction des objectifs pédagogiques mais aussi en fonction des contraintes professionnelles, les choix des professeurs qui engendrent des écarts avec leur tendance générale pour gérer les incidents.

Quelle émergence des incidents en fonction du scénario prévu ?

Les tâches prescrites aux élèves sont elles-mêmes porteuses d'une ouverture aux incidents. Si le professeur organise une discussion avec sa classe ou s'il propose la résolution écrite d'un problème ou la lecture silencieuse d'une page du manuel, le nombre d'incidents qu'il aura à gérer sera vraisemblablement différent. Néanmoins, la liberté d'action du professeur pour permettre l'apparition d'incidents, voire pour les engendrer, ne doit pas être sous-estimée, et cela quelle que soit la tâche prescrite aux élèves. Supposons qu'un élève commette une erreur quand il place la virgule au produit de deux nombres décimaux, le professeur peut simplement la corriger, demander un approfondissement ou soumettre l'erreur à la critique des autres élèves de la classe. Ces différentes gestions seront alors elles-mêmes la source de nouveaux incidents qui seront plus ou moins nombreux.

Nous avons vu que les professeurs observés ont effectué des choix quantitatifs différents à propos des types d'activités, nous avons montré que ces choix étaient cohérents avec le scénario élaboré, nous nous interrogerons à nouveau pour savoir si une cohérence peut être établie entre ce scénario et le nombre d'incidents qui

apparaissent au cours des activités des élèves. Nous examinerons donc la variation du nombre d'incidents en fonction de leur place par rapport au scénario prévu puis en fonction de la catégorie d'activités des élèves.

Répartition des incidents suivant leur place par rapport au scénario

Pour une première approche du lien éventuel entre la liberté laissée à l'apparition d'incidents et le scénario prévu par l'enseignant, nous avons repéré, pour chaque incident, sa place par rapport au scénario de la séquence. Rappelons que nous avons distingué trois places possibles : " hors " du champ de la séquence, " dans " le champ mais " hors " de la stratégie d'enseignement et " dans " la stratégie d'enseignement. Les effectifs obtenus figurent dans le tableau suivant.

Tableau 40. Place des incidents par rapport au scénario prévu par les professeurs

Place / scénario	Hors Champ	Hors Stratégie	Dans la Stratégie
Mme Theano	6	4	46
Mme Agnesi	1	2	77
M. Bombelli	1	0	24
Mme Germain	6	0	89

L'importance des écarts montre que les incidents surviennent principalement lors d'activités qui concernent directement la stratégie d'enseignement du professeur. Ce résultat n'est pas étonnant car ces activités sont aussi celles qui dominent la séquence, les dynamiques propres à l'apprentissage de chaque élève ne les conduisent pas à s'écarter trop fréquemment de celle que le professeur imprime à toute la classe. Compte tenu de la faiblesse numérique des incidents qui ne concernent pas directement la stratégie d'enseignement du professeur, nous ne poursuivrons par leur analyse et nous nous contenterons de ce constat.

Examinons maintenant la répartition des incidents provoqués par l'intervention des élèves en fonction de leur activité.

Répartition des incidents suivant les catégories d'activité des élèves

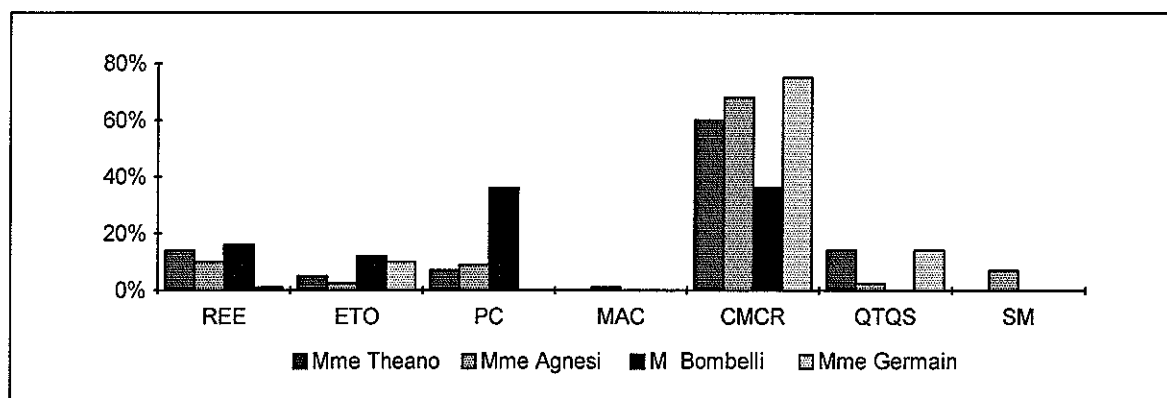
La perméabilité des enseignants aux incidents dépend-elle de la catégorie d'activité des élèves ? En répondant à cette question, nous obtiendrons des indications plus précises sur le lien que les professeurs observés ont établi entre l'apparition d'incidents et le scénario qu'ils avaient prévu. Afin d'obtenir des résultats exploitables, nous avons, pour chaque adaptation, repéré la catégorie de l'activité en cours des élèves. Ce repérage nous a permis de calculer, pour chaque professeur, la répartition des incidents suivant les types d'activités²⁸³. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

²⁸³ Les résultats complets figurent en annexe.

Tableau 41. Répartition des incidents (I) suivant le type d'activité (TA)

TA \ I	Mme Theano	Mme Agnesi	M. Bombelli	Mme Germain
REE	14%	10%	16%	1%
ETO	5%	2,5%	12%	10%
PC	7%	9%	36%	0%
MAC	0%	1%	0%	0%
CMCR	60%	68%	36%	75%
QTQS	14%	2,5%	0%	14%
SM	0%	7%	0%	0%

Afin d'en faciliter la lecture, nous avons dressé un histogramme de cette répartition.



Graphique 22. Histogramme des répartitions des incidents en fonction des catégories d'activités

Nous délaisserons les activités de détermination d'un produit de deux décimaux à l'aide de la machine à calculer (MAC) et les résolutions de problèmes issus de situations multiplicatives (SM) dont les fréquences sont trop faibles pour être interprétables. Notons seulement que des incidents lors des activités de la catégorie SM émergent uniquement dans la classe de Madame Agnesi qui est le seul professeur à avoir introduit la multiplication des décimaux avec des petits problèmes que certains élèves voulaient résoudre en procédant à des conversions.

Madame Germain obtient moins d'incidents que ses collègues lors des activités de révisions des acquis de l'Ecole élémentaire (REE). Cela tient sans doute au choix effectué par ce professeur. Les activités effectives de la catégorie REE correspondaient à l'utilisation de moyens pour élaborer les "petites règles pour faciliter des multiplications". Il ne s'agit donc pas d'exercices de révisions qui peuvent conduire à des incidents mais de réinvestissement de connaissances anciennes.

L'élaboration de la technique opératoire et des propriétés de la multiplication (ETO) montre une différence entre d'une part Madame Germain et Monsieur Bombelli, et d'autre part Madame Agnesi et Madame Theano qui en obtiennent moins que leurs deux collègues. Cette différence nous semble devoir être rapprochée de celle qui distingue aussi ces professeurs de la même façon : Madame Germain et Monsieur Bombelli avaient choisi d'établir la technique opératoire de la multiplication des nombres décimaux alors que Madame Agnesi et Madame Theano avaient choisi de la constater et/ou de l'admettre. Il semble normal que les

activités où les élèves constatent et admettent engendrent moins d'incidents que celles où ils élaborent une preuve ou même en suivent son élaboration.

Les activités de calcul écrit du produit de deux décimaux (PC) opposent Monsieur Bombelli à ses trois autres collègues : il est le seul professeur à laisser apparaître autant d'incidents durant les activités de cette catégorie. Rappelons que Monsieur Bombelli est aussi le seul professeur, parmi ceux que nous avons observés, qui avait choisi de traiter cette séquence en privilégiant l'aspect technique de la notion. Ainsi, les difficultés que pose la règle de la virgule apparaissent lors des activités de la catégorie PC chez Monsieur Bombelli et dans les activités de la catégorie CMCR chez ses autres collègues.

Le graphique montre un consensus concernant les activités de calcul mental ou réfléchi (CMCR) qui sont traitées de façon analogue par trois professeurs quant à la possibilité laissée à l'apparition d'incidents. Seul Monsieur Bombelli se démarque de ses collègues. Comme nous venons de le signaler, le projet des enseignants nous permet d'interpréter cette différence. Les trois autres professeurs avaient prévu d'utiliser des exercices de calcul raisonné pour faire douter les élèves de leur utilisation de la règle de la virgule alors que Monsieur Bombelli a proposé du calcul mental essentiellement pour appliquer des techniques.

Les incidents durant les activités de questionnement plus théorique (QTQS) distinguent Madame Theano et Madame Germain d'une part, et Madame Agnesi et Monsieur Bombelli d'autre part. Les deux premiers professeurs ont élaboré des scénarios où la part du questionnement des élèves joue un rôle plus important que dans celui des deux autres professeurs. En effet Madame Germain fait véritablement construire la technique opératoire par ses élèves et Madame Theano tente de faire multiplier des décimaux avec une réflexion qui porte sur la valeur du nombre (son ordre de grandeur) plutôt que sur son écriture (le nombre de ses décimales). Nous avons aussi remarqué que ces deux professeurs laissent à la charge de leurs élèves, davantage que leurs deux autres collègues, l'élaboration des nouvelles connaissances ainsi que leur validation et leur formulation.

Finalement, nous constatons une augmentation des incidents lors d'activités qui sont valorisées par le scénario. Ce résultat n'est pas paradoxal si l'on admet que les incidents ne sont pas à considérer comme des phénomènes "négatifs" du déroulement d'une séquence. Il semblerait même que plus les professeurs estiment qu'une activité est importante pour l'apprentissage, plus ils laissent apparaître d'incidents. Autrement dit, tout se passe comme si plus une activité est considérée comme source d'apprentissage, plus les professeurs que nous avons observés estiment utile d'adapter leur pratique professionnelle aux réactions de leurs élèves. Il serait intéressant, pour enrichir ce résultat, de savoir si les professeurs adaptent aussi leur mode de gestion des incidents aux activités de leurs élèves suivant l'importance qu'ils leur ont accordée dans le scénario.

Avant de commencer l'étude des gestions des incidents en fonction de la catégorie des activités, nous allons compléter celle qui porte sur les incidents pour répondre à la question suivante : les activités des élèves influencent-elles les professeurs quant à la nature des incidents qu'ils laissent apparaître ou qu'ils

engendrent ? Nous avons déjà montré que les professeurs n'induisaient pas la même répartition des différentes formes d'incidents dans leur séquence, en considérant cette répartition comme une tendance générale propre à chaque professeur, nous sommes maintenant à la recherche de modifications de cette tendance générale en fonction de la catégorie d'activité des élèves de leur classe.

La nature et la gestion des incidents en fonction des activités des élèves

Comment déceler des choix éventuels des professeurs concernant la nature des incidents qu'ils laisseraient davantage émerger suivant l'activité effective de leur classe ? Comme nous l'avons fait pour étudier le mode de gestion des incidents en fonction de leur nature, nous dressons, pour chaque professeur, un tableau croisé des catégories d'activités et des formes d'incidents. Nous comparons les effectifs constatés et ceux qu'on obtiendrait, théoriquement, si ces deux variables aléatoires (la catégorie de l'activité et la nature de l'incident) étaient indépendantes. Les écarts éventuels indiquent des choix des enseignants. En situant ces écarts par rapport aux scénarios élaborés par les enseignants, en consultant à nouveau les narrations des séquences, nous envisageons d'émettre des hypothèses concernant ces choix. Nous procédons de même pour étudier la façon de gérer les incidents qui surviennent durant le déroulement de la séquence en fonction de la catégorie des activités des élèves.

Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Mme Theano

♦ *Nature des incidents et catégories d'activité*

Voici les résultats obtenus pour la classe de Madame Theano.

Tableau 42. Nature des incidents en fonction des activités des élèves de Madame Theano

TA \ I	E	Q	I	S	P	
REE	4 > 2,4285	1 1,2857	3 2,8571	0 0,5714	0 0,8571	8
ETO	1 0,9107	1 0,4821	1 1,0714	0 0,2142	0 0,3214	3
PC	0 1,2142	1 0,6428	3 > 1,4285	0 0,2857	0 0,4285	4
CMCR	10 10,0178	4 < 5,3035	12 11,7857	3 2,3571	4 3,5357	33
QTQS	2 2,4285	2 1,2857	1 < 2,8571	1 0,5714	2 > 0,8571	8
	17	9	20	4	6	56

Le tableau de répartition des différentes formes d'incident en fonction de la catégorie d'activité durant la séquence de Madame Theano montre une grande proximité entre les effectifs constatés et des valeurs théoriques obtenues en supposant que la nature des incidents est indépendante de la catégorie d'activité des élèves. Aucune compensation ne s'observe au sein d'une ligne ou d'une colonne. Nous remarquerons cependant le nombre élevé d'erreurs durant les activités de révisions qui laissent supposer que le professeur choisit des exercices de

révision qui mettent l'accent sur les aspects qui posent encore des difficultés aux élèves plutôt que sur ceux qui sont acquis.

♦ *Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves*

Les résultats concernant la séquence de Madame Theano montrent peu d'écarts significatifs avec les valeurs théoriques sous l'hypothèse d'indépendance du mode de gestion des incidents et de la catégorie des activités des élèves. L'examen des activités de calcul mental ou raisonné (CMCR) nous semble tout de même intéressant.

Tableau 43 Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves : Madame Theano

TA \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
REE	0 0,1428	1 1,1428	2 1,4285	1 0,7142	0 0,2857	1 1,5714	2 1,5714	1 1,1428	8
ETO	0 0,0535	0 0,4285	2 > 0,5357	0 0,3260	1 0,1071	0 0,5892	0 0,5892	0 0,4285	3
PC	0 0,0714	0 0,5714	1 0,7142	0 0,3571	0 0,1428	1 0,7857	0 0,7857	2 > 0,5714	4
CMCR	1 0,5892	6 > 4,7142	5 < 7,1739	4 > 2,9464	0 < 1,1785	6 6,4821	7 6,4821	4 4,7142	33
QTQS	0 0,1428	1 1,1428	0 < 1,4285	0 0,7142	1 0,2857	3 > 1,5714	2 1,5714	1 1,1428	8
	1	8	10	5	2	11	11	8	56

La ligne des activités de calcul mental et de calcul raisonné montre que Madame Theano a davantage ignoré les interventions des élèves et qu'elle leur a moins répondu, qu'elle a davantage guidé leur réponse et qu'elle a moins facilité leur tâche. La gestion des incidents qui sont apparus durant les activités de cette catégorie est un peu plus fermée que durant la totalité de cette séquence. Cette gestion plus fermée nous rappelle les difficultés ressenties par cette enseignante durant certaines activités de calcul mental ou raisonné relatives à l'utilisation des ordres de grandeur pour placer la virgule au produit de deux décimaux. Lors de ces difficultés liées à la préparation de la séquence, on décèle une légère fermeture de la tendance généralement plus ouverte que suit Madame Theano pour gérer les incidents. Nous n'insisterons pas davantage sur ce point compte tenu du fait que les écarts constatés sont très faibles.

Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Madame Agnesi

♦ *Nature des incidents et catégorie d'activité des élèves*

Examinons les résultats concernant la séquence de Madame Agnesi en utilisant la même méthode. Nous constatons ici de nombreux écarts significatifs.

Tableau 44 Nature des incidents en fonction des activités des élèves de Madame Agnesi

TA \ I	E	Q	I	S	P	D	
REE	0 < 1,7	1 1,2	3 3,9	0 0,5	0 0,3	4 > 0,4	8
ETO	1 0,425	0 0,3	1 0,975	0 0,125	0 0,075	0 0,1	2
PC	2 1,4875	3 > 1,05	2 < 3,4125	0 0,4375	0 0,2625	0 0,35	7
MAC	0 0,2115	0 0,15	1 0,4875	0 0,0625	0 0,0375	0 0,05	1
CMCR	13 11,475	4 < 8,1	29 26,325	5 > 3,375	3 2,025	0 < 2,7	54
QTQS	0 0,425	1 0,3	1 0,975	0 0,125	0 0,075	0 0,1	2
SM	1 1,0625	3 > 0,9	2 2,925	0 0,375	0 0,225	0 0,3	6
	17	12	39	5	3	4	80

Durant les activités de révision (REE), contrairement à Madame Theano, Madame Agnesi a choisi des exercices qui ne posent pas de difficulté aux élèves mais qui conduisent à des oppositions liées à la méthode. La lecture de la narration montre que ces divergences sont liées à la stratégie d'enseignement de Madame Agnesi. Elles portent sur les calculs des prix : certains élèves souhaitent multiplier le prix unitaire par le nombre d'unités même lorsque les deux valeurs sont décimales, d'autres préfèrent utiliser des conversions pour que le nombre d'unités soit entier et donc que la multiplication corresponde au modèle de l'addition réitérée.

Les effectifs des questions, des désaccords et des silences durant les activités de calcul mental ou de calcul réfléchi (CMCR) indiquent que les élèves identifient bien la tâche prescrite et que Madame Agnesi interroge plus volontiers les élèves qui ne sont pas volontaires.

Nous remarquons aussi de nombreux incidents de la forme "Question" qui correspondent encore à des problèmes de méthode lors de résolutions de problèmes issus de situations multiplicatives. En choisissant de ne pas complètement décontextualiser son enseignement de la multiplication des nombres décimaux, Madame Agnesi s'est exposée à des incidents liés à la résolution de ces problèmes. Rappelons que l'enseignante avait tenté d'éviter que les élèves convertissent les données mais, devant leur insistance, elle avait consenti à un détour par rapport au scénario prévu. Ce détour avait été consenti aussi parce que Madame Agnesi avait compris l'avantage qu'elle pouvait tirer de ce détour pour renforcer la ligne directrice de son scénario.

Finalement, Madame Agnesi influence principalement la nature des incidents durant les activités qui concernent directement sa stratégie d'enseignement. Elle laisse alors plus de possibilité à l'émergence d'incidents liés à des désaccords ou à des propositions de méthodes relatives à la conception de la multiplication. Cependant cette influence ne se présente pas comme une compensation de sa perméabilité à certaines formes d'incidents.

♦ *Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves*

Les tableaux de valeurs obtenues sont très proches, Madame Agnesi ne tient pas compte des activités de ses élèves pour gérer les incidents.

Tableau 45. Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves : Madame Agnesi

TA \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
REE	0 0,5	0 0,1	3 3,2	1 1,1	0 0,2	0 1,1	3 > 1,5	1 0,3	8
ETO	0 0,125	0 0,025	1 0,8	0 0,275	0 0,05	0 0,275	1 0,375	0 0,075	2
PC	0 0,4375	0 0,0875	4 > 2,8	2 0,9625	0 0,175	0 0,9625	1 1,3125	0 0,2625	7
MAC	0 0,0625	0 0,0125	0 0,4	0 0,1375	0 0,025	1 0,1375	0 0,1875	0 0,0375	1
CMCR	5 > 3,375	0 0,625	23 21,6	7 7,425	2 1,35	8 7,425	7 < 10,125	2 2,025	54
QTQS	0 0,125	0 0,025	0 0,8	0 0,275	0 0,05	0 0,275	2 > 0,375	0 0,075	2
SM	0 0,375	1 0,075	1 < 2,4	1 0,825	0 0,15	2 > 0,825	1 1,125	0 0,228	6
	5	1	32	11	2	11	15	3	80

Remarquons tout de même que Madame Agnesi, qui interrogeait plus facilement les élèves non-volontaires durant les activités de calcul mental ou raisonné, change souvent d'intervenant alors qu'elle ne le fait jamais dans d'autres activités

Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez M. Bombelli

♦ *Nature des incidents et catégorie d'activité des élèves*

Examinons les résultats concernant la séquence de Monsieur Bombelli. Nous constatons quelques écarts significatifs mais les effectifs sont tellement faibles que les interprétations n'auront que la valeur d'hypothèse que nous ne pourrions confirmer.

Tableau 46. Nature des incidents en fonction des activités des élèves de Monsieur Bombelli

TA \ I	E	Q	I	S	D	
REE	2 1,12	0 < 1,28	2 > 0,64	0 0,32	0 0,64	4
ETO	0 0,84	0 0,96	2 > 0,48	1 0,24	0 0,48	3
PC	2 2,52	4 > 2,88	0 < 1,44	0 0,72	3 > 1,44	9
CMCR	3 2,52	4 > 2,88	0 < 1,44	1 0,72	1 1,44	9
	7	8	4	2	4	25

Durant les activités de révisions (REE), les élèves ne posent pas de question parce que les exercices ne leur posent pas de difficulté, les seules erreurs qui apparaissent sont des fautes de calcul. Le nombre de réponses incomplètes est supérieur à celui qu'on aurait pu attendre parce que Monsieur Bombelli est plus exigeant pour ces

exercices de révision où un élève est au tableau et doit rédiger une réponse "parfaite".

L'effectif des réponses incomplètes est légèrement supérieur à l'effectif théorique lors des activités d'élaboration de la technique opératoire (ETO). La lecture de la narration montre que Monsieur Bombelli tente de faire participer davantage les élèves lors de la justification de la position de la virgule. Le professeur sollicite sa classe à ce moment important du scénario de la séquence qui est directement lié à sa stratégie d'enseignement. Les élèves ont sans doute perçu que le professeur attendait une réponse et se sont, par deux fois, davantage risqués qu'ils ne l'auraient fait autrement à énoncer une réponse incomplète.

Les questions et les désaccords durant les activités de calcul écrit (PC) proviennent de problèmes techniques déjà évoqués : alignement des chiffres, prise en compte des zéros intercalaires du multiplicateur... Il semble que Monsieur Bombelli n'avait pas prévu de traiter ces "détails" qui perturbent le scénario malgré lui. Tout semble indiquer que si le professeur avait prévu ces difficultés, il les aurait évitées et aurait, par conséquent, évité aussi ces incidents supplémentaires.

L'examen de la narration de la séquence de Monsieur Bombelli concernant les questions survenues durant les activités de calcul mental ou réfléchi (CMCR) montre que ces incidents sont plutôt liés aux exercices et n'indique rien de nouveau quant à la pratique du professeur.

Ainsi, nous retiendrons que, durant les activités directement liées à sa stratégie d'enseignement, Monsieur Bombelli est capable d'encourager les élèves à s'exprimer quitte à ce qu'ils formulent des réponses incomplètes. Monsieur Bombelli montre un peu plus d'ouverture aux incidents lorsque sa stratégie d'enseignement est en jeu dans les activités des élèves.

♦ *Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves*

Les tableaux de résultats de Monsieur Bombelli montre que la catégorie d'activité des élèves influence le mode de gestion des incidents de ce professeur.

Tableau 47. Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves : Monsieur Bombelli

TA \ G	C	I	R	E	N	
REE	0 0,32	1 0,96	3 > 1,76	0 0,48	0 0,48	4
ETO	0 0,24	0 0,72	1 1,32	2 > 0,36	0 0,36	3
PC	0 0,72	4 > 2,16	5 > 3,96	0 < 1,08	0 < 1,08	9
CMCR	2 > 0,72	1 2,16	2 < 3,96	1 1,08	3 > 1,08	9
	2	6	11	3	3	25

Néanmoins, nous restons prudent quant aux interprétations compte tenu des faibles effectifs. La ligne qui correspond aux activités de calcul écrit (PC) indique que Monsieur Bombelli répond ou ignore davantage qu'il ne le fait pour l'ensemble de la séquence. Ces deux chiffres montrent une radicalisation de sa tendance

générale durant cette catégorie d'activités sur lesquelles repose principalement son scénario. On se rappelle que Monsieur Bombelli s'était retrouvé confronté à des désaccords entre élèves concernant des détails techniques de la multiplication qu'il n'avait pas anticipés et qu'il n'a pas souhaité traiter.

Nous constatons, en revanche, une ouverture légèrement plus grande durant les activités de calcul mental ou de calcul réfléchi (CMCR), Monsieur Bombelli répond moins et relance plus qu'il ne le fait en moyenne durant cette séquence.

Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Mme Germain

♦ *Nature des incidents et catégorie d'activité des élèves*

La répartition des incidents selon leur nature et en fonction des activités des élèves de Madame Germain est très proche de celle qu'on obtiendrait en supposant indépendantes les deux variables aléatoires que sont la nature des incidents et la catégorie des activités. Deux valeurs seulement s'en écartent légèrement.

Tableau 48. Nature des incidents en fonction des activités des élèves de Madame Germain

TA \ I	E	Q	I	I	P	D	
REE	0 0,2736	0 0,1684	1 0,3578	0 0,1157	0 0,0105	0 0,0736	1
ETO	2 2,7368	1 1,6842	6 > 3,5789	1 1,1578	0 0,1052	0 0,7368	10
CMCR	18 19,4315	13 11,9578	25 25,4105	8 8,2210	1 0,7473	6 5,2315	71
QTQS	6 3,5578	2 2,1894	2 < 4,6526	2 1,5052	0 0,1368	1 0,9578	13
	26	16	34	11	1	7	95

Nous n'étudierons donc pas davantage ces résultats et nous concluons que Madame Germain n'influence pas la nature des incidents selon les activités de ses élèves.

♦ *Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves*

Les résultats qui apparaissent dans le tableau des effectifs observés et des valeurs théoriques, sous l'hypothèse de l'indépendance du mode de gestion des incidents et de la catégorie des activités des élèves, montrent des écarts locaux dont certains sont assez importants.

Tableau 49. Gestion des incidents en fonction de l'activité des élèves : Madame Germain

TA \ G	C	I	R	G	F	A	E	N	
REE	0 0,1157	0 0,0421	0 0,1789	0 0,0526	0 0,0736	0 0,3473	1 0,0736	0 0,1157	1
ETO	1 1,1578	0 0,4210	2 1,7894	1 0,5263	2 > 0,7368	0 < 3,4736	3 > 0,7368	1 1,1578	10
CMCR	8 8,2210	3 2,9894	13 12,705	4 3,7368	4 < 5,2315	30 > 24,663	1 < 5,2315	8 8,2210	71
QTQS	2 1,5052	1 0,5473	2 2,3263	0 0,6842	1 0,9578	3 < 4,5157	2 > 0,9578	2 1,5052	13
	11	4	17	5	7	33	7	11	95

Les faibles écarts que l'on constate pour les activités de questionnement plutôt théorique (QTQS) ne permettent pas d'interprétation. Le premier type d'activité pour lequel apparaissent des écarts importants est l'élaboration de la technique opératoire ou de propriétés de la multiplication (ETO). Durant ces activités, Madame Germain demande moins à ses élèves d'approfondir leur réponse, elle facilite davantage leur tâche ou récupère et enrichit leurs réponses. Ces modifications de la tendance que suit généralement cette enseignante pour gérer les incidents donne moins d'ouverture à ses gestions. L'examen de la narration de sa séquence montre que ces incidents surviennent davantage à la fin du scénario lorsque Madame Germain tente de capitaliser les connaissances construites sur la multiplication de deux décimaux pour établir la technique opératoire. On interprète donc ces écarts comme une forme de compensation, Madame Germain a besoin d'une gestion un peu moins ouverte durant cette phase de la séquence.

La ligne qui concerne les activités de calcul mental ou réfléchi (CMCR) montre en revanche une radicalisation de la tendance générale de gestion des incidents par Madame Germain : les demandes d'approfondissement des réponses sont beaucoup plus nombreuses, les réponses sont moins souvent détournées et les tâches sont moins souvent facilitées. Ces activités, très nombreuses dans la séquence de Madame Germain ont permis d'énoncer les "petites règles" qui ont été utilisées ensuite pour élaborer la technique opératoire de la multiplication des nombres décimaux. Elles constituent le socle du scénario élaboré par le professeur.

Nature et gestion des incidents en fonction des activités des élèves, bilan

Les résultats obtenus sont donc hétérogènes. Madame Theano et Madame Germain n'influencent pas la nature des incidents qui émergent en fonction des activités de leurs élèves alors que Monsieur Bombelli et Madame Agnesi semblent l'influencer légèrement pour les activités qui concernent directement leur stratégie d'enseignement. L'objectif de ces deux professeurs est manifestement d'optimiser l'efficacité des activités des élèves à ces moments qu'ils jugent fondamentaux pour l'apprentissage.

Les résultats concernant l'indépendance entre le mode de gestion des incidents et la catégorie des activités est hétérogène. Madame Theano et Madame Agnesi suivent leur tendance générale de gestion des incidents quelle que soit l'activité de leurs élèves. Monsieur Bombelli et Madame Germain réagissent autrement. Pour deux types d'activités différents nous constatons, chez chacun de ces deux professeurs, soit une radicalisation soit une atténuation de la tendance qu'il suit généralement pour gérer les incidents qui surviennent durant sa séquence. Dans les deux cas, la tendance générale du professeur se radicalise durant les activités sur lesquelles le scénario repose essentiellement. Les professeurs semblent en revanche plus facilement disposés à concéder quelques renoncements durant des activités où l'enjeu stratégique disparaît.

Conclusion : les points fondamentaux du scénario influencent les adaptations

Finalement, nous avons montré que les professeurs laissent principalement apparaître des incidents dus à l'intervention de leurs élèves lorsque leurs activités

concernent directement la stratégie d'enseignement qu'ils ont élaborée. Plus une activité est considérée par le professeur comme étant une source d'apprentissage, plus il laisse ses élèves intervenir et provoquer des incidents. Nous avons même remarqué, chez deux professeurs, une modification de la répartition générale des différentes formes d'incidents pour les activités qui sont valorisées par leur scénario.

En ce qui concerne la gestion des incidents, les enseignants se distinguent par la répartition des modes de gestion. Cette répartition reflète en partie la conception qu'ils ont de leur tâche d'enseignement. En l'assimilant à une tendance générale propre à chacun d'entre eux, nous venons de montrer que deux professeurs radicalisent cette tendance pour les activités qui concernent directement leur stratégie d'enseignement. Autrement dit, les adaptations constituent une pratique professionnelle dont la fonction est de favoriser les apprentissages de ses élèves, du point de vue de l'enseignant et notamment en référence à la préparation des cours.

Une contrainte, le temps, nous semble *a priori* pouvoir influencer l'activité d'un professeur et, en particulier, son adaptation aux interventions de ses élèves. Nous allons donc maintenant examiner l'effet de la chronologie de la séquence sur le mode de gestion des incidents.

4. Influence du temps sur la gestion des incidents

Quelle est l'influence de la chronologie du scénario et plus généralement celle du temps sur la gestion des incidents par les professeurs : existe-t-il des périodes de stabilité ou de changement du mode de gestion durant la séquence, à l'approche de la sonnerie qui marque la fin de chaque séance, à la fin de la séquence ? Nous avons constaté dans l'étude précédente que les modifications de la tendance générale de gestion des incidents sont liées à l'ouverture de cette gestion. Pour montrer une éventuelle influence du temps, nous allons ordonner les modes de gestion selon leur ouverture et en tracer un graphique chronologique.

De la plus fermée à la plus ouverte, nous avons :

Ignorer, Répondre, Changer d'intervenant, Enrichir, Guider, Faciliter, demander un Approfondissement, reprendre de façon Neutre.

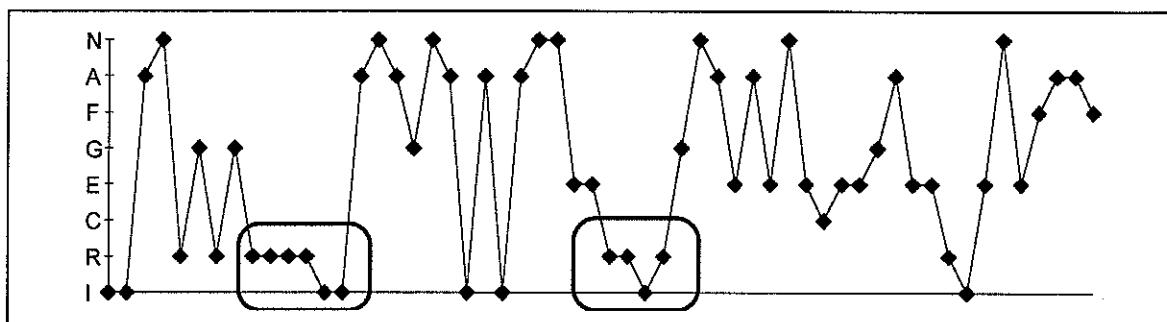
L'axe des abscisses est l'axe du temps et sur l'axe des ordonnées sont portés les codes I, R, C, E, G, F, A et N des modes de gestion ordonnés par ouverture croissante. Les quatre séquences observées n'ont pas la même durée mais, comme nous avons déjà analysé la fréquence des incidents au cours des quatre séquences, nous avons choisi de prendre la totalité de la séquence comme unité sur l'axe des abscisses. Il conviendra donc de ne pas tenir compte de la densité des points du graphique.

Afin d'évaluer l'influence du temps sur le mode de gestion des incidents, nous allons, de façon qualitative, observer les graphiques et repérer les changements important de l'allure de chaque courbe. En revenant à la narration de la séquence, nous tenterons d'interpréter ces éventuels changements. Nous examinerons donc

la chronologie de la gestion des incidents pour chaque professeur puis nous dresserons un bilan concernant l'influence du temps sur cette gestion.

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Theano

Examinons le graphique chronologique de la gestion des incidents survenus dans la séquence de Madame Theano.



Graphique 23. Chronologie de la gestion des incidents dans la séquence de Madame Theano

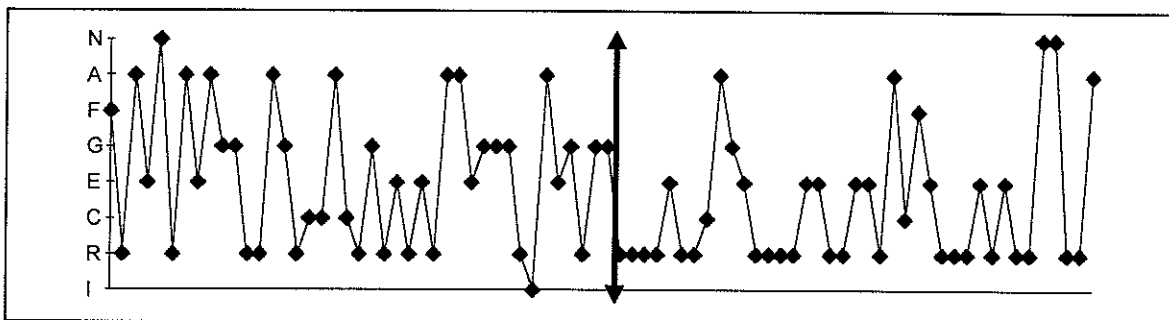
La courbe présente de nombreuses oscillations vers le haut du graphique, Madame Theano varie régulièrement sa gestion entre une relance neutre et une demande d'approfondissement de leur réflexion. On remarque aussi quelques recours à d'autres modes de gestion, Madame Theano guide, répond ou ignore parfois.

Nous repérons aussi deux changements importants dans l'allure générale de la courbe qui correspondent à des moments du déroulement où Madame Theano a une gestion beaucoup plus fermée des incidents, elle ignore ou répond. Nous avons indiqué ces moments sur le graphique en entourant les points concernés. En retournant à la narration de la séquence, nous avons remarqué que ces moments sont précisément ceux qui sont consacrés au bilan des activités c'est-à-dire à l'institutionnalisation des connaissances.

Il apparaît donc que les moments de la séquence où l'objectif pédagogique de Madame Theano est que les élèves "capitalisent" les fruits de leur activité sont des moments particuliers où le professeur a une gestion beaucoup plus fermée que le reste du temps. La lecture de la narration montre en effet que les élèves de sixième ont beaucoup de difficulté à tirer l'essentiel de leur activité. Autrement dit, la décontextualisation et la formalisation des connaissances sont plutôt à la charge de l'enseignante même si elle tente d'y faire participer les élèves de sa classe.

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Agnesi

Le graphique chronologique de la gestion des incidents survenus dans la séquence de Madame Agnesi est plus homogène que celui de Madame Theano. On n'observe aucun intervalle de changement significatif du mode de gestion.



Graphique 24. Chronologie de la gestion des incidents dans la séquence de Madame Agnesi

Cependant, en repérant les points d'ordonnée R, il apparaît que le choix de "Répondre" est plus fréquent après la première moitié de la séquence. Nous avons indiqué ce changement sur le graphique par une double-flèche verticale. On constate alors quelques asymétries du graphique. Durant la première partie de la séquence, nous avons remarqué que Madame Agnesi répond moins que durant la seconde, nous voyons aussi qu'elle guide davantage ses élèves et qu'elle leur demande plus souvent d'approfondir leur travail.

En retournant à la narration de la séquence de Madame Agnesi, on constate que cette seconde moitié ne correspond pas à un changement des activités des élèves, elle débute après l'institutionnalisation de la technique opératoire au moment où Madame Agnesi aborde toutes les propriétés de la multiplication des décimaux dans un paragraphe qu'elle a intitulé "comment contrôler un résultat". C'est à ce moment qu'elle aborde l'utilisation des ordres de grandeur, le problème posé par les zéros inutiles ainsi que la multiplication par un facteur inférieur à l'unité. Il semble donc que Madame Agnesi adopte un mode de gestion plus fermée au moment où les connaissances essentielles de la séquence sont institutionnalisées.

Par ailleurs, ce changement de mode de gestion apparaît au début de la troisième heure de la séquence qui dure trois heures et demie. Il reste à ce moment plus de la moitié du scénario et moins de la moitié du temps prévu. Il semble donc que la gestion chronologique de Madame Agnesi peut se décrire ainsi :

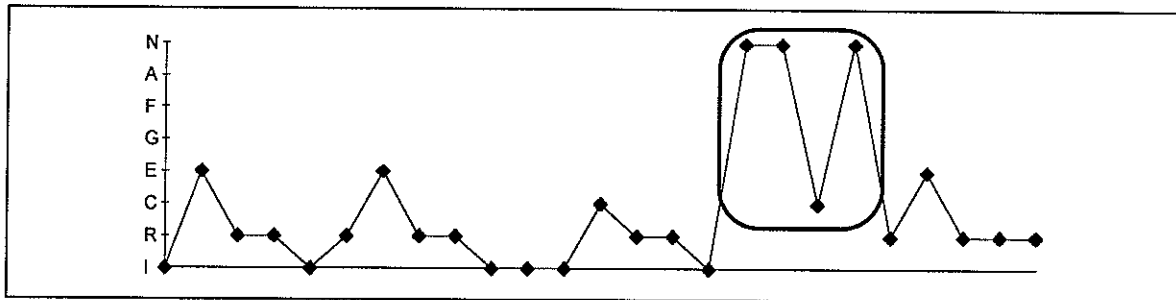
- une première phase est consacrée au noyau de la séquence (ce noyau est composé de la découverte de la multiplication de deux décimaux sur une situation multiplicative et de l'apprentissage de la technique opératoire), durant cette première phase la gestion des incidents est plus ouverte, Madame Agnesi demande plus facilement à ses élèves d'approfondir leur réflexion, elle répond moins directement à leur place préférant guider leur démarche. Cette phase dure plus de la moitié de la séquence ;

- une seconde phase est consacrée à l'enseignement des propriétés de la multiplication. Cette phase est plus riche en contenus mathématiques mais le temps qui lui est consacré est moins important. Madame Agnesi est alors plus directive, elle enrichit souvent les réponses des élèves ou répond à leur place. Ce changement de gestion apparaît à un moment précis défini par deux critères : il se situe au début d'une séance et plus de la moitié de la durée totale de la séquence est déjà passé

Pour terminer, rappelons que Madame Agnesi est le professeur qui avait décidé de proposer une séquence très complète à ses élèves, c'est durant la seconde phase qu'elle a abordé les propriétés de la multiplication qui n'ont pas été toutes traitées par les autres professeurs que nous avons observés.

Chronologie de la gestion des incidents par Monsieur Bombelli

La chronologie des gestions des incidents par Monsieur Bombelli est assez homogène, le professeur utilise principalement les trois modes qui ne relancent pas l'activité de la classe : il ignore les réactions des élèves, il enrichit leurs interventions ou il répond à leur place.



Graphique 25. Chronologie de la gestion des incidents dans la séquence de Monsieur Bombelli

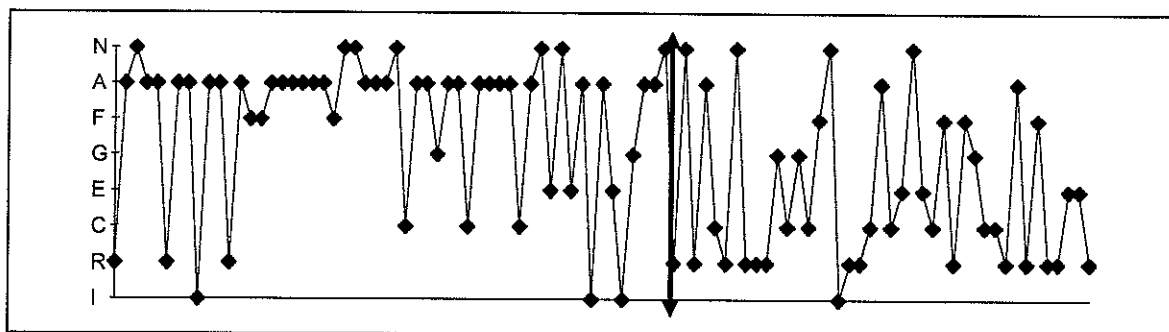
On constate cependant un moment où la gestion est plus ouverte. Nous avons indiqué ce moment sur le graphique en entourant les points concernés. En retournant à la narration de la séquence, on constate que ce moment correspond à la résolution d'un exercice dans lequel les élèves pouvaient commettre des erreurs s'ils se contentaient de compter les décimales des facteurs et celles du produit et s'ils pensaient, abusivement, que le produit contient autant de décimales que les deux facteurs réunis. Monsieur Bombelli a préféré laisser les élèves se tromper et constater leur erreur avant de poser les opérations pour remarquer la disparition d'un zéro inutile au produit, disparition qui explique que le nombre de décimales du produit ne soit pas celui des facteurs.

Ce moment du scénario a été consacré à l'analyse d'erreurs concernant la technique opératoire, après qu'elle a été présentée et justifiée par le professeur. La chronologie des gestions de Monsieur Bombelli montre bien la conception qu'il a de sa tâche d'enseignement : énoncer et établir le savoir mathématique, entraîner les élèves en leur permettant éventuellement de corriger leurs erreurs. Cette conception est bien celle qui déjà émergeait de son scénario. Il reste que ce moment d'analyse des erreurs est unique alors que l'observation de la séquence a montré que les élèves ont rencontré de nombreux problèmes techniques liés à la disposition des chiffres, à la gestion d'un zéro initial, final ou intercalaire. Sans doute est-ce la seule erreur que Monsieur Bombelli ait trouvée "intéressante"....

Chronologie de la gestion des incidents par Madame Germain

Comme celui de Madame Agnesi, le graphique chronologique de la gestion des incidents par Madame Germain ne présente aucun intervalle de changement de gestion mais deux phases durant lesquelles la gestion des incidents est différente.

Nous avons séparé ces deux phases sur le graphique par une double-flèche verticale.



Graphique 26. Chronologie de la gestion des incidents dans la séquence de Madame Germain

Durant la première phase, la gestion des incidents est très ouverte, Madame Germain relance presque systématiquement l'activité des élèves. Elle demande très souvent d'approfondir la réflexion, parfois elle répète de façon neutre la réponse d'un élève ou facilite la tâche prescrite. Durant la seconde phase, en revanche, les demandes d'approfondissement se font rares et Madame Germain préfère répondre elle-même à la place des élèves, éventuellement elle guide leur démarche ou elle enrichit leur réponse.

En retournant à la narration de la séquence, on s'aperçoit que ce changement de gestion ne correspond pas à un changement d'activité des élèves mais au début de la quatrième heure de la séquence qui en dure cinq. Trois heures durant, Madame Germain avait proposé à ses élèves de réfléchir sur les propriétés du produit d'un décimal par un entier ou de deux décimaux. Il lui restait deux heures pour terminer cette longue phase de travail préparatoire, pour capitaliser les acquis et en déduire une construction de la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux.

On peut donc en conclure que Madame Germain, comme Madame Agnesi, change de mode de gestion quand la contrainte du temps commence à s'imposer. Pour ces deux professeurs, le changement intervient donc au début de la séance qui arrive après que la première moitié de durée totale de la séquence est déjà passée. Enfin, Madame Germain, comme Madame Theano, est plus directive durant la capitalisation des connaissances construites au cours des activités des élèves, sans toutefois s'approprier complètement ni la décontextualisation ni la formalisation de ces connaissances.

Bilan de la contrainte temporelle sur le mode de gestion des incidents

L'analyse chronologique de la gestion des incidents par les quatre professeurs que nous avons observés nous a permis de montrer l'existence d'une double contrainte. La première vient de l'organisation chronologique de l'enseignement qui a été prévue dans le scénario, et c'est ce scénario qui guide les professeurs durant le déroulement. La deuxième vient simplement de la volonté de respecter la durée prévue de la séquence.

La structure chronologique elle-même du scénario prévu est une contrainte qui peut, durant le déroulement, influencer la gestion des incidents par les

enseignants. Ainsi Madame Theano avait inséré deux phases de capitalisation des connaissances dans sa séquence d'enseignement ; durant ces deux périodes, l'enseignante a renoncé à une certaine ouverture de sa tendance générale de gestion des incidents, la communication avec sa classe était plus souvent univoque qu'elle ne l'a été, en moyenne, au cours de la séquence. Monsieur Bombelli avait prévu une phase de traitement d'un type d'erreur lié à une conception erronée de la règle de la virgule ; durant cette période, le professeur a modifié sa tendance générale de gestion des incidents en étant plus ouvert qu'il ne l'a été en moyenne au cours de la séquence. Madame Agnesi avait organisé son enseignement en deux phases, la première a été consacrée à la découverte et à l'apprentissage de la multiplication des décimaux et, durant la seconde, l'enseignante a traité l'ensemble des propriétés de la multiplication. Nous avons retrouvé cette organisation dans le mode de gestion des incidents qui a été plus ouvert durant la première phase que durant la seconde.

Vouloir respecter la durée prévue de la séquence est aussi une contrainte qui peut influencer le mode de gestion des incidents. Ainsi, Madame Agnesi et Madame Germain renoncent à une certaine ouverture de leur tendance générale de gestion des incidents une fois que leur enseignement a duré plus de la moitié de leur séquence. Remarquons que ce changement n'est pas lié aux activités mathématiques : les professeurs ont changé leur mode de gestion des incidents dès le début d'une séance, celle qui arrive après que la moitié de la durée totale est déjà passée. Dans la séquence de Madame Agnesi, le changement lié à la contrainte temporelle a coïncidé avec le changement lié à l'organisation chronologique de l'enseignement.

Pour terminer l'examen de la contrainte du temps sur la gestion des incidents, remarquons que nous n'avons retrouvé, dans aucun des quatre graphiques, de périodes relativement courtes qui correspondraient à un rythme à l'intérieur de chaque heure de cours. Nous n'avons pas non plus trouvé de trace de la juxtaposition des séances qui composent la séquence. Autrement dit, pour les professeurs que nous avons observés, la sonnerie qui marque la fin de chaque heure de cours n'influence pas leur mode de gestion des incidents. Sans doute, la courte durée des activités induites par les tâches proposées en classe de sixième explique que les professeurs ne craignent pas de manquer de temps pour conclure une activité de leurs élèves.

Les adaptations, une pratique peu contrainte

Nous avons étudié des interactions particulières entre le professeur et ses élèves : les adaptations. Une adaptation est composée d'un incident (causé par un décalage négatif entre l'activité attendue, compte tenu de la tâche prescrite à la classe, et l'activité effective d'un élève ou d'un groupe d'élèves), de la place de cette tâche dans le scénario prévu, et de la gestion de l'incident par le professeur de la classe.

Nous avons remarqué que les incidents sont nombreux dans toutes les séquences observées mais que leur fréquence varie du simple au double suivant les

professeurs. Les modes de gestion de ces incidents sont variés. Chaque professeur les utilise d'une manière inégale que nous interprétons comme une tendance générale qui lui est propre. La perméabilité aux incidents et la tendance générale de leur gestion semblent correspondre à des choix pédagogiques ainsi qu'à des facteurs personnels.

Des analyses croisées ont montré des modifications de la tendance générale de gestion des incidents suivant leur nature et suivant l'activité mathématique de la classe, ainsi que des modifications du nombre d'incidents lors d'activités qui sont valorisées par le scénario. En nous référant aux projets des professeurs, nous interprétons certaines de ces modifications comme des moyens d'optimiser les apprentissages des élèves, et d'autres comme des choix "économiques" qui permettent aux professeurs de gérer leur classe sans se mettre trop souvent dans une position inconfortable par rapport à leurs élèves. Autrement dit, les adaptations constituent une pratique professionnelle dont une fonction est de favoriser les apprentissages (en référence à la préparation des cours) et dont une autre est de garantir le déroulement en classe du scénario prévu.

Le temps, qui constitue une contrainte partagée par les quatre professeurs pour l'élaboration de leur projet d'enseignement, intervient aussi dans les adaptations et cela de deux manières différentes. D'une part l'organisation chronologique du scénario peut conduire à des variations de la gestion des incidents. D'autre part, la volonté de respecter la durée prévue de la séquence, peut conduire certains professeurs à une gestion plus fermée une fois que la moitié de cette durée est écoulée.

CONCLUSION

Des problèmes posés par la formation des enseignants²⁸⁴ nous ont conduit à l'analyse des pratiques des professeurs de mathématiques sur la multiplication des nombres décimaux. Notre ambition, pour cette recherche, était de contribuer au débat actuel sur le pôle professeur du système didactique et, plus précisément, d'approcher l'idée de " pratiques ordinaires ".

Nous avons donc assisté aux séances de plusieurs professeurs et, afin de faciliter les comparaisons, nous avons tenté de neutraliser toutes les variables du système didactique, excepté l'enseignant. Ainsi avons-nous observé des séquences complètes de professeurs expérimentés enseignant la même notion, au même niveau, dans des classes analogues et dans des conditions identiques (même horaire : 3 h en classe entière, même effectif : environ 27 élèves, et même manuel scolaire). La notion retenue pour cette expérimentation a été la multiplication des nombres décimaux qui, au moment de nos observations, constituait une nouveauté dans les programmes du collège et pour laquelle de nombreux travaux avaient montré la richesse des enjeux. Nous avons largement utilisé les résultats de ces travaux dans nos analyses. Les séquences observées ont été retranscrites sous forme de " narrations " qui ont constitué le support principal de notre recherche. Nous avons aussi utilisé les programmes, des manuels et des publications destinées aux professeurs.

Notre problématique était donc la suivante. Vérifier, par l'analyse de pratiques d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux dans des classes de sixième ordinaires, que les professeurs effectuent des choix qui ne sont pas sans conséquences sur les apprentissages des élèves²⁸⁵ et qui portent à la fois sur les contenus mathématiques, leur organisation, leur présentation, les tâches prescrites aux élèves, la gestion de la classe... Montrer comment, d'une part, les professeurs sont soumis à des contraintes qui déterminent en partie leur activité et

²⁸⁴ Nous avons constaté que des professeurs (à l'école et au collège) restent démunis face à des erreurs persistantes de leurs élèves à propos des nombres décimaux et de leur multiplication. Ces notions ont été largement étudiées en didactique des mathématiques, et les travaux produits proposent des moyens différents pour enseigner ces notions. Cependant, les enseignants ne tirent pas parti de ces recherches.

²⁸⁵ D'après des analyses didactiques

comment, d'autre part, ils disposent d'une certaine marge de manœuvre qu'ils investissent de manière personnelle, depuis l'élaboration du scénario jusqu'à son animation. C'est pourquoi nos questions portent essentiellement, sur les régularités (interprétables comme l'effet de contraintes diverses qui s'exercent sur les enseignants) et sur les divergences des pratiques enseignantes (interprétables comme l'investissement d'une marge de manœuvre), et aussi sur l'intégration, au sein d'une même pratique, des choix personnels et des contraintes communes. Nous avons distingué plusieurs dimensions des pratiques et nous avons procédé à des comparaisons. Comparaisons des différentes pratiques suivant la même dimension, et croisements de plusieurs dimensions au sein d'une même pratique.

En utilisant les hypothèses didactiques classiques sur les apprentissages, nous avons donc analysé les pratiques des professeurs en considérant leurs conséquences sur les acquisitions potentielles des élèves. Autrement dit, dans le système didactique, nous avons observé le pôle Enseignant du point de vue de l'axe Elève – Savoir. Pour cette analyse, nous avons retenu quatre dimensions :

- une dimension liée au contenu qui concerne l'ensemble des notions enseignées, leurs propriétés, les situations sur lesquelles s'appuient les problèmes, et les différentes représentations symboliques. Nous avons appelé cette dimension le *champ mathématique* de la séquence ;
- une dimension liée à l'organisation et à la présentation des contenus dans la séquence qui concerne les dynamiques ancien / nouveau, contextualisation / décontextualisation des savoirs, les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, les changements de cadres et de registres. Nous avons appelé cette dimension la *stratégie d'enseignement* de la séquence ;
- une dimension liée aux activités effectives des élèves en classe qui concerne la répartition des tâches entre le professeur et les élèves (l'élaboration des savoirs, leur validation, leur formulation, leur institutionnalisation, leur organisation, leur utilisation), la nature du travail des élèves ;
- une dimension liée aux interactions entre le professeur et les élèves qui concerne les réponses apportées à leurs questions, les compléments d'information, les aides ainsi que les sollicitations diverses.

Par ailleurs, dans la lignée des travaux d'Aline Robert²⁸⁶, nous avons fait l'hypothèse que cette lecture des pratiques, qui prend en compte le travail de l'enseignant en ce qu'il permet aux élèves d'apprendre, n'était pas suffisante pour expliquer les choix des enseignants. Nous avons supposé qu'il faut aussi considérer l'enseignant comme un individu en situation de travail. Car en tant qu'individus exerçant un métier, les professeurs sont soumis à des contraintes sociales et à des exigences de fonctionnement. En outre, ils s'investissent dans leur activité, de manière personnelle, notamment en fonction de leurs conceptions quant aux mathématiques, quant à l'apprentissage et à l'enseignement des savoirs de cette discipline. Cette hypothèse nous a conduit à adopter un point de vue complémentaire dans l'analyse des pratiques des professeurs en faisant appel à

²⁸⁶ Nous nous référons à ses travaux depuis 1996 et à des recherches doctorales récentes ou en cours qu'elle a encadrées

l'ergonomie²⁸⁷ : il ne s'agissait plus seulement d'étudier leurs choix en fonction des apprentissages potentiels des élèves mais aussi en fonction de leurs conséquences dans l'exercice même du métier. Autrement dit, dans le système didactique, nous avons centré notre analyse sur le pôle Enseignant.

Globalement, une grande régularité émerge des pratiques enseignantes

Nous disposions d'une grande richesse de travaux sur l'enseignement des nombres décimaux ou sur la multiplication car ces notions ont suscité de nombreuses recherches²⁸⁸. Nous les avons utilisés pour déterminer les enjeux d'apprentissage de ces deux notions. En croisant ces résultats avec les programmes actuels ou passés, nous avons pu cerner les objectifs de l'institution scolaire concernant leur enseignement. En utilisant ces résultats pour analyser les scénarios des professeurs et ceux des manuels de collège, nous avons montré l'existence de choix convergents. Ces résultats concernent le champ mathématique de la séquence et la stratégie d'enseignement²⁸⁹. Le champ mathématique des séquences observées est pratiquement le même pour les quatre professeurs, ils sont semblables à ceux des auteurs des manuels et ils sont conformes au programme officiel de la classe de sixième. Les stratégies possèdent des points communs importants.

Les nombres décimaux et leurs écritures

Les nombres décimaux sont utilisés pour résoudre trois types de problèmes. Des problèmes algébriques parce qu'ils permettent la résolution de certaines équations du type $ax = b$ (où $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$) sans solution dans l'ensemble des entiers naturels. Des problèmes de mesure parce qu'ils permettent l'approximation de tout nombre de la droite numérique (de tout réel) avec une précision quelconque et en particulier toutes les solutions aux équations évoquées précédemment. Des problèmes techniques parce qu'ils permettent aisément les comparaisons et les opérations. Les rationnels répondent, mieux encore que les décimaux, au problème algébrique mais posent des difficultés techniques. Ainsi, le nombre décimal peut-il être conçu comme un rationnel particulier ou, inversement, l'ensemble des rationnels peut-il venir prolonger celui des décimaux.

En tant que nombre rationnel, le nombre décimal peut être considéré comme une mesure (la grandeur et l'unité étant commensurables), comme un rapport de deux grandeurs (dans des situations de comparaisons) ou comme un opérateur (le coefficient d'une application linéaire). Indépendamment des rationnels, les nombres décimaux peuvent être considérés comme des abscisses de points qui viennent enrichir la demi-droite numérique graduée d'unité en unité (ils permettent alors des mesures de longueurs ou des approximations décimales des

²⁸⁷ Nous nous référons aux travaux de Jacques Leplat (1997) et de Janine Rogalski (2000) pour une approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant.

²⁸⁸ Nous pensons notamment à Brousseau N. & G. (1987), Brousseau G. (1998), Douady R. & Perrin M.-J. (1986), Vergnaud G. (1981, 1983), Rogalski J. (1985).

²⁸⁹ Nous précisons plus loin ces résultats

réels positifs). En référence au système métrique, les décimaux permettent d'effectuer facilement des conversions d'unités.

Aux nombres décimaux sont associées différentes représentations écrites, les programmes actuels prévoient l'enseignement de cette multiplicité de sens et de représentations ainsi que les changements d'écriture : fractions, fractions décimales, somme de fractions décimales, écriture à virgule, écriture sous la forme d'un produit²⁹⁰. Un vocabulaire spécifique est associé à l'écriture à virgule qui permet d'indiquer la valeur de chaque chiffre dans l'écriture du nombre.

Nous constatons une certaine carence des programmes actuels concernant l'enseignement des grandeurs familières au profit de l'enseignement des nombres et de leurs écritures. Comme les auteurs des manuels de sixième, les quatre professeurs reviennent sur le sens de l'écriture décimale qui n'est pas encore acquis à l'entrée en sixième. Mais dans leurs séquences, les décimaux sont toujours considérés de façon décontextualisée, ils n'apparaissent jamais comme des rationnels particuliers et la seule écriture utilisée est l'écriture à virgule.

La multiplication : technique opératoire et situations multiplicatives

En tant qu'opération, la multiplication peut être appréhendée suivant trois aspects : les techniques opératoires permettant le calcul d'un produit, ses propriétés algébriques et l'ensemble des situations qu'elle modélise. A l'école élémentaire sont successivement étudiées la multiplication de deux entiers puis celle d'un décimal par un entier. La multiplication de deux nombres décimaux s'enseigne au collège.

Malgré l'évolution des instructions ministérielles concernant la multiplication depuis le début du siècle, cette opération reste intimement liée à l'addition répétée. La répartition actuellement choisie entre l'école élémentaire et le collège ne peut que renforcer cette liaison à l'école et ne semble pas avoir engendré de modification profonde au collège. Enfin, dans les programmes, la carence constatée de l'enseignement des grandeurs familières se conjugue avec celle de l'enseignement de l'opération multiplication en référence aux situations qu'elle modélise. Ces situations sont pourtant très variées et confèrent à la multiplication un sens complexe. Elles peuvent se classer en trois catégories²⁹¹ :

- les situations qui portent sur un seul espace de mesure (l'addition itérée, le dénombrement des points d'un réseau rectangulaire, la droite à double graduation, l'agrandissement de figures planes, et plus généralement toute situation conduisant au produit d'un scalaire par une grandeur ; les agrandissements successifs de figures planes et, plus généralement, toute situation conduisant à la composée d'opérateurs) ;

- les situations qui portent sur un produit de grandeurs (le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis qui se pose dans les problèmes de dénombrement, le calcul de l'aire d'un rectangle, etc.) ;

²⁹⁰ Par exemple, dans l'ordre indiqué $\frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10} = 3,5 = 35 \times 10^{-1}$.

²⁹¹ Nous utilisons ici les travaux de Gérard Vergnaud (1981, 1983).

– les situations qui portent sur des grandeurs isomorphes c'est-à-dire qui conduisent au produit d'une grandeur quotient par une grandeur (par exemple les problèmes de prix, de vitesse, etc.).

Les quatre professeurs ont effectué un choix identique pour cette séquence : aucune situation multiplicative n'est étudiée, seuls quelques exercices d'application sont proposés, ils reposent sur des problèmes d'achat de marchandise. Les auteurs de manuels ont adopté la même position sur la multiplication des nombres décimaux. En ce qui concerne la technique opératoire, tous les professeurs l'ont présentée et justifiée voire même démontrée. Ils ont abordé le cas où un facteur est inférieur à l'unité, qui limite la validité de la propriété d'agrandissement souvent associée à la multiplication. Trois des quatre professeurs ont proposé à leurs élèves d'estimer un produit en utilisant les ordres de grandeur des facteurs, et d'utiliser des propriétés algébriques de la multiplication. Aucun d'entre eux n'a abordé les cas de la multiplication par 1 ou par 0 qui posent pourtant des problèmes aux élèves.

Les stratégies d'enseignement de la multiplication des décimaux

Pour élaborer leurs scénarios, les professeurs utilisent des publications dont principalement les manuels scolaires. Afin de pouvoir analyser les projets des enseignants que nous avons observés, nous avons étudié l'ensemble des publications – manuels, articles et brochures pédagogiques, recherches – comportant une proposition pour enseigner la multiplication des décimaux.

Aucune de ces propositions ne peut consister en une simple présentation de la technique opératoire. Le mot d'ordre de la “quête du sens” reflète la position dominante de la noosphère, et il figure explicitement dans les programmes. Mais il peut s'interpréter au moins de deux façons différentes :

- la première implique une justification de la technique opératoire de la multiplication de deux nombres décimaux ;
- la seconde implique une étude de situations dans lesquelles la multiplication est un modèle pertinent, en considérant notamment le problème du prolongement de la multiplication de deux entiers à celle de deux décimaux.

Compte tenu de ces deux interprétations, nous avons classé selon trois types les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux que nous avons recensées dans les publications :

- la problématique du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} n'est pas posée, la technique opératoire est admise ou justifiée par le professeur ;
- la problématique du prolongement des situations multiplicatives de \mathbb{N} à \mathbb{D} est posée par l'étude d'au moins une situation ou/et la technique opératoire est justifiée au moins en partie par l'élève mais il n'y a pas de lien entre la situation et la technique ;
- la problématique du prolongement de la multiplication de \mathbb{N} à \mathbb{D} est posée par l'étude d'au moins une situation multiplicative, la technique opératoire est justifiée en relation avec la situation.

Nous avons constaté que les manuels destinés à l'école élémentaire (ceux qui précèdent le changement de programme et qui abordent donc la multiplication des décimaux) proposaient seulement des scénarios du premier type. Il en est de même de la moitié des manuels actuels destinés au collège. Un des professeurs observés a élaboré un scénario de ce type, il a justifié la technique opératoire à ses élèves puis il leur a donné des exercices de calcul.

La seconde moitié des manuels de collège proposent des scénarios du deuxième type où l'élève assume en partie la charge de la justification de la technique opératoire. Les trois autres professeurs ont élaboré des scénarios de ce type. Ils ont articulé leur enseignement de la technique opératoire avec des méthodes de contrôle du résultat pour amener les élèves à détecter leurs erreurs et à les analyser. Les propriétés de la multiplication ont été admises et utilisées soit pour mener un calcul raisonné, soit pour élaborer la technique opératoire.

Dans les publications qui proposent des scénarios du troisième type, on ne trouve que des brochures à l'intention des enseignants ou des travaux de recherche en didactique des mathématiques. L'enseignement de la multiplication des nombres décimaux commence alors par une phase contextualisée, les situations de référence sont nombreuses : agrandissement de figures, aire de rectangle, bande à double graduation...

L'utilisation des outils d'analyse développés en didactique des mathématiques conduit au constat de choix partagés par les enseignants pour les deux dimensions qui concernent le scénario : le champ mathématique et la stratégie d'enseignement. Des choix qui ne seraient pas optimaux pour l'apprentissage des élèves. Considérer l'enseignant comme un individu en situation d'exercice d'un métier peut contribuer à expliquer davantage ses choix professionnels. C'est l'hypothèse que nous avons posée, précisément afin d'éviter de nous arrêter à cette lecture " en creux " des pratiques enseignantes.

Des contraintes globales expliquent les choix communs des professeurs

L'analyse précédente nous a permis de constater que les professeurs effectuent des choix globaux analogues à ceux des auteurs de manuels. Faut-il simplement en conclure l'assujettissement des enseignants à l'institution " manuel scolaire " ? Nous avons montré qu'une analyse des pratiques qui prend en compte les contraintes liées à l'exercice du métier permet aussi d'interpréter ces choix.

Le respect des programmes assure une certaine légitimité

La première des contraintes est celle du programme, les professeurs en respectent les indications, cela leur assure une légitimité sociale par rapport à leur hiérarchie, à leurs collègues ainsi qu'aux élèves et à leurs parents. Or, pour plusieurs raisons, les programmes ne favorisent pas, dans le cas de la multiplication des décimaux, un enseignement conforme aux résultats des recherches en didactique des mathématiques.

L'enseignement des nombres n'étant pas associé à un enseignement des grandeurs usuelles, cela limite les possibilités de contextualisation. Les notions liées à la multiplication qui figurent au programme de sixième y figuraient déjà

quand cette opération s'apprenait encore à l'école élémentaire. Elles sont réparties dans différents chapitres du programme et semblent donc devoir s'enseigner avec la multiplication comme prérequis. La technique opératoire ne s'intègre pas aisément dans la progression du collège : d'une part la multiplication des rationnels positifs est au programme de la classe de cinquième et, d'autre part, jusqu'en troisième, toutes les autres règles calculatoires portent sur les nombres et non sur leurs chiffres. Enfin, la durée à prévoir, compte tenu de l'ensemble du programme et de l'horaire officiel de la classe de sixième, est très limitée : quatre à six heures en comptant les résolutions de problèmes et le calcul approché qui permet de contrôler l'affichage d'une calculatrice.

Etre professeur ²⁹² impose donc le respect d'une contrainte institutionnelle qui porte à la fois sur les contenus enseignés et sur le rythme de l'enseignement. En outre, la prise en compte de l'exercice du métier dans l'analyse des pratiques enseignantes nous a permis de formuler plusieurs hypothèses quant à la détermination du champ mathématique et de la stratégie d'enseignement.

Des principes pour définir le champ mathématique d'une séquence

Pour définir le champ mathématique, les professeurs semblent inclure les contenus indispensables à l'enseignement de la séquence en prenant soin d'écarter tous ceux qui ne le sont pas et que les élèves méconnaissent trop. Ils appliqueraient ainsi un principe d'efficacité pédagogique selon lequel "on ne bâtit pas sur le sable".

Les professeurs choisiraient des situations d'enseignement et incluraient les concepts, les propriétés et les représentations symboliques qui en permettent l'étude. Ils respecteraient ainsi un principe de clôture du champ mathématique qui permet d'éviter à la fois les digressions qui détournent la classe de l'objectif visé et l'embarras de devoir refuser de répondre à des questions des élèves.

Les seules exceptions que nous avons constatées à ce principe de clôture sont les justifications des propriétés de la multiplication, qui sont utilisées soit pour élaborer la technique opératoire, soit pour mener des calculs raisonnés. Les professeurs semblent savoir qu'un élève de sixième qui sait comment faire ne demande pas pourquoi.

Des principes pour élaborer une stratégie d'enseignement

Pour des raisons qui tiennent à l'apprentissage mais aussi à des contraintes liées à l'exercice du métier d'enseignant, nous avons montré que les choix communs des professeurs concernant leur stratégie d'enseignement semblent aussi répondre à plusieurs principes :

– il est nécessaire de marquer des succès d'étapes dans la progression de l'enseignement. Ces succès garantissent le bon fonctionnement de la classe et la reconnaissance du professeur, ils sont fournis par des évaluations suffisamment réussies ²⁹³ ;

²⁹² En France, dans l'enseignement public ou privé sous contrat.

²⁹³ Yves Chevallard avait déjà montré comment les évaluations constituent un moyen de négociation avec les élèves.

- la durée des étapes est relativement limitée. Cette durée est déterminée en anticipant sur les capacités des élèves à résoudre les problèmes posés afin d'éviter la lassitude ou simplement l'attente de la réponse et des explications données par le professeur. Chaque étape permet, au professeur comme à sa hiérarchie et à ses élèves, de s'assurer de l'avancement dans le programme de l'année ;
- plutôt que de traiter "complètement" une notion complexe en une seule séquence, mieux vaut programmer des occasions de revoir cette notion durant l'année ce qui permet de l'enrichir progressivement ;
- l'enseignement d'une notion sous-jacente à différentes situations nécessite d'aborder chacune de ces situations dans leur spécificité mais aussi d'enseigner la notion abstraite.

Mais localement, chaque pratique est individuelle

Nous avons montré que, globalement, les professeurs effectuaient des choix communs quant au champ mathématique et à la stratégie d'enseignement, que ces choix rejoignaient ceux des auteurs de manuels scolaires et enfin que ces choix étaient fortement contraints par les programmes, le temps disponible et diverses attentes liées à la dimension sociale de ce métier. Mais localement, les pratiques sont très variées. Les professeurs investissent la marge de manœuvre qui subsiste dans trois dimensions que nous avons retenues pour analyser les pratiques : la stratégie d'enseignement, les activités mathématiques proposées aux élèves et les interactions professeur - élèves.

Des itinéraires différents pour construire les nouveaux savoirs

Ainsi, malgré l'importance des choix communs au niveau global, les professeurs ont élaboré chacun une stratégie d'enseignement particulière. Une seule reprenait celle qui figurait dans le manuel commun aux classes observées.

L'introduction de la multiplication a été problématisée par trois des quatre professeurs : l'un a proposé un problème concret d'achat de marchandises, les deux autres ont préféré un problème décontextualisé (estimation d'un produit ou élaboration de règles pour simplifier des calculs).

Les quatre professeurs ont permis d'argumenter sur la position de la virgule dans le produit de deux décimaux mais deux seulement ont proposé un moyen d'établir la technique opératoire (par l'utilisation d'opérateurs ou par un changement d'écriture des facteurs), le troisième a effectué une justification sur un exemple qui n'était pas généralisable, le dernier s'est contenté d'une constatation.

La technique opératoire a été institutionnalisée très tôt ou très tard dans la séquence, suivant que l'élaboration, la formalisation et la justification du savoir étaient assumées, respectivement, plutôt par le professeur ou plutôt par les élèves.

Les activités effectives des élèves de la classe varient suivant les professeurs

Pour comparer les activités des élèves, nous avons adopté une approche quantitative et une approche qualitative qui a nécessité une classification détaillée. Nous avons montré que les activités des élèves ne sont, dans aucune classe, analogues à celles qu'on aurait pu attendre à la lecture des énoncés du manuel utilisé par tous les professeurs observés.

Du point de vue quantitatif, durant la séquence complète, les activités des élèves varient, en nombre, du simple au double suivant leur professeur. Les écarts des moyennes horaires sont moindres mais elles passent tout de même de 40 à 70 activités par séance. Les professeurs sollicitent donc leurs élèves de façon très hétérogène.

D'un point de vue qualitatif, nos analyses ont montré que les activités des élèves ont été très différentes suivant leur classe et qu'elles sont conformes au projet de leur professeur :

- la répartition entre les activités de calcul écrit, de calcul mental ou raisonné, et de questionnement théorique dépend du scénario : plus la technique opératoire est institutionnalisée de façon précoce, plus la part des activités de calcul écrit est importante ;
- la répartition des activités de calcul mental ou raisonné correspond au choix de la stratégie d'enseignement, chaque professeur renforçant les activités qui serviront de levier pour l'apprentissage en fonction de la présentation choisie ;
- la répartition entre les activités d'application d'une technique et les activités de recherche dépend également du scénario : plus la construction des connaissances nouvelles est laissée à la charge des élèves, plus la part des activités de recherche est importante.

Par ailleurs, la prise en compte de la chronologie des activités des élèves a montré une grande variabilité de la durée des phases de construction des connaissances et des phases de leur mise en fonctionnement. Nous avons à nouveau constaté une cohérence des pratiques : les professeurs qui mettent le plus leurs élèves en situation de recherche sont ceux qui animent des séquences où les phases de construction des nouveaux savoirs sont les plus longues.

Des gestions qui s'opposent par les adaptations du professeur en classe

Les élèves perturbent parfois le déroulement : ils ne savent pas répondre à une question, ils en posent une, ils se trompent, etc. Nous assimilons ces perturbations à des incidents qui concernent directement l'apprentissage et que le professeur doit gérer. Les modes de gestion sont nombreux, nous les avons classés suivant l'activité de l'élève qu'ils peuvent engendrer : ignorer, répondre, détourner ou relancer.

Nous avons constaté que les professeurs ne laissent pas la même possibilité à l'émergence de perturbations : le taux horaire des incidents varie de 10 à 20. La nature même des incidents varie d'un professeur à l'autre. Ainsi, la séquence du professeur qui expose le savoir et demande aux élèves de l'appliquer comporte, de la part des élèves, moins de réponses incomplètes mais plus d'erreurs et de questions que celles de ses collègues.

Deuxièmement, nous avons montré que les professeurs se distinguent nettement par leur manière de gérer les incidents, qui est cohérente avec leur stratégie d'enseignement. Ainsi, le professeur qui délègue le plus l'élaboration des nouveaux savoirs aux élèves utilise le mode "relance" pour 70 % des incidents. A l'opposé, son collègue qui expose le savoir n'utilise la "relance" que pour 20 % des incidents.

Des pratiques personnelles où émergent des cohérences

Nous observons finalement, malgré les contraintes communes, une marge de manœuvre investie par les enseignants qui distinguent leur pratique à un niveau local. Nous admettons que les pratiques enseignantes possèdent une cohérence interne dont nous avons recherché des traces, en croisant les analyses.

Un premier critère apparaît dans les analyses qui confère aux pratiques d'un professeur une certaine logique : la référence à la stratégie d'enseignement. Nous avons ainsi montré que les activités effectives des élèves sont plus ou moins valorisées, qualitativement et quantitativement, conformément à leur contribution à la stratégie développée. Il en est de même des incidents qui surviennent durant le déroulement. Nous avons montré en outre que deux professeurs modifient leur façon de gérer les incidents durant les activités qui touchent spécifiquement à la stratégie d'enseignement.

Un second critère donne une autre logique aux pratiques d'un professeur : sa position vis-à-vis de deux conceptions de la classe, un lieu d'exposition des savoirs ou un lieu de travail des élèves. Ainsi, dans la classe d'un professeur proche de la première conception, l'exposition du savoir est située au début de la séquence, les activités proposées sont principalement des applications, les incidents sont peu nombreux et sont plutôt des questions, leur gestion relance rarement l'activité des élèves (autre que l'écoute et l'observation). A l'opposé, dans la classe d'un professeur proche de la seconde conception de la classe, le savoir est institutionnalisé en fin de séance après son élaboration assumée en partie par les élèves, les activités de recherche sont valorisées, les incidents sont assez nombreux et leur gestion relance très fréquemment l'activité des élèves (élaboration ou formulation d'une réponse).

Cependant, l'étude des pratiques de chaque professeur laisse aussi apparaître des compensations.

Des pratiques pour lesquelles on observe aussi des compensations

Les pratiques sont personnelles et cohérentes. Pour autant, il ne faudrait pas conclure à l'homogénéité des résultats concernant les activités d'un enseignant. La cohérence d'une pratique peut intervenir à plusieurs niveaux, hiérarchisés différemment par chaque professeur. Lorsqu'elles sont effectuées à un niveau adapté, les analyses permettent parfois d'inférer des "logiques" dans les choix des professeurs, logiques que nous attribuons à la cohérence de leur pratique. Lorsque le croisement de résultats différents laisse apparaître une contradiction (qui n'est qu'apparente), nous l'interprétons comme une compensation : une exception pour laquelle nous ne pouvons comprendre la logique, certainement parce que les analyses ne sont pas effectuées au niveau adapté.

Pour chacune des dimensions étudiées des pratiques, nous avons observé des compensations, compensations d'autant plus nombreuses que la marge de manœuvre était importante.

Des compensations au sein des pratiques, en amont de l'activité en classe

De lourdes contraintes s'exercent sur les choix relatifs au contenu qui, nous l'avons constaté, sont très proches pour les quatre professeurs. Pourtant, nous avons montré des lacunes dans les scénarios que nous interprétons comme des compensations.

Les champs mathématiques des séquences observées contiennent une justification de la technique opératoire mais ne comportent pas les preuves des propriétés utilisées pour la justifier ; les professeurs craignaient sans doute qu'une telle exigence de rigueur ne soit pas comprise par les élèves.

Les stratégies d'enseignement semblent inachevées : l'outil qui permet de donner du sens à la technique opératoire n'est développé complètement par aucun des professeurs. Peut-être, ces manques s'expliquent-ils par des raisons qui tiennent à l'attention des élèves ou à des contraintes de temps.

Des compensations pour animer le scénario prévu et pour gérer la classe

Des compensations au sein des pratiques ont été constatées dans leurs dimensions concernant les activités des élèves. Certains professeurs favorisent (en valeur relative) le calcul raisonné plutôt que l'application de la technique opératoire. Pourtant, les analyses ont montré que les activités de calculs écrits ont le même effectif (en valeur absolue) dans toutes les séquences observées. Les professeurs conçoivent probablement un seuil en deçà duquel l'enseignement de la technique opératoire serait vain et au-delà duquel l'amélioration des performances ne serait pas sensible.

La répartition des exercices de calcul écrit, entre ceux qui posent une difficulté d'application de la règle de la virgule et ceux qui n'en posent pas, est analogue pour tous les professeurs : 60 % sont difficiles. Ils souhaitent ainsi créer des occasions de travailler sur les erreurs des élèves. Nous interprétons alors les 40 % restants comme une compensation : les enseignants doivent aussi montrer aux élèves qu'ils savent appliquer la règle pour satisfaire leur attente de réussite et conserver leur confiance, ce qui contribue sans doute à l'apprentissage.

D'autres compensations concernent les adaptations. Ainsi, deux professeurs utilisent, presque autant l'un que l'autre, les gestions du type " relance ". Celles-ci sont les moins confortables pour l'enseignant, puisqu'elles prolongent voire génèrent les incidents, mais sont sûrement celles qui favorisent le mieux l'apprentissage si le savoir visé n'appartient pas à la zone proximale de développement de l'élève. De ces deux professeurs, celui qui laisse émerger le plus d'incidents utilise de préférence les relances quand les élèves répondent de façon incomplète, c'est-à-dire lorsqu'une partie du chemin est déjà parcourue et que le risque de provoquer de nouveaux incidents est mineur. En revanche, l'autre professeur utilise davantage ce mode de gestion quand l'incident est une erreur, acceptant ainsi de générer lui-même de nouveaux incidents.

Nous avons aussi montré que l'un des professeurs, qui a une gestion des incidents plutôt ouverte, est aussi plus directif durant les phases d'institutionnalisation des savoirs alors qu'un autre, qui en a une gestion plus fermée, est aussi

moins directif pendant les corrections d'exercices qui se prêtent à l'analyse d'erreurs.

Enfin, dans le cas des deux professeurs dont les séquences sont les plus longues, les adaptations se ferment avec le temps. Alors que la gestion générale des incidents comprend de nombreuses relances durant la première séance, les deux professeurs sont plus directifs pendant la dernière heure de cours. Le changement commence après que la moitié de la durée de la séquence est déjà écoulée. Cette fermeture intervient comme une compensation, dans une pratique plutôt ouverte, pour des professeurs manifestement soucieux de respecter la contrainte de temps qu'ils ont fixée à cette séquence compte tenu du programme de l'année.

Une interrogation sur la problématique

Ce retour sur nos résultats nous conduit à questionner la problématique adoptée. Nous souhaitons interroger la notion de pratiques " ordinaires ", et nous avons choisi d'étudier une séquence complète, celle de la multiplication des nombres décimaux que les professeurs enseignaient pour la première fois lors de nos observations. Ce choix pouvait sembler paradoxal, nous nous en sommes expliqué : nous pensions qu'il était inévitable que les professeurs préparent la séquence observée de façon particulière et nous avons choisi une notion qui justifiait une telle préparation, du fait de sa récente apparition dans le programme du collège.

Nous avons montré que la chronologie de la séquence ou le temps dont disposent les professeurs contraignent leur enseignement. Ces résultats confirment l'intérêt, pour ces travaux, d'avoir choisi d'analyser une séquence complète.

Nous nous demandons maintenant si quelques constats, mineurs dans cette recherche, ne s'expliquent pas aussi par la nouveauté de la séquence : les professeurs se sont tous laissés surprendre, à un moment de leur enseignement, par les réactions de leurs élèves. Madame Theano n'avait pas mesuré qu'une approche intuitive des ordres de grandeurs ne suffisait pas pour vérifier la position de la virgule du produit de deux décimaux. Madame Agnesi n'avait pas prévu que les élèves résoudraient ses problèmes de prix en utilisant des conversions. Monsieur Bombelli a été gêné par des aspects techniques de la multiplication des entiers. Madame Germain a longtemps tardé avant d'abandonner les ordres de grandeurs au profit des encadrements pour justifier certains résultats.

Comment procèdent-ils maintenant ? Qu'ont-ils appris de leur expérience d'enseignement de cette notion ? Certainement leurs séquences sont aujourd'hui quelque peu différentes de celles que nous avons observées. Une autre façon d'interroger les pratiques ordinaires aurait été de suivre plusieurs années consécutives l'enseignement de cette notion par le même enseignant afin de repérer ce qui évolue, ce qui se stabilise, et de comprendre finalement ce qui, dans sa pratique, est ordinaire.

Quelques pistes pour la recherche et pour la formation des enseignants

Les résultats obtenus sont une source de nouveaux questionnements et ouvrent quelques pistes de recherche en didactique des mathématiques ainsi que pour la formation initiale ou continue des enseignants.

Une piste de recherche pour prolonger certains résultats

Les résultats sont tirés de l'étude d'une séquence complète : l'enseignement de la multiplication des décimaux par des professeurs expérimentés, la même année scolaire, dans des classes de sixième de niveau standard, utilisant le même manuel, et disposant du même horaire annuel. En fixant la variable "contenu" nous obtenons des résultats qui sont peut-être très particuliers, pour certains professeurs. Une analyse portant sur une durée assez longue d'enseignement ou portant à la fois sur plusieurs notions, avec des méthodologies adaptées, serait nécessaire pour obtenir des résultats plus riches concernant les niveaux de cohérence d'une pratique enseignante. En particulier, nos constats concernant l'absence d'enseignement comprenant une phase contextualisée ou l'absence de changement de cadre, ne doivent pas être généralisés à l'enseignement annuel de tous les professeurs observés. Ces résultats concernent spécifiquement la multiplication des nombres décimaux.

Cette recherche nous amène à poser aussi de nouvelles questions

Des pistes pour de nouvelles recherches en didactique des mathématiques

Nous envisageons au moins quatre pistes différentes de nouvelles recherches en didactique des mathématiques qui pourraient contribuer à compléter les résultats actuels sur les pratiques enseignantes et leurs effets sur l'apprentissage.

Nous avons montré, au niveau local, une variabilité des pratiques des professeurs. Comme d'une façon fondamentale, les pratiques engagent les individus, nous sommes convaincu que des recherches sur les pratiques qui tenteraient de mettre à jour des logiques inconscientes seraient très fructueuses. Nous avons d'ailleurs pu percevoir quelques manifestations de ces logiques lors de nos observations, que nous n'avons pas mentionnées car elles ne rentraient pas dans le cadre de cette recherche.

Nos résultats posent aussi la question de l'effet des pratiques sur l'apprentissage des élèves, et cela d'au moins trois façons différentes. La première, la plus évidente, consisterait à croiser des résultats sur les pratiques et des résultats sur les performances des élèves. Nous nous sommes limité, pour cette recherche à une analyse des apprentissages potentiels utilisant des outils élaborés en didactique des mathématiques. Nous pensons, deuxièmement, à l'évaluation, sur le long terme, des effets cumulés des pratiques multiples des divers enseignants sur les apprentissages des élèves. Dans une telle perspective, des recherches pourraient compléter les précédentes mais elles demanderaient aussi à prendre en compte la possibilité de compensations de pratiques différentes que rencontrerait un même élève au cours de sa scolarité. Nous envisageons enfin que les résultats concernant la variabilité des pratiques, obtenus en centrant nos analyses sur le pôle Enseignant du système didactique, puissent se transposer pour les élèves. Des recherches pourraient montrer comment les élèves, qui sont aussi des individus

engagés dans une situation d'enseignement, ont leur activité contrainte, notamment par la pratique de leur professeur, mais investissent une marge de manœuvre de façon collective ou personnelle.

La troisième piste de recherche vient d'une question qui est restée complètement ouverte dans notre travail : nous avons constaté l'homogénéité de la forme adoptée par les professeurs pour rédiger leur leçon, cependant nous n'avons trouvé aucune contrainte qui permette d'interpréter cette régularité. Ainsi, les propriétés sont toujours illustrées par des exemples (génériques) mais ne sont pas toujours énoncées. Lorsqu'elles le sont, les professeurs choisissent la forme d'une règle d'action. Ces types de formulation correspondent-ils mieux aux élèves de cet âge ? comment s'intègrent-ils dans un processus d'apprentissage des formulations usuelles ? Ces questions intéressent la recherche en didactique des mathématiques car elles dépassent la seule analyse en terme de transposition didactique.

Une dernière question nous semble devoir soulever l'intérêt de la recherche : celle de la disparition de la notion de grandeur dans les programmes de l'école élémentaire et du collège, disparition qui semble conduire à un enseignement décontextualisé des notions concernant le domaine numérique et celui des opérations.

Des pistes pour la formation des enseignants

Nous avons observé des professeurs expérimentés pour lesquels les pratiques sont peu susceptibles d'évoluer sans intervention spécifique. Pourtant, compte tenu de nos hypothèses sur l'apprentissage, la tentation existe, à certains moments de la lecture des narrations des séquences, d'envisager des changements radicaux ou des optimisations de l'enseignement dispensé par les professeurs.

De tels changements sont-ils possibles ? Quelles actions de formation pourraient permettre à des pratiques d'enseignants d'évoluer ? Les résultats obtenus dans cette recherche nous laissent à penser que la tâche est ardue. Une double condition apparaît comme nécessaire, compte tenu de la cohérence et de la complexité des pratiques : que différentes composantes de l'activité professionnelle soient simultanément objet de la formation et que soit pris en compte le problème de leur recomposition. En ce qui concerne l'activité du professeur en classe, cette dimension étant très personnelle, des accompagnements individualisés semblent devoir être envisagés pour obtenir l'aménagement ou l'appropriation de certaines procédures.

Au carrefour de la recherche en didactique des mathématiques et des questions de formations, nous voudrions évoquer la question de l'impact des travaux de recherche sur l'enseignement ordinaire. Différentes recherches ont montré que les professeurs exploitent peu les résultats de la didactique des mathématiques. Sur l'enseignement des nombres décimaux à l'école élémentaire et au collège, la thèse de Jeanne Bolon pose ce problème duquel nous sommes parti. Il nous apparaît qu'une difficulté ressentie par les formateurs à la lecture des travaux menés en didactique des mathématiques s'explique d'abord par une différence qui tient aux contraintes que subissent les pratiques ordinaires. Ces contraintes communes, nous l'avons montré, sont pour beaucoup d'entre elles issues de décisions de l'institution scolaire. Or la position de formateur et celle de chercheur

sont différentes par rapport à cette institution : le formateur, comme le professeur, doit en accepter les contraintes alors que le chercheur peut les interroger dans le cadre de l'élaboration d'un enseignement expérimental.

Retour à la question initiale des pratiques ordinaires

Nous avons observé les séquences complètes d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux de quatre professeurs différents exerçant dans des conditions analogues en classe de sixième de niveau standard. Nous avons analysé leurs pratiques en utilisant le cadre de la didactique des mathématiques et en faisant appel à la psychologie ergonomique.

Nous avons montré l'existence d'un large socle commun des pratiques des professeurs mais aussi de divergences profondes. Nous analysons les régularités constatées comme les traces de contraintes sur l'activité de l'enseignant. Certaines d'entre elles sont de nature institutionnelle, elles influencent beaucoup les choix globaux des professeurs. D'autres sont directement issues du fait que ce métier s'exerce en classe, la gestion d'un groupe d'élève impose des contraintes que l'on retrouve dans toutes les activités de l'enseignant y compris celles qui concernent la préparation des cours. Nous avons constaté aussi des divergences qui témoignent de l'investissement personnel d'une marge de manœuvre disponible. En outre, à plusieurs reprises, des analyses croisées ont confirmé, pour chaque professeur, l'existence d'une cohérence de ses pratiques d'enseignement.

Une pratique ordinaire se caractérise donc par le fait qu'elle intègre des contraintes communes partagées par la plupart des professeurs qui enseignent à un niveau donné. Elle se distingue ainsi des pratiques qui seraient soumises à des contraintes spécifiques ou de celles qui, au moins pour une séquence, ne tiendraient plus compte de toutes les contraintes communes, nous pensons notamment à tous les professeurs qui animent des séquences d'enseignement expérimental.

BIBLIOGRAPHIE ²⁹⁴

APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, Nombres décimaux.

APMEP (1991), *Evaluation du programme de mathématiques Sixième 1989 - Cinquième 1990*, Paris : APMEP.

APMEP-IREM de Besançon (1987), *EVALuation du Programme de Mathématiques fin de sixième*, Paris : APMEP.

ARTIGUE M. (1984), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse, Université de Paris 7.

ARTIGUE M. (1986), Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/1 (5-62), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/3 (281-308), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BASSO M. & BONOTTO C. (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* vol. 19A N. 5 (424-449), Paderno del Grappa TV. : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

BODIN A. (1994), Un observatoire du système d'enseignement des mathématiques - La situation de l'observatoire EVAPM, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (395-402), Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

BOERO P. (1994), Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergence et divergence dans les perspectives de recherche, in *Vingt ans de didactique des mathématiques* (17-50), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BOERO P.; DAPUETO C.; FERRERO E.; GARUTI R.; LEMUT E.; PARENTI L.; SCALI E. (1995), Aspects of Mathematics-Culture Relationship

²⁹⁴ Cette bibliographie rassemble les titres qui figurent dans la thèse ainsi que quelques ouvrages utilisés sans pourtant qu'un extrait n'ait été cité.

in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School, in *Proceedings of PME XIX*, Recife 1, pp. 151-166.

BOERO P. (2000), Objets d'usage courant dans la vie sociale exploités en classe, in *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques du 18 au 21 août 1999*, tome 1 pp. 245-252, Rectorat de Caen, IUFM de Caen, ARDM : Caen.

BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5.

BRENNER M.-E. (1998), Meaning and Money, in *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 123-155.

BRISIAUD R. (1994), Penser l'usage du mot "fois" et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication, in : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France (195-202)*, Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165-198), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques* 1/1 (11-59), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37-127), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1986), Fondement et méthode de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2 (33-115), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz and C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs – Obstacles et conflits* (41-63). Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE).

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux : IREM de Bordeaux.

BUTLEN D. (1985), *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*, Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7.

BUTLEN D. & PEZARD M. (1996), *Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple :*

impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, Cahier de DIDIREM n°27, Paris : IREM de Paris 7.

CHARLOT B., BAUTIER E & ROCHEX J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (135–180), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. (1995), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in M.-J. Perrin & R. Noirfalise (Eds), *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques* (83–122). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur, *Recherches en didactique des mathématiques* 17/3 (17–54), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'été. La Rochelle juillet 1998*.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2 (221–266), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x*, n° 55, pp. 5–32

COLOMB J. (sous la direction de) (1995), *Calcul littéral – Savoirs des élèves de collège*, Paris : INRP, Documents et travaux de recherche en éducation.

DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques*, Paris : Seuil.

DAVISSE A. & ROCHEX J.-Y. Collectif sous la direction de (1995), *Pourvu qu'ils m'écoulent... Discipline et autorité dans la classe*, Créteil : CRDP.

DAVISSE A. & ROCHEX J.-Y. Collectif sous la direction de (1998), *Pourvu qu'ils apprennent... face à la diversité des élèves*, Créteil : CRDP.

DEP ou DP&D (depuis 1989), *Evaluation CE 2 - 6ème – Résultats nationaux*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective.

DEP (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

DIENES Z. P. (1966), *Construction des mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France.

- DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.
- DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Berne : Peter Lang.
- GIRODET M.-A. (1996), *L'influence des cultures sur les pratiques quotidienne des calculs*, Paris : CREDIF ENS de Fontenay-St Cloud DIDIER.
- GRISVARD C. & LEONARD F. (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP* n°340, Paris.
- Groupe Nouveaux programmes de Collège (1996), *Activités pour la classe de sixième : Nombres décimaux - Aires et Périmètres*, Montpellier : IREM de Montpellier 2.
- HACHE C. & ROBERT A. (1997), Analyse de pratiques effectives en classe de seconde, *Recherches en didactique des mathématiques* 17/3 (103-150), Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
- HACHE C. (1999), *L'enseignant de mathématiques au quotidien, étude de pratiques en classe de seconde*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 7.
- IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Paris : Robert Laffont.
- INRP – ERMEL (1991), *apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier.
- IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal*, Bastia : CDDP de la Haute Corse.
- JOSSE E. & ROBERT A. (1993), Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs, *Recherches en didactique des mathématiques* 13 (119-154), Grenoble : La pensée sauvage éditions.
- LECOQ J. (1976), La multiplication des naturels à l'école élémentaire, in : *Brochure Elem Math II*, Paris : APMEP.
- LELONG-FERRAND J. (1985), *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF.
- LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail – Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.
- MASSELOT P. (2000), *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 7.
- PERRIN M.-J. (1984), *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège*, Cahier de didactique des mathématiques n°24, Paris : IREM de Paris 7.

PERRIN M.-J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques, *Recherches en didactique des mathématiques* 19/3 (279–322), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

POSTIC M. & DE KETELE J.-M. (1988), *Observer des situations éducatives*, Paris, PUF.

PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier/INRP.

PRESSIAT A. (2001), *Grandeurs et mesures : évolutions des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition*, Cours donné à la 11^e Ecole d'été de didactique des mathématiques le 26 août 2001.

ROBERT A. (1996), Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques : un essai de didactique professionnelle, *Cahier de DIDIREM* n°26. Paris : IREM de Paris 7.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université, *Recherches en didactiques des mathématiques* 18/2 (139–190), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

ROBERT A. (1999), Pratique des enseignants de mathématiques, in : *Didaskalia* n°15 (123–157), De Boeck & Larcier : Louvain-la-Neuve.

ROBERT A. (2000), Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant, in *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, Paris : ARDM.

ROBERT A. VANDEBROUCK F. (2001), Recherches sur l'utilisation du tableau par les enseignants de mathématiques de seconde, Paris 7 : *Cahier de Didirem*, n°36.

ROBERT A. (à paraître), Pratiques des enseignants de mathématiques du lycée : un système cohérent – Une thèse et ses conséquences, *Recherches en didactiques des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

RODITI E (1995), DEA de didactique des disciplines, Didactique des mathématiques – *Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques*, *Cahier DIDIREM* n°30, Paris : IREM de Paris 7.

RODITI E (1996), la racine carrée en troisième, étude d'une activité, *cahier didirem* n°17, Paris : IREM de Paris 7.

RODITI E. (2000), Ordre de grandeur et multiplication des décimaux, in *Bulletin APMEP* n° 431 Novembre-Décembre 2000 (719–727), APMEP : Paris.

ROGALSKI J. (1985), *Acquisition de la bidimensionnalité*, Thèse d'Etat.

ROGALSKI J (1999), *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*, conférence donnée lors du stage national COPIRELEM, 3-5 mai 1999 à Limoges.

ROGALSKI J (2000), Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant, in : *Actes du XXVI^e colloque COPIRELEM* (pp. 45-66). Limoges : IREM.

ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure*, Bruxelles : Didier Hatier.

SCALI E. (1996), Expériences des enfants dans le domaine économique et construction des compétences de base en arithmétique, in *Proceedings of CIAEM* 47, pp. 409-413, Berlin.

SCHUBAUER-LEONI Maria Luisa (1999), Les pratiques de l'enseignant de mathématiques : modèles et dispositifs de recherche pour comprendre les pratiques, in : *Actes de la X^e école d'été de didactique des mathématiques – tome 1*, Houlgate : édition ARDM.

TOCHON F. V. (1993), *L'enseignant expert*, Paris : Nathan.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993), *Se former pour enseigner les mathématiques Tome 4 : Nombres et opérations, fonctions numériques*, Paris : Armand Colin, Formation des enseignants.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., RICCO G., MARTE P., METREGISTE R., GIACCOBBE J. (1979), *Acquisition des "structures multiplicatives"*, IREM d'Orléans et Centre d'études des processus cognitifs et du langage, Paris : EHESS-CNRS.

VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : Peter Lang.

VERGNAUD G. (1983), Multiplicatives structures, in R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and processes*. New York : Academic Press.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* 10/2.3 (133-170), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

VERGNAUD G. (1992), Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation d'adultes peu qualifiés ? *Education permanente* n°111 (19-31).

VERGNAUD G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schèmes et de champ conceptuel, in : *Vingt ans de didactique des mathématiques* (177-191), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

VERGNES D. (2000), *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris 5.

VIBES J. (1973), *Information des maîtres, Décimaux et approche des réels*, Reims : INRP - CRDP.

VYGOTSKI (1985), *Pensée et langage*. Paris : Messidor.

Manuels scolaires et programmes officiels

Manuels scolaires

Pour l'école élémentaire

- L'heure des maths CE2 (1999), Paris : Hatier.
Math outil CM1 (1997), Paris : Magnard.
Diagonale CM2 (1994), Paris : Nathan.
Math élem. CM2 (1998), Paris : Belin.
Math et calcul CM2 (1988), Paris : Hachette.
Math outil CM2 (1997), Paris : Magnard.
Nouvelle collection Thévenet CM2 (1996), Paris : Bordas.
Objectif Calcul CM2 (1988), Paris : Hatier.
PUGIBET CH. (1947), Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire, Paris : Armand Colin.

Pour le collège

- Cinq sur cinq Math 6e (1996), Paris : Hachette.
Décimale 6e, (1996), Paris : Belin.
Le nouveau Pythagore 6e (1996), Paris : Hatier.
Le nouveau Transmath 6e, (1996), Paris : Nathan.
Math 6e, (1996), Paris : Bordas.
Mathématiques 6e (1996), Paris : Delagrave.
Triangle 6e (1996), Paris : Hatier.

Textes des programmes officiels ou accompagnements

Pour l'école élémentaire

- Programmes et instructions officielles du 2 janvier 1970.
Instructions pédagogiques pour le cycle moyen, arrêté du 7 juillet 1978.
Programme du 23 avril 1985 pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3.
Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995.
Projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire, 26/08/1999.

Pour le collège

- Programme de mathématique de la classe de sixième, 22 novembre 1995.
Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.
Accompagnement des programmes de 6e, mathématiques, 1996.
Programmes de troisième, BO du 15 octobre 1998.

Table des matières

INTRODUCTION	5
Genèse de la recherche : des constats de formateur	5
<i>Les professeurs sont confrontés à des erreurs persistantes de leurs élèves</i>	5
<i>Faire appel, en formation, à la recherche en didactique des mathématiques</i>	6
<i>Les professeurs n'utilisent pas les résultats des recherches en didactique</i>	6
<i>Une direction de recherche qui se heurte à deux obstacles</i>	7
<i>Une recherche qui imbrique deux approches, didactique et ergonomique</i>	7
Présentation du sujet	8
<i>Le contexte de la recherche, des conséquences sur le sujet</i>	8
<i>Quelques limitations du sujet</i>	9
<i>La problématique générale</i>	10
<i>Premiers éléments méthodologiques</i>	11
Présentation des résultats de nos travaux	12
 CHAPITRE 1 PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE	 13
1. Une entrée pragmatique dans l'étude des pratiques	15
<i>Une analyse des pratiques qui commence par l'observation des classes</i>	16
<i>Une utilisation conjointe de deux cadres théoriques</i>	17
<i>Les pratiques enseignantes et leurs conséquences sur l'apprentissage</i>	17
<i>Les pratiques enseignantes comme exercice d'un métier</i>	19
2. Vers une problématique particulière d'analyse de pratiques	21
<i>Des questions sur le savoir, nécessaires pour analyser les pratiques</i>	21
<i>La multiplication des décimaux en sixième, quels enjeux ?</i>	22
<i>La multiplication des décimaux, quels enseignements possibles ?</i>	22
<i>Des questions sur l'ensemble des pratiques enseignantes observées</i>	23

<i>Quelles contraintes sur les pratiques ?</i>	23
<i>Et quelles marges de manœuvre ?</i>	24
Des questions sur chaque pratique enseignante observée	25
<i>La pratique d'un professeur, quel ensemble ?</i>	25
<i>Quelle cohérence ?</i>	25
<i>Et quelles compensations ?</i>	26
3. Méthodologie générale	27
Les séquences observées, les professeurs et leurs classes	27
<i>Un sujet mathématique commun et des séquences complètes</i>	27
<i>Un contexte institutionnel propice à l'étude d'un enseignement ordinaire</i>	27
<i>Des classes comparables, des conditions d'enseignement analogues</i>	28
<i>Les professeurs observés</i>	28
La constitution de données analysables à partir des séances enregistrées	29
<i>Le projet d'enseignement du professeur : une reconstitution approuvée</i>	29
<i>Trois types de données sur le projet d'enseignement de la séquence</i>	30
<i>Deux observables du déroulement de la séquence</i>	31
Le matériel à utiliser : sources publiées et sources expérimentales	33
<i>Les sources documentaires de notre recherche</i>	33
<i>Les sources expérimentales de notre recherche</i>	35
Quelles analyses des différentes sources utilisées ?	38
<i>Une analyse a priori de l'enseignement de la multiplication : trois étapes</i>	38
<i>L'analyse des pratiques avant la classe : l'élaboration du projet</i>	39
<i>L'analyse des pratiques en classe : l'animation du projet</i>	40
CHAPITRE 2 ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX ET DE LEUR MULTIPLICATION QUELS ENJEUX MATHÉMATIQUES ?	43
1. Les enjeux de l'enseignement des décimaux	46
Rappel épistémologique sur les nombres décimaux	47
Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient	48
<i>Des rationnels pour comparer des grandeurs</i>	49
<i>Des rationnels pour fractionner des grandeurs</i>	52
<i>Des rationnels pour opérer sur les grandeurs</i>	53
<i>Présentation des nombres décimaux comme des rationnels particuliers</i>	55
Les décimaux écrits sous la forme d'une somme	56
<i>Subdivisions successives de l'unité de mesure</i>	57
<i>Les écritures décimales illimitées</i>	58
<i>Approche décimale d'un rationnel ou d'un irrationnel</i>	60
Les décimaux écrits sous la forme d'un produit	62
<i>Les mesures décimales et les changements d'unités</i>	62
<i>Un essai d'enseignement des grandeurs familières</i>	65
A priori, quel enseignement des nombres décimaux à l'école et au collège ?	67

2. Les enjeux de l'enseignement de la multiplication	70
Les problèmes que la multiplication permet de résoudre	71
<i>La multiplication, une addition répétée</i>	72
<i>Des situations multiplicatives indépendantes de l'addition</i>	76
<i>L'addition répétée a-t-elle finalement disparu de l'enseignement ordinaire ?</i>	80
<i>Prolongement des situations multiplicatives : des entiers aux rationnels</i>	81
Les propriétés de la multiplication	82
<i>Commutativité de la multiplication</i>	83
<i>Associativité de la multiplication</i>	85
<i>Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.</i>	87
<i>Multiplications par 0 et par 1</i>	88
<i>Prolongement des propriétés de la multiplication : des entiers aux rationnels</i>	89
Les procédures de calcul du produit de deux décimaux	91
<i>Avec les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient d'entiers</i>	91
<i>Avec les nombres décimaux écrits comme une somme</i>	92
<i>Avec les nombres décimaux considérés comme des mesures</i>	94
<i>Avec la calculatrice</i>	96
<i>A priori, quel enseignement de la multiplication des décimaux ?</i>	97
<i>Représentations des décimaux et situations multiplicatives</i>	98
<i>Représentations des décimaux et méthodes de calcul d'un produit</i>	99
<i>Propriétés algébriques et situations multiplicatives</i>	100
Conclusions sur les nombres décimaux et leur multiplication	102
 CHAPITRE 3 LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME, QUELLE TRANSPOSITION DIDACTIQUE ?	 107
1. De la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs	111
Dans des manuels pour l'école primaire édités avant 1995	113
<i>Le manuel de la collection " Objectif Calcul " édité par Hatier</i>	113
<i>Le manuel de la collection " Diagonale " édité par Nathan.</i>	116
<i>Le manuel de la collection " Math et Calcul " édité par Hachette.</i>	118
<i>Quel enseignement de la multiplication des décimaux ?</i>	118
Dans des manuels de collège édités après 1995	119
<i>Présentations de la multiplication de deux nombres décimaux</i>	120
<i>Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes</i>	122
Des différences entre les manuels pour l'école primaire et ceux pour le collège	124
2. Des activités, une technique, des problèmes multiplicatifs	124
Dans un manuel d'arithmétique de 1947	125
<i>Présentation de la multiplication.</i>	125
<i>Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes</i>	126
<i>Quelle évolution jusqu'à nos jours ?</i>	127

Dans des manuels de collège édités en 1996	129
<i>Présentations de la multiplication</i>	130
<i>Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes</i>	131
<i>Quel enseignement de la multiplication dans ces manuels de sixième ?</i>	132
3. Construction des connaissances, institutionnalisation et réinvestissements	133
Dans deux ingénieries didactiques de construction des décimaux	134
<i>La multiplication des décimaux chez G. Brousseau</i>	134
<i>La multiplication des décimaux chez R. Douady & M.-J. Perrin</i>	136
<i>Quelle multiplication dans ces deux ingénieries didactiques des décimaux ?</i>	138
La multiplication des décimaux dans la thèse de Jeanne Bolon	140
<i>Ordre de grandeur du produit de deux décimaux</i>	140
<i>De la multiplication des entiers à celle des décimaux</i>	140
<i>La multiplication ne conserve pas le format social des nombres</i>	141
<i>La multiplication n'est pas qu'une addition répétée</i>	141
<i>Multiplication/division par 10, 100 ou 1000 et changements d'unités</i>	142
<i>Multiplication et agrandissement</i>	143
<i>Multiplication, aire et périmètre de rectangles</i>	144
<i>Quelle multiplication des décimaux dans les suggestions de Jeanne Bolon ?</i>	144
Une expérience d'enseignement comprenant une phase contextualisée	145
La multiplication des décimaux dans les publications pour les enseignants	146
<i>Comment ces publications s'adressent-elles aux enseignants ?</i>	147
<i>Quelles situations pour enseigner la multiplication des décimaux ?</i>	148
<i>Des procédures personnelles à la technique usuelle</i>	150
<i>Les réinvestissements dans de nouvelles situations multiplicatives</i>	150
Conclusion : la multiplication, des transpositions divergentes	151
<i>Trois catégories d'enseignement, quelle pertinence ?</i>	152
<i>Multiplications des décimaux, quels nombres avec quelles écritures ?</i>	154
<i>Multiplication des entiers et des décimaux, rupture ou continuité ?</i>	154
CHAPITRE 4 LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE À L'ÉPREUVE DE L'EXERCICE DU MÉTIER	157
1. Quelles sont les difficultés d'apprentissage ?	162
Difficultés d'apprentissage des nombres décimaux	162
<i>Les décimaux et les rationnels</i>	163
<i>Les décimaux et les nombres composés</i>	165
<i>Les décimaux, abscisses de points de la droite graduée</i>	166
<i>Les décimaux et l'écriture décimale</i>	166
<i>Les décimaux et les ordres de grandeur</i>	167
<i>Les décimaux et les grandeurs usuelles</i>	168
<i>Conclusion : une maîtrise encore insuffisante du nombre décimal</i>	168

Difficultés d'apprentissage de la multiplication	169
<i>Technique de la multiplication de nombres entiers</i>	169
<i>Les multiplications par 10, 100, 1 000...</i>	170
<i>Les divisions par 10, 100, 1 000...</i>	171
<i>Les multiplications de deux décimaux</i>	172
<i>Les problèmes issus de situations multiplicatives</i>	174
<i>Conclusion : des difficultés qui portent sur la technique et sur le sens</i>	179
 2. Intégration de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans une progression annuelle	 180
L'objet multiplication des décimaux dans l'ensemble du programme	181
<i>La multiplication des décimaux, un outil pour les travaux géométriques</i>	182
<i>La multiplication des décimaux pour apprendre le sens de l'écriture décimale</i>	182
<i>La multiplication, un outil pour résoudre des problèmes numériques</i>	183
<i>La multiplication des décimaux, une technique à connaître</i>	184
<i>La multiplication des décimaux et les fractions décimales</i>	184
<i>La multiplication des décimaux et la gestion de données</i>	184
<i>Bilan : fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de 6^e</i>	184
L'objet multiplication des décimaux dans les manuels de sixième	186
<i>La niche de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième</i>	186
<i>Les fonctions de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième</i>	186
 3. Quel projet élaborer compte tenu des contraintes ?	 187
La technique opératoire dans le cas d'un enseignement décontextualisé	187
<i>Avec les fractions décimales</i>	188
<i>Avec les unités de mesures</i>	188
<i>Avec un encadrement du produit ou l'ordre de grandeur des facteurs</i>	188
<i>Avec les opérateurs</i>	189
<i>Avec l'écriture décimale</i>	189
La technique opératoire enseignée à partir d'une situation multiplicative	190
<i>Multiplication des décimaux dans le contexte des problèmes de prix</i>	191
<i>Multiplication des décimaux dans le contexte du calcul d'aire de rectangles</i>	191
<i>Multiplication des décimaux dans le contexte de l'agrandissement de figures</i>	191
Retour au programme : maîtrise de l'opération et durée de l'enseignement	192
<i>Pas de virtuosité technique</i>	192
<i>Quelle durée pour cet enseignement ?</i>	193
 Conclusion : les projets que les professeurs peuvent élaborer	 194
Un projet d'enseignement pour atteindre les objectifs fixés par le programme	194
<i>Une évolution des objectifs institutionnels</i>	194
<i>Les manuels scolaires proposent un enseignement décontextualisé</i>	195
<i>Les travaux de recherche conduisent à des choix différents</i>	195
Elaborer un projet d'enseignement adapté aux élèves	196
<i>Les nombres décimaux à l'entrée en sixième</i>	196

<i>La multiplication à l'entrée en sixième</i>	196
Intégrer l'enseignement de la multiplication dans la progression annuelle	197
<i>Les programmes laissent une certaine marge de manœuvre aux professeurs</i>	197
<i>La durée contraint fortement le projet d'enseignement</i>	198
 CHAPITRE 5 ANALYSE DES SCÉNARIOS RECONSTITUÉS À PARTIR DE LEURS DÉROULEMENTS	 199
<i>Les contenus mathématiques inclus dans la séquence</i>	203
<i>L'organisation des contenus et leur présentation aux élèves</i>	203
<i>Les tâches prescrites aux élèves, en classe, par le professeur</i>	204
<i>L'analyse des scénarios d'enseignement de la multiplication des décimaux</i>	205
 1. Les scénarios, quels enjeux pour les professeurs ?	 205
Les champs mathématiques des scénarios des séquences observées	205
<i>Multiplication des décimaux, technique opératoire et propriétés</i>	206
<i>Multiplication des décimaux et écritures des nombres</i>	207
<i>Multiplication des décimaux et situations multiplicatives</i>	208
<i>Comparaison des champs mathématiques des quatre séquences</i>	209
Les stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs observés	210
<i>La stratégie de Madame Theano, conséquences sur le scénario</i>	212
<i>La stratégie de Madame Agnesi, conséquences sur le scénario</i>	214
<i>La stratégie de Monsieur Bombelli, conséquences sur le scénario</i>	215
<i>La stratégie de Madame Germain, conséquences sur le scénario</i>	217
<i>Comparaison des stratégies d'enseignement</i>	219
Première évaluation des enjeux des scénarios élaborés par les professeurs	221
<i>Évaluation des enjeux mathématiques dans les séquences observées</i>	221
<i>Évaluation des enjeux didactiques dans les séquences observées</i>	222
<i>Conclusion sur les enjeux mathématiques et didactiques des quatre séquences</i>	227
 2. Convergence des choix des professeurs au niveau global	 228
" Principe " de conformité au programme officiel	229
<i>Les professeurs respectent le contenu du programme</i>	229
<i>Les programmes imposent un certain rythme à l'enseignement</i>	230
<i>La conformité aux programmes assure la légitimité du professeur</i>	231
Trois principes pour délimiter le champ mathématique d'une séquence	231
<i>Principe d'efficacité pédagogique : on ne bâtit rien de solide sur le sable</i>	232
<i>Principe de clôture du champ mathématique d'une séquence</i>	233
<i>Un élève de sixième qui sait comment faire ne demande pas pourquoi</i>	235
<i>Conclusion sur les principes qui conduisent à la délimitation du champ mathématique des séquences observées.</i>	237
Quatre principes pour élaborer une stratégie d'enseignement	238
<i>Principe de nécessité de succès d'étape</i>	238
<i>Principe du respect de l'attente des élèves</i>	240

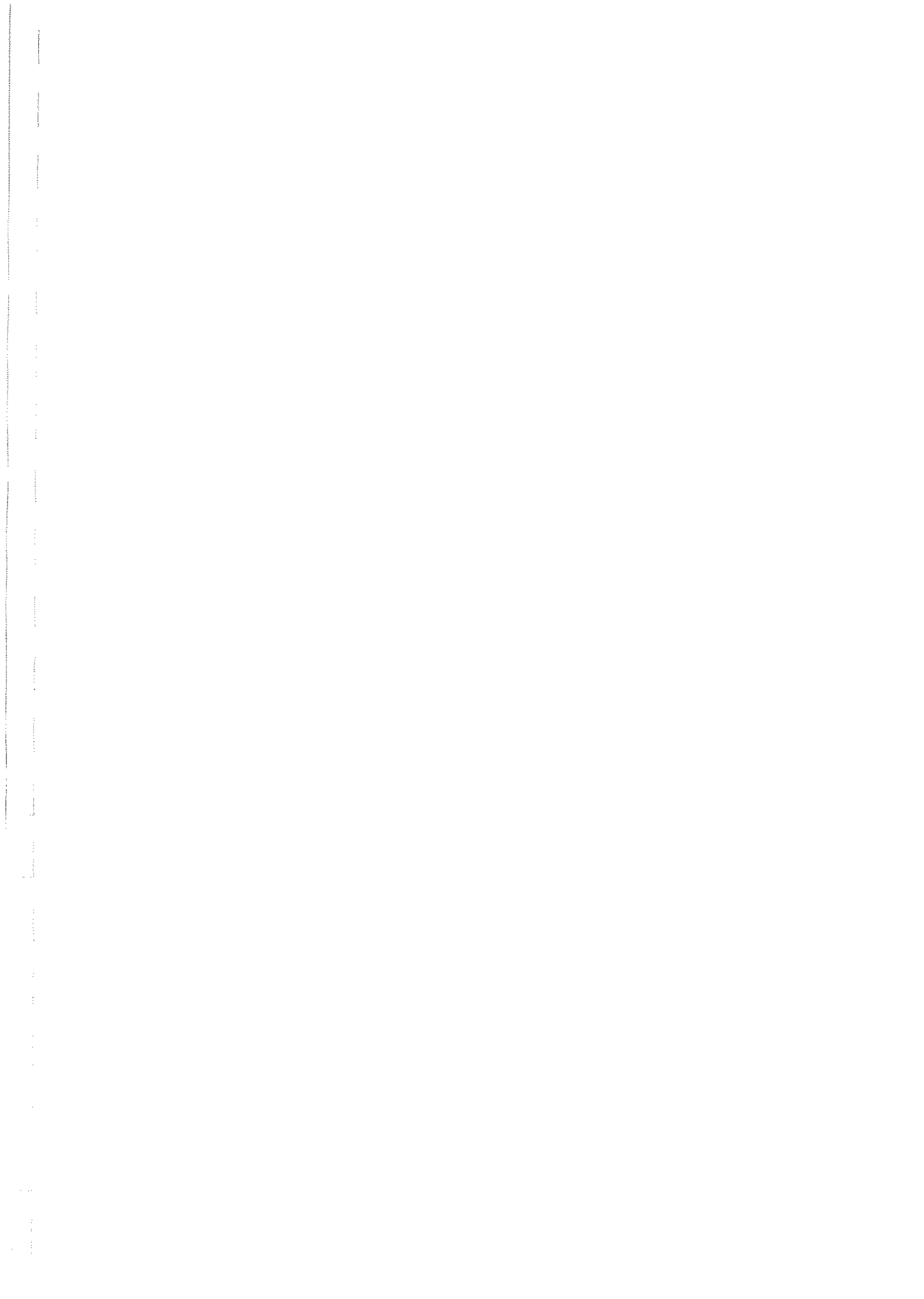
<i>Principe de programmation d'un retour à l'enseignement d'une notion</i>	242
<i>Principe de non-abstraction par l'étude de problèmes isomorphes</i>	243
<i>Conclusions sur l'élaboration de la stratégie d'enseignement</i>	245
Une stratégie d'enseignement pour aider à l'animation du scénario	246
<i>Une stratégie d'enseignement pour conduire la classe</i>	247
<i>Une stratégie d'enseignement pour gérer les incidents</i>	250
<i>Conclusions sur l'utilisation de la stratégie pour animer le scénario</i>	253
Conclusions sur les choix des professeurs au niveau global	254
<i>Des choix communs concernant les contenus et leur organisation</i>	254
<i>Quelques différences importantes concernant le travail des élèves</i>	255
3. Diversité des choix des professeurs au niveau local	256
La première fois que les élèves multiplient deux décimaux	256
<i>Rappel des choix repérés dans les publications</i>	256
<i>Les choix des professeurs que nous avons observés</i>	257
La question de la technique opératoire	258
<i>Des méthodes pour calculer le produit de deux décimaux</i>	259
<i>Les choix des professeurs</i>	260
L'étude des propriétés de la multiplication	262
<i>Propriétés algébriques</i>	262
<i>Multiplication par un facteur inférieur à 1</i>	263
<i>La multiplication et l'ordre</i>	265
Les situations multiplicatives	265
Les exercices donnés par les enseignants	266
Les phases d'institutionnalisation	269
<i>Les institutionnalisations des séquences des quatre professeurs</i>	270
<i>Analyse de l'intégration des phases d'institutionnalisation dans le déroulement</i>	276
<i>Analyse du contenu et de la forme du texte de la leçon</i>	279
Conclusions sur les choix des professeurs au niveau local	284
Conclusions sur les scénarios élaborés par les professeurs	286
CHAPITRE 6 LES ACTIVITÉS DES ÉLÈVES, COHÉRENCE AVEC LE SCÉNARIO	291
1. Quelques précisions méthodologiques	293
Des questions sur les pratiques en classe, analysées par les activités des élèves	294
<i>Quelles ont été les activités des élèves en classe ?</i>	294
<i>Des questions relatives à l'animation du scénario</i>	295
Méthodes d'analyse des pratiques enseignantes par les activités des élèves	296
<i>Définition des activités effectives des élèves</i>	296
<i>Des méthodes pour analyser les activités effectives des élèves</i>	298

Quelles activités effectives des élèves ? Définition et répartition	299
<i>Définition des activités effectives des élèves</i>	299
<i>Repérage des activités effectives dans les séquences observées</i>	301
<i>Nombre total et moyenne horaire des activités effectives</i>	303
2. Analyse des activités effectives significatives	305
Les activités significatives des séquences du manuel et des professeurs	305
<i>Les activités attendues significatives de la séquence du manuel</i>	305
<i>Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Theano</i>	306
<i>Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Agnesi</i>	307
<i>Les activités effectives significatives de la séquence de Monsieur Bombelli</i>	308
<i>Les activités effectives significatives de la séquence de Madame Germain</i>	309
Les professeurs suivent-ils le manuel pour choisir les activités significatives ?	310
Comparaison des séquences des professeurs par les activités significatives	313
Conclusion : les activités significatives sont cohérentes avec le scénario prévu	313
3. Analyse des activités regroupées par catégorie	314
Effectifs et répartition des activités suivant leur catégorie	315
<i>Effectifs des catégories d'activités dans les cinq séquences</i>	315
<i>Répartition des catégories d'activités dans les cinq séquences</i>	317
Le calcul écrit, le calcul mental ou réfléchi, répartition des activités	320
<i>Le calcul écrit, des choix communs aux enseignants observés</i>	321
<i>Le calcul mental ou réfléchi, cohérence avec le projet d'enseignement</i>	323
Application d'une technique ou activités de recherche	328
Conclusion : les catégories d'activités différencient les déroulements	329
4. Analyse chronologique des activités effectives	330
Un complément méthodologique : comment rendre compte de la chronologie	330
<i>Découpage " pédagogique " des séquences observées</i>	330
<i>Découpage chronologique des séquences observées</i>	332
<i>Codage des activités pour représenter graphiquement la chronologie</i>	332
<i>Deux moyens graphiques pour aider l'analyse</i>	333
Résultats et analyse de la chronologie des séquences	335
<i>Présentation des graphiques chronologiques des cinq séquences</i>	335
<i>Les phases des séquences montrent des organisations chronologiques diverses</i>	337
<i>Une analyse quantitative confirme cette diversité des séquences</i>	339
Les activités effectives des élèves différencient les pratiques	341
Des résultats sur l'utilisation du manuel par les professeurs	341
Diversité des enseignements, cohérence avec le scénario prévu	342

CHAPITRE 7 LES ADAPTATIONS DU PROFESSEUR, DES ÉCHANGES AVEC LES ÉLÈVES	345
1. Complément méthodologique : incidents et adaptations	348
Définition de la notion d'incident	349
<i>Exemple d'incident et des gestions possibles</i>	349
<i>Définition des incidents et précision sur l'étude proposée</i>	350
Typologie des incidents relevés	351
<i>Les erreurs commises</i>	351
<i>Les questions posées ou les propositions émises</i>	351
<i>Les réponses incomplètes</i>	352
<i>Les élèves interrogés qui restent silencieux</i>	352
<i>Ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur portée</i>	352
<i>Les élèves sont en désaccord mais personne n'a tort</i>	353
La place des incidents dans le scénario de la séquence	353
<i>L'incident porte sur un fait non compris dans le champ mathématique de la séquence</i>	353
<i>L'incident porte sur un fait mathématique compris dans le champ mathématique mais ne concerne pas la stratégie du professeur</i>	353
<i>L'incident porte sur un fait mathématique compris dans le champ mathématique et s'inscrit dans la stratégie du professeur</i>	354
Les modes de gestion des incidents	354
<i>Le professeur ignore la réaction d'un élève ou de la classe</i>	355
<i>Le professeur répond à la place de l'élève</i>	355
<i>Le professeur récupère et enrichit une question ou une réponse</i>	356
<i>Le professeur change d'intervenant en sollicitant un autre élève</i>	356
<i>Le professeur guide l'élève</i>	357
<i>Le professeur facilite l'exécution de la tâche</i>	357
<i>Le professeur demande un approfondissement</i>	358
<i>Le professeur reprend, de façon neutre, l'expression d'un élève</i>	358
Quelques remarques <i>a priori</i> sur les adaptations des professeurs	359
2. L'adaptation : une pratique professionnelle au service de l'apprentissage ?	359
Quelle possibilité les professeurs laissent-ils à l'émergence d'incidents ?	360
La nature des incidents, quelle répartition suivant les professeurs ?	362
La gestion des incidents, tendances générales	364
<i>Gestion des incidents : les tendances des professeurs</i>	365
<i>Comment les professeurs " relancent-ils " l'activité de la classe ?</i>	366
Les modes de gestion suivant les incidents : recherche de compensations	369
<i>La recherche de compensations locales, un problème méthodologique</i>	369
<i>La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Theano</i>	370
<i>La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Agnesi</i>	371

<i>La gestion des incidents en fonction de leur nature par Monsieur Bombelli</i>	372
<i>La gestion des incidents en fonction de leur nature par Madame Germain</i>	373
<i>La gestion des incidents en fonction de leur nature, bilan</i>	374
3. Influence du scénario prévu sur les adaptations	375
Quelle émergence des incidents en fonction du scénario prévu ?	375
<i>Répartition des incidents suivant leur place par rapport au scénario</i>	376
<i>Répartition des incidents suivant les catégories d'activité des élèves</i>	376
La nature et la gestion des incidents en fonction des activités des élèves	379
<i>Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Mme Theano</i>	379
<i>Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Madame Agnesi</i>	380
<i>Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez M. Bombelli</i>	382
<i>Nature et gestion des incidents en fonction des activités chez Mme Germain</i>	384
<i>Nature et gestion des incidents en fonction des activités des élèves, bilan</i>	385
Conclusion : les points fondamentaux du scénario influencent les adaptations	385
4. Influence du temps sur la gestion des incidents	386
Chronologie de la gestion des incidents par Madame Theano	387
Chronologie de la gestion des incidents par Madame Agnesi	387
Chronologie de la gestion des incidents par Monsieur Bombelli	389
Chronologie de la gestion des incidents par Madame Germain	389
Bilan de la contrainte temporelle sur le mode de gestion des incidents	390
Les adaptations, une pratique peu contrainte	391
CONCLUSION	393
Globalement, une grande régularité émerge des pratiques enseignantes	395
<i>Les nombres décimaux et leurs écritures</i>	395
<i>La multiplication : technique opératoire et situations multiplicatives</i>	396
<i>Les stratégies d'enseignement de la multiplication des décimaux</i>	397
Des contraintes globales expliquent les choix communs des professeurs	398
<i>Le respect des programmes assure une certaine légitimité</i>	398
<i>Des principes pour définir le champ mathématique d'une séquence</i>	399
<i>Des principes pour élaborer une stratégie d'enseignement</i>	399
Mais localement, chaque pratique est individuelle	400
<i>Des itinéraires différents pour construire les nouveaux savoirs</i>	400
<i>Les activités effectives des élèves de la classe varient suivant les professeurs</i>	400
<i>Des gestions qui s'opposent par les adaptations du professeur en classe</i>	401
<i>Des pratiques personnelles où émergent des cohérences</i>	402
Des pratiques pour lesquelles on observe aussi des compensations	402
<i>Des compensations au sein des pratiques, en amont de l'activité en classe</i>	403
<i>Des compensations pour animer le scénario prévu et pour gérer la classe</i>	403

Une interrogation sur la problématique	404
Quelques pistes pour la recherche et pour la formation des enseignants	405
<i>Une piste de recherche pour prolonger certains résultats</i>	405
<i>Des pistes pour de nouvelles recherches en didactique des mathématiques</i>	405
<i>Des pistes pour la formation des enseignants</i>	406
Retour à la question initiale des pratiques ordinaires	407
BIBLIOGRAPHIE	409
TABLE DES MATIÈRES	417
ANNEXES	429



ANNEXES

Sommaire des annexes

<i>A. Ordre de grandeur et multiplication des nombres décimaux</i>	431
<i>B. Codages des déroulements des séquences observées</i>	451
<i>C. Narrations des séquences observées</i>	471

- A -

ORDRE DE GRANDEUR ET MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX

Introduction

Nous avons observé des séquences d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux conduites par des professeurs en classe de sixième. Trois enseignants sur quatre ont utilisé les ordres de grandeur pour déterminer un produit parmi plusieurs nombres proposés ou pour contrôler la place de la virgule après l'utilisation de la technique opératoire. Cette utilisation s'explique par la demande de l'institution : les professeurs doivent apprendre aux élèves à contrôler les résultats obtenus par le calcul écrit ou affichés par la calculatrice.

Cette utilisation figure également dans le manuel utilisé par les professeurs mais sa justification théorique est absente. Nous cherchons ici à établir une méthode qui permette d'utiliser les ordres de grandeur pour contrôler la position de la virgule du produit de deux nombres décimaux positifs.

Nous commençons par un exemple traité de manière empirique qui illustre le problème, nous proposons alors quelques précisions qui permettent d'appuyer la question posée sur des fondements théoriques, puis nous développons une argumentation visant à légitimer l'utilisation des ordres de grandeur pour multiplier deux décimaux.

Une utilisation empirique des ordres de grandeur

- ♦ Considérons le produit $482,4 \times 62,15$ c'est-à-dire xy où $x = 482,4$ et $y = 62,15$.
- ♦ Lorsqu'on effectue "à la main" le calcul du produit xy on associe respectivement, aux facteurs décimaux x et y , les deux facteurs entiers X et Y obtenus en supprimant la virgule à x et à y : $X = 4\,824$ et $Y = 6\,215$.
Le produit XY des facteurs entiers associés est $XY = 29\,981\,160$.
Le produit xy s'obtient alors en plaçant une virgule au nombre XY , autrement dit $xy \in \{XY \times 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$. Il reste à déterminer la position de cette virgule.

♦ Convenons, pour le moment, que :

l'ordre de grandeur de 482,4 est 500 c'est-à-dire $x' = 500$;

l'ordre de grandeur de 62,15 est 60 c'est-à-dire $y' = 60$;

nous obtenons une estimation $x'y'$ du produit xy où $x'y' = 500 \times 60 = 30\,000$.

Cette estimation nous permet d'affirmer que le produit xy est égal à 29 981,16.

La question posée ici est celle de la légitimité de la démarche utilisée. L'étude que nous avons menée pour établir cette démarche montre qu'elle n'est pas toujours valable, aussi nous proposons une étude plus générale que celle qu'on pourrait attendre à la suite de cet exemple. D'une part nous ne définissons pas *a priori* ce qu'est un ordre de grandeur, et d'autre part nous nous interrogeons sur la détermination du produit à partir de l'estimation obtenue.

Comment fonder cette utilisation des ordres de grandeur ?

De quelle précision sur x et sur y a-t-on besoin pour obtenir une estimation $x'y'$ suffisante du produit xy ? autrement dit, quelle erreur relative maximum peut-on tolérer en remplaçant x par x' et y par y' pour que l'estimation $x'y'$ soit suffisante ? Et comment comparer l'estimation $x'y'$ aux nombres obtenus à partir du produit entier XY pour déterminer le produit xy cherché ? c'est-à-dire pour que le nombre xy soit bien le plus proche de l'estimation $x'y'$ parmi les décimaux de l'ensemble E des " candidats possibles " : $E = \{XY \times 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$.

Ces deux questions sont liées, elles déterminent le problème posé. Précisons-les successivement.

Quel ordre de grandeur des facteurs faut-il pour obtenir le produit ?

La notion d'ordre de grandeur est souvent utilisée dans les programmes du collège pour évoquer le calcul approché qui permet de contrôler les résultats affichés par la calculatrice. Mais cette notion n'y est pas définie. Nous n'en avons pas non plus trouvé de définition dans les manuels ou les dictionnaires pour l'enseignement secondaire ni même dans les ouvrages destinés à l'enseignement supérieur¹. Nous expliquons cette absence par le fait qu'un ordre de grandeur nous semble être une approximation dont la précision dépend de l'objectif qui conduit à son utilisation. Ici, notre objectif est de déterminer xy sachant XY et $x'y'$.

Ainsi, nous pouvons préciser notre problème :

ayant noté : $\Delta x = |x - x'|$ et $\Delta y = |y - y'|$,

¹ Cette notion était cependant enseignée avant que la calculatrice ne remplace la règle à calcul. C'est la justification de la méthode utilisée que nous n'avons pas trouvée. Citons, par exemple, le manuel de Terminale CDE rédigé par Marc GOURION, édité en 1971 par les éditions Fernand Nathan dans la collection Queysanne & Revuz (tome 2 p. 267) : " On notera que la règle à calcul permet seulement de trouver les chiffres significatifs du produit. L'ordre de grandeur du résultat n'est pas obtenu par la lecture sur la règle mais par calcul approché direct, on remplace les nombres donnés par des nombres plus simples pour pouvoir situer le nombre cherché entre deux puissances successives de 10 ".

nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que : la condition $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$ implique que xy est, parmi les éléments de $E = \{XY \times 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$, le plus proche de $x'y'$.

Il reste encore à définir ce que nous entendons par “ le plus proche ”.

Deux critères pour déterminer le produit à partir de son estimation

Pour définir l'expression “ le plus proche ”, il nous faut préciser comment comparer l'estimation $x'y'$ aux nombres de l'ensemble $E = \{XY \times 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$. Nous envisageons deux méthodes suivant que l'on compare les nombres en calculant leur différence ou en calculant leur quotient. Examinons ces deux cas.

Si on calcule la différence de deux nombres pour les comparer

Dans l'exemple précédent, sachant que l'estimation $x'y'$ est 30 000, si la méthode de comparaison des nombres repose sur le calcul de leur différence, nous dirons que le produit cherché xy est 29 981,160 parce que c'est le nombre qui minimise $|n - 30\,000|$ lorsque n décrit l'ensemble E des nombres obtenus en plaçant une virgule au produit entier $XY = 29\,981\,160$.

Remarquons que $|xy - x'y'| = \Delta xy$ est l'erreur absolue commise sur xy en l'estimant par $x'y'$.

En définitive nous cherchons, avec cette première méthode, une précision suffisante sur x et sur y pour que : $\Delta xy = \min_{p \in \mathbb{Z}} \{ |XY \times 10^p - x'y'| \}$ et que ce minimum soit atteint pour une valeur unique de p .

Si on calcule le quotient de deux nombres pour les comparer

Dans l'exemple précédent, sachant que l'estimation $x'y'$ est 30 000, si la méthode de comparaison des nombres repose sur le calcul de leur quotient, nous dirons que le produit cherché xy est 29 981,160 parce que c'est le nombre pour lequel le quotient $\frac{30\,000}{n}$ est le plus proche de 1 lorsque n décrit l'ensemble E des nombres obtenus en plaçant une virgule au produit entier $XY = 29\,981\,160$. Autrement dit, nous cherchons le nombre de l'ensemble E qui minimise l'expression $\left| \frac{x'y'}{n} - 1 \right|$.

Remarquons que $\left| \frac{x'y'}{xy} - 1 \right| = \left| \frac{x'y' - xy}{xy} \right| = \frac{|x'y' - xy|}{xy} = \frac{\Delta xy}{xy}$ qui est l'erreur relative commise sur xy en l'estimant par $x'y'$.

En définitive nous cherchons, avec cette seconde méthode, une précision suffisante sur x' et sur y' pour que : $\frac{\Delta xy}{xy} = \min_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \left| \frac{x'y'}{XY \times 10^p} - 1 \right| \right\}$ et que ce minimum soit atteint pour une valeur unique de p .

Les deux méthodes sont à examiner

Les deux méthodes consistent donc à identifier le produit xy parmi les nombres n de l'ensemble E en choisissant celui qui optimise (minimise) soit l'erreur absolue, soit l'erreur relative, commise sur n en l'estimant par $x'y'$. Ces deux méthodes semblent *a priori* pertinentes. Pour chacune d'elles, définissons les conditions à déterminer pour la valider, déterminons ces conditions et indiquons la démarche à utiliser dans la pratique.

Définition du problème posé

Commençons par une remarque concernant l'ensemble E des nombres décimaux qui s'écrivent en plaçant une virgule au nombre entier XY , produit des deux entiers X et Y obtenus en supprimant la virgule aux deux nombres décimaux x et y .

Une autre écriture de l'ensemble E

Nous avons déjà écrit que $E = \{XY \times 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$.

Sachant que le produit xy appartient à cet ensemble,

$\exists q \in \mathbb{Z}$ tel que : $xy = XY \times 10^q$ c'est-à-dire tel que : $XY = xy \times 10^{-q}$.

Nous obtenons alors, pour tout nombre décimal d :

$$\begin{aligned} d \in E &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d = XY \times 10^r \\ &\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d = xy \times 10^{-q} \times 10^r \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d = xy \times 10^p \quad (\text{car } r-q \text{ décrit } \mathbb{Z} \text{ lorsque } r \text{ décrit } \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow d \in \{ xy \times 10^p, p \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

Finalement $E = \{ xy \times 10^p, p \in \mathbb{Z} \}$.

Remarquons que xy est l'élément de E pour lequel $p = 0$.

Nous sommes en mesure maintenant de poser précisément notre problème.

Formulation du problème général

Soit $x \in \mathbb{D}$, $x > 0$ et x' une approximation de x , notons $\Delta x = |x - x'|$.

Soit $y \in \mathbb{D}$, $y > 0$ et y' une approximation de y , notons $\Delta y = |y - y'|$.

Nous cherchons à évaluer la précision nécessaire sur x' et sur y' pour s'assurer que xy est plus proche de $x'y'$ que tous les autres éléments de E .

♦ Pour la méthode d'optimisation de l'erreur absolue nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que :

la double condition $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$ implique la propriété (P₁)

$$\text{où } (P_1) : \forall p \in \mathbb{Z} \quad p \neq 0 \Rightarrow \Delta xy < |xy \times 10^p - x'y'|$$

♦ Pour la méthode d'optimisation de l'erreur relative nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que :

la double condition $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$ implique la propriété (P_2)

$$\text{où } (P_2) : \forall p \in \mathbb{Z} \quad p \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1 \right|$$

Etudions maintenant successivement chacune des deux méthodes.

Etude de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Nous allons déterminer un majorant $M > 0$ tel que :

si $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$, alors la propriété (P_1) est satisfaite.

Dans la suite nous appelons l'hypothèse (H) la condition : $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$.

Nous commençons par écrire une propriété (P'_1) moins forte que (P_1) telle que :

$$(H) \Rightarrow (P'_1) \quad \Leftrightarrow \quad (H) \Rightarrow (P_1)$$

Restriction de la propriété (P_1)

Notons (P'_1) le système formé par ces deux propriétés :

$$(1) \quad |xy - x'y'| < |10 xy - x'y'|$$

$$(2) \quad |xy - x'y'| < |0,1 xy - x'y'|$$

(P'_1) correspond à $p = \pm 1$ dans (P_1) donc : $(H) \Rightarrow (P_1)$ implique $(H) \Rightarrow (P'_1)$.

Réciproquement, montrons qu'un majorant M qui convient pour satisfaire (P'_1) convient aussi pour satisfaire (P_1) .

Un encadrement de $x'y'$

Imposons $M \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Comme} \quad \frac{\Delta x}{x} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} < x' < \frac{3x}{2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\Delta y}{y} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} < y' < \frac{3y}{2}$$

on obtient, sous l'hypothèse (H), l'encadrement suivant :

$$\frac{xy}{4} < x'y' < \frac{9xy}{4}$$

et donc l'encadrement :

$$0,1 xy < x'y' < 10 xy.$$

Cet encadrement permet de supprimer les valeurs absolues dans les membres de droite des deux propriétés (1) et (2) :

$$(1') \quad |xy - x'y'| < 10xy - x'y'$$

et $(2') \quad |xy - x'y'| < x'y' - 0,1xy$

La condition (P₁) suffit à réaliser la propriété (P₁)

Montrons que si (H) implique (P₁) alors, avec $M \leq \frac{1}{2}$, (H) implique aussi (P₁).

Si $p > 1$ alors $(10^p - 10)xy > 0$
 donc $10xy - x'y' < 10xy - x'y' + (10^p - 10)xy$
 et donc $10xy - x'y' < xy \times 10^p - x'y'$

Si $p < -1$ alors $(10^p - 0,1)xy < 0$
 donc $x'y' - 0,1xy < x'y' - 0,1xy - (10^p - 0,1)xy$
 et donc $x'y' - 0,1xy < x'y' - 10^p xy$

Par conséquent, si l'hypothèse (H) est réalisée avec $M \leq \frac{1}{2}$ on a :

$$|xy - x'y'| < 10xy - x'y' \Rightarrow \forall p \geq 1, |xy - x'y'| < xy \times 10^p - x'y'$$

$$\text{et } |xy - x'y'| < x'y' - 0,1xy \Rightarrow \forall p \leq -1, |xy - x'y'| < x'y' - xy \times 10^p$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Une approximation des facteurs pour approcher suffisamment le produit

Nous supposons l'hypothèse (H) réalisée avec $M \leq \frac{1}{2}$ et nous cherchons pour quelles valeurs de M cette hypothèse entraîne (P₁) c'est-à-dire :

$$(1') \quad |xy - x'y'| < 10xy - x'y'$$

et $(2') \quad |xy - x'y'| < x'y' - 0,1xy$

Les valeurs absolues du premier membre de chaque inégalité (1') et (2') conduisent à envisager deux cas : celui où $x'y'$ est une approximation par défaut de xy et celui où $x'y'$ en est une approximation par excès.

Afin de supprimer les valeurs absolues contenues dans Δx et Δy nous distinguerons aussi les quatre cas possibles de la position relative de x et x' et de y et y' :

$$x' < x \text{ et } y' < y; \quad x' < x \text{ et } y' > y; \quad x' > x \text{ et } y' < y \text{ et } x' > x \text{ et } y' > y.$$

Compte tenu du rôle symétrique de x et y , nous ne distinguerons cependant pas le deuxième cas du troisième.

Si le produit estimé est une approximation par défaut du produit exact

Dans ce premier cas, nous pouvons rejeter l'hypothèse où $x' > x$ et $y' > y$.

En outre, nous avons $0,1xy < x'y' < xy < 10xy$ donc la condition (1') est assurée.

Nous recherchons donc $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow xy - x'y' < x'y' - 0,1 xy$.

$$\begin{aligned} \text{Or } xy - x'y' < x'y' - 0,1 xy &\Leftrightarrow 1,1 xy < 2 x'y' \\ &\Leftrightarrow xy < \frac{20}{11} x'y' \end{aligned}$$

♦ Cas où $x' < x$ et $y' < y$

$$\frac{\Delta x}{x} < M \text{ s'écrit : } x - x' < Mx \text{ c'est-à-dire, puisque } M < 1 : x < \frac{1}{1-M} x'.$$

$$\text{De même } \frac{\Delta y}{y} < M \text{ s'écrit : } y < \frac{1}{1-M} y'.$$

$$\text{Ainsi, l'hypothèse (H) implique : } xy < \frac{1}{(1-M)^2} x'y'.$$

$$\text{Puisque } M \leq \frac{1}{2}, \text{ pour satisfaire (2), il suffit de choisir } M \text{ tel que : } \frac{1}{(1-M)^2} \leq \frac{20}{11}.$$

$$\text{Or } M \in]0 ; 1[\text{ et } \frac{1}{(1-M)^2} \leq \frac{20}{11} \text{ conduisent à : } 0 < M \leq 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}.$$

$$\text{Ainsi } M = \inf \left\{ \frac{1}{2}; 1 - \sqrt{\frac{11}{20}} \right\} \text{ est, dans ce cas, une valeur satisfaisante,}$$

$$\text{comme } 1 - \sqrt{\frac{11}{20}} \approx 0,25838 \text{ nous en déduisons } M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}.$$

♦ Cas où $x' < x$ et $y' > y$

$$\frac{\Delta x}{x} < M \text{ s'écrit toujours : } x < \frac{1}{1-M} x'.$$

$$\text{La condition } \frac{\Delta y}{y} < M \text{ n'apporte, en revanche, pas d'autre majoration que } y < y'.$$

$$\text{Ainsi, l'hypothèse (H) implique : } xy < \frac{1}{1-M} x'y'.$$

$$\text{Il suffit donc, pour satisfaire (2), de choisir } M \leq \frac{1}{2} \text{ tel que : } \frac{1}{1-M} \leq \frac{20}{11}.$$

$$\text{Or } M \in]0 ; 1[\text{ et } \frac{1}{1-M} \leq \frac{20}{11} \text{ conduisent à : } 0 < M \leq \frac{9}{20}.$$

$$\text{Comme } 1 - \sqrt{\frac{11}{20}} < \frac{9}{20} < \frac{1}{2}, \text{ nous retiendrons encore : } M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}.$$

Si le produit estimé est une approximation par excès du produit exact

Sous cette condition, nous pouvons rejeter le cas où $x' < x$ et $y' < y$.

En outre, nous avons $0,1xy < xy < x'y' < 10xy$ donc la condition (2') est assurée.

$$\text{Nous recherchons donc } M \leq \frac{1}{2} \text{ tel que : (H) } \Rightarrow x'y' - xy < 10 xy - x'y'$$

$$\begin{aligned} \text{Or } x'y' - xy &< 10xy - x'y' && \Leftrightarrow && 11xy > 2x'y' \\ &&& \Leftrightarrow && xy > \frac{2}{11}x'y' \end{aligned}$$

♦ Cas où $x' > x$ et $y' > y$

$$\frac{\Delta x}{x} < M \text{ s'écrit : } x' - x < Mx$$

$$\text{c'est-à-dire : } x > \frac{1}{1+M}x'$$

$$\text{De même, } \frac{\Delta y}{y} < M \text{ s'écrit : } y < \frac{1}{1+M}y'$$

$$\text{Ainsi, l'hypothèse (H) implique : } xy > \frac{1}{(1+M)^2}x'y'$$

$$\text{Il suffit donc, pour satisfaire (1), de choisir } M \leq \frac{1}{2} \text{ tel que : } \frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{2}{11}$$

$$\text{Or } M > 0 \text{ et } \frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{2}{11} \text{ conduisent à : } 0 < M \leq \sqrt{\frac{11}{2}} - 1$$

$$\text{et comme } \sqrt{\frac{11}{2}} - 1 \approx 1,35, \text{ nous retiendrons encore : } M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$$

♦ Cas où $x' > x$ et $y' < y$

$$\frac{\Delta x}{x} < M \text{ s'écrit encore : } x > \frac{1}{1+M}x'$$

$$\text{La condition } \frac{\Delta y}{y} < M \text{ n'apporte, en revanche, pas d'autre minoration que } y > y'$$

$$\text{Ainsi, l'hypothèse (H) implique : } xy > \frac{1}{1+M}x'y'$$

$$\text{Il suffit donc de choisir } M \text{ tel que } \frac{1}{1+M} \geq \frac{2}{11} \text{ pour satisfaire (1).}$$

$$\text{Or } M > 0 \text{ et } \frac{1}{1+M} \geq \frac{2}{11} \text{ conduisent à : } 0 < M \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{et comme } \frac{9}{2} > 1 - \sqrt{\frac{11}{20}} \text{ nous retiendrons encore } M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$$

Conclusion de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

$$\text{L'étude menée ci-dessus conduit à choisir } M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$$

Si l'erreur relative sur x et sur y est strictement inférieure à M , alors le produit estimé $x'y'$ est plus proche du produit xy que de tous les autres nombres obtenus en plaçant une virgule au produit XY des entiers X et Y associés à x et à y .

Pour placer la virgule au produit XY de manière à obtenir xy , il suffira donc de choisir le nombre décimal le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Examinons maintenant comment, dans la pratique, choisir un ordre de grandeur suffisant pour que l'erreur relative portant sur x et sur y soit inférieure à

$$1 - \sqrt{\frac{11}{20}}.$$

Des contraintes pratiques en classe de sixième

Dans une classe de sixième, la capacité en calcul mental des élèves impose de se limiter à la table de multiplication de 1 à 9 et à quelques règles simples de calcul mental comme la multiplication par 11, par 1,5 ou par 2,5.

Une précision de deux chiffres est suffisante mais inadaptée dans la pratique

Soit $x \in \mathbb{D}$, $x > 0$. Notons son écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $a \in [1 ; 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Choisissons, comme ordre de grandeur de x , le nombre x' défini par :

$$x' = a' \times 10^n \text{ où } a' \text{ est la valeur arrondie au dixième de } a.$$

L'erreur $\frac{\Delta x}{x} = \frac{|a - a'|}{a}$ est maximale dans le cas "limite" où $a = 1,05$ et $a' = 1,1$

donc inférieure à $\frac{0,05}{1,05} \approx 0,048$, valeur qui est "très" inférieure à $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$

Mais ce choix n'est pas accessible aux élèves de sixième qui ne peuvent pas, mentalement, effectuer le produit de deux nombres à deux chiffres.

Une précision d'un chiffre est "presque" suffisante

Choisissons alors, comme ordre de grandeur de x , le nombre x' défini par :

$$x' = a' \times 10^n \text{ où } a' \text{ est la valeur arrondie à l'unité de } a.$$

L'erreur $\frac{\Delta x}{x} = \frac{|a - a'|}{a}$ est maximale dans le "cas limite" où $a = 1,5$ et $a' = 2$

donc inférieure à $\frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$ valeur qui n'est pas inférieure à M ...

Cette précision n'est donc pas suffisante, procédons cependant à deux remarques.

- ♦ La valeur de $1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$ a été trouvée seulement dans le cas où les deux ordres de grandeur sont des approximations par défaut des deux facteurs. Dans tous les autres cas, la valeur de M égale à $\frac{1}{3}$ est suffisante.

La majoration par $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$ était nécessaire pour s'assurer que :

$$|xy - x'y'| < x'y' - 0,1 xy.$$

Cette inégalité permet de rejeter la valeur $0,1xy$. Un autre argument le permet aussi : nous savons que la condition $M = \frac{1}{2}$ suffit pour assurer que : $0,1xy < x'y'$, $x'y'$ étant une approximation par défaut de xy , il ne saurait être question de choisir une valeur inférieure à $x'y'$.

♦ Remarquons aussi que la majoration de $\frac{\Delta x}{x}$ ainsi obtenue est insuffisante seulement dans le cas des valeurs de x pour lesquelles $a \in]1 ; 1,5[$.

En effet, dès que a est supérieur à 2, l'erreur relative $\frac{\Delta x}{x} = \frac{|a - a'|}{a}$ est inférieure à 0,25 donc elle est inférieure à M .

Ces valeurs de a sont donc de la forme $a = 1 + \alpha$ avec $\alpha \in]0 ; 0,5[$ et où α est une solution de l'inéquation $\frac{\alpha}{1 + \alpha} > M$.

Cette inéquation définie sur $]0 ; 0,5[$ a pour solution $\left] \frac{M}{1 - M} ; \frac{1}{2} \right[$.

Les valeurs de a correspondantes appartiennent donc à l'intervalle :

$$]A ; 1,5[\text{ où } A = 1 + \frac{M}{1 - M}. \text{ Indiquons que } A \approx 1,348.$$

Finalement, la méthode d'optimisation de l'erreur absolue est directement applicable en recourant seulement aux ordres de grandeur sauf pour toutes les valeurs de x ou de y qui conduisent à $a \in]A ; 1,5[$ où $A \approx 1,348$.

Un exemple où la précision d'un chiffre significatif n'est pas suffisante

Considérons les deux décimaux $x = 1,45$ et $y = 147,2$;
les facteurs entiers associés sont $X = 145$ et $Y = 1\,472$ donc $XY = 213\,440$;
les ordres de grandeur des facteurs sont $x' = 1$ et $y' = 100$ donc $x'y' = 100$.

La valeur la plus proche de 100, obtenue en plaçant une virgule à 213 440, est 21,344 et non 213,44. Pourtant c'est bien 213,44 qui est la valeur du produit xy et non 21,344 qui est la valeur de $0,1xy$.

Remarquons de nouveau qu'un raisonnement élémentaire permet de rejeter la valeur 21,344 au profit de 213,44 : l'estimation du produit xy par 100 est une approximation par défaut, il n'est donc pas possible d'avoir $xy = 21,344$.

Faut-il pour autant invalider totalement la méthode ? Non si l'on accepte de la modifier légèrement ².

² Remarquons, avant de poursuivre, que les ordres de grandeur ainsi déterminés n'illustrent pas une méthode judicieuse. Il semblerait beaucoup plus efficace de compenser une approximation pas défaut par une approximation par excès. Ainsi, ayant choisi $x' = 1$, il conviendrait de prendre $y' = 200$. Si nous ne retenons pas cette possibilité, c'est parce qu'il nous semble difficile de proposer à des élèves de sixième une définition de l'ordre de grandeur qui dépend du contexte : avec $x = 1,65$ on choisirait, $x' = 2$ et pour la même valeur de $y = 147,2$, on prendrait alors $y' = 100$.

Deux adaptations possibles

Afin de modifier la méthode, on peut :

- soit conserver l'ordre de grandeur avec un chiffre significatif et affiner les décisions pour exclure $0,1xy$ dans le cas où x' et y' sont des approximations par défaut de x et de y ;
- soit modifier le choix de l'ordre de grandeur pour les valeurs de x ou de y qui conduisent à $a \in]A ; 1,5[$ où $A \approx 1,348$.

Première adaptation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Il suffit, après avoir estimé le produit xy par le produit $x'y'$ de se poser la question supplémentaire : “ les approximations x' et y' sont-elles toutes les deux des approximations par défaut des facteurs x et y ? ” et de tenir compte de la réponse pour exclure $0,1xy$ dans le cas où la réponse est affirmative.

Méthode pour multiplier deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur

- ♦ Soit x quelconque, $x \in \mathbb{D}$, $x > 0$. Supposons que l'écriture scientifique de x soit $a \times 10^n$ avec $a \in [1 ; 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous choisissons, comme ordre de grandeur de x , le nombre x' défini par : $x' = a' \times 10^n$ où a' est la valeur arrondie à l'unité de a .
- ♦ Soit à multiplier deux facteurs décimaux positifs x et y ;
 - on commence par associer deux facteurs entiers X et Y aux facteurs décimaux x et y en supprimant leur virgule ;
 - on calcule le produit XY des deux facteurs entiers ;
 - on détermine les ordres de grandeur x' et y' des facteurs x et y . Puis on estime le produit xy par le produit $x'y'$ que l'on calcule mentalement ;
 - parmi les nombres qu'on peut écrire en plaçant une virgule au nombre XY , on choisit celui qui répond aux deux conditions suivantes :
 - 1°) le nombre obtenu est supérieur au produit estimé $x'y'$ si les deux ordres de grandeur x' et y' sont deux approximations par défaut des facteurs x et y ;
 - 2°) le nombre obtenu est le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Premier exemple

Soit à multiplier 612,54 et 68,25.

$$\begin{array}{rcl}
 & 612,54 & \rightarrow \\
 \times & 68,25 & \rightarrow \\
 \hline
 & 418058550 & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & 600 & \\
 \times & 70 & \\
 \hline
 & 42000 &
 \end{array}$$

Les deux ordres de grandeur ne sont pas deux approximations par défaut, on choisit donc le nombre le plus proche de 42 000 en plaçant une virgule au nombre entier 418 058 550.

Conclusion : $612,54 \times 68,25 = 41\,805,855$.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

$$\begin{array}{r} 148,17 \\ \times 24,9 \\ \hline 3689433 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 100 \\ \times 20 \\ \hline 2000 \end{array}$$

Les deux ordres de grandeur sont des approximations par défaut, on choisit donc le nombre le plus proche de 2 000, **et supérieur à 2 000**, en plaçant une virgule au nombre entier 3 389 433.

Conclusion : $148,17 \text{ et } 24,9 = 3\,689,433$.

Remarque : Sans la restriction "supérieur à 2 000", on aurait pu proposer 368,9433 qui est plus proche de 2 000 que 3 689,433 ne l'est.

En effet : $2\,000 - 368,9433 = 1\,631,0567$ et $3\,689,433 - 2\,000 = 1\,689,433$.

Seconde adaptation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Une seconde possibilité est de choisir, pour chaque facteur, un ordre de grandeur plus précis que précédemment pour les valeurs de x ou de y qui conduisent à $a \in]1 ; 1,5[$.

L'ordre de grandeur possède un chiffre significatif ou bien deux

- ♦ Soit x un décimal positif, $x = a \times 10^n$ avec $a \in [1 ; 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$:
nous choisissons, comme ordre de grandeur de x , le nombre $x' = a' \times 10^n$ où
 - si $a \in [2 ; 10[$ alors a' est la valeur arrondie à l'unité de a ;
 - si $a \in [1 ; 2[$ alors a' est la valeur la plus proche de a parmi : 1, 1,5 et 2.

Ainsi l'erreur relative maximale ainsi commise est inférieure à 0,25 donc est inférieure à $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$ puisque $M \approx 0,258$.

Avec ce choix pour l'ordre de grandeur, on obtient la méthode suivante.

- ♦ Soit à multiplier deux facteurs décimaux positifs x et y ;
 - on commence par associer deux facteurs entiers X et Y aux facteurs décimaux x et y en supprimant leur virgule ;
 - on calcule le produit XY des deux facteurs entiers ;
 - on détermine les ordres de grandeur x' et y' des facteurs x et y . Puis on estime le produit xy par le produit $x'y'$ que l'on calcule mentalement ;
 - parmi les nombres qu'on peut écrire en plaçant une virgule au nombre XY , on choisit celui qui est le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Premier exemple

Soit à multiplier 612,54 et 68,25.

$$\begin{array}{r} 612,54 \\ \times 68,25 \\ \hline 418058550 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 600 \\ \times 70 \\ \hline 42000 \end{array}$$

On choisit le nombre le plus proche de 42 000 en plaçant une virgule au nombre entier 418 058 550.

Conclusion : $612,54 \times 68,25 = 41\,805,855$.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

$$\begin{array}{r} 148,17 \\ \times 24,9 \\ \hline 3689433 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 150 \\ \times 20 \\ \hline 3000 \end{array}$$

On choisit donc le nombre le plus proche de 3 000 en plaçant une virgule au nombre entier 3 689 433.

Conclusion : $148,17 \times 24,9 = 3\,689,433$.

Conclusion sur la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Il est donc possible d'utiliser, en toute rigueur, les ordres de grandeur pour contrôler la place de la virgule dans leur produit en utilisant la méthode d'optimisation de l'erreur absolue. Mais la méthode demande quelques précautions qui excluent une utilisation empirique.

Etude de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Rappelons que nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que :

$$\text{si } \frac{\Delta x}{x} < M \text{ et } \frac{\Delta y}{y} < M, \text{ alors } \forall p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1 \right|$$

Dans la suite nous appelons l'hypothèse (H) la condition : $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$

$$\text{nous notons } (P_2) \text{ la propriété : } \forall p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1 \right|$$

Comme précédemment, nous commençons par écrire une propriété (P'_2) moins forte que (P_2) telle que :

$$(H) \Rightarrow (P'_2) \quad \Leftrightarrow \quad (H) \Rightarrow (P_2)$$

Restriction de la propriété (P_2)

Notons (P'_2) le système formé par ces deux propriétés :

$$\begin{array}{ll} (1'') & \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{10 xy} - 1 \right| \\ (2'') & \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{0,1 xy} - 1 \right| \end{array}$$

(P'_2) correspond à $p = \pm 1$ dans (P_2) donc : $(H) \Rightarrow (P_2)$ implique $(H) \Rightarrow (P'_2)$.

Réciproquement, montrons qu'un majorant M qui convient pour satisfaire (P'_2) convient aussi satisfaire (P_2) .

Nous avons montré que si $M \leq \frac{1}{2}$ on obtient, sous l'hypothèse (H), l'encadrement :

$$0,1 xy < x'y' < 10 xy.$$

La première inégalité conduit à $\frac{x'y'}{0,1 xy} - 1 > 0$,

et la seconde inégalité conduit à $\frac{x'y'}{10 xy} - 1 < 0$.

La condition (P'_2) suffit à réaliser la propriété (P_2)

Montrons que si (H) implique (P'_2) alors, avec $M \leq \frac{1}{2}$, (H) implique aussi (P_2) .

$$\begin{aligned} \text{Si } n > 0 \quad & \text{alors} \quad \frac{1}{10^n} < 1 \\ & \text{donc} \quad \frac{x'y'}{10 xy} > \frac{x'y'}{10 xy \times 10^n} \\ & \text{et donc} \quad 1 - \frac{x'y'}{10 xy} < 1 - \frac{x'y'}{10 xy \times 10^n} \end{aligned}$$

$$\text{Autrement dit : } \forall p \in \mathbb{Z} \quad p > 1 \Rightarrow 1 - \frac{x'y'}{10 xy} < 1 - \frac{x'y'}{xy \times 10^p}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } n < 0 \quad & \text{alors} \quad \frac{1}{10^n} > 1 \\ & \text{donc} \quad \frac{x'y'}{0,1 xy} < \frac{x'y'}{0,1 xy \times 10^n} \\ & \text{et donc} \quad \frac{x'y'}{0,1 xy} - 1 < \frac{x'y'}{0,1 xy \times 10^n} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Autrement dit : } \forall p \in \mathbb{Z} \quad p < -1 \Rightarrow \frac{x'y'}{0,1 xy} - 1 < \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1$$

Par conséquent, si l'hypothèse (H) est réalisée avec $M \leq \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{10 xy} - 1 \right| & \Rightarrow \forall p > 1, \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1 \right| \\ \text{et } \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{0,1 xy} - 1 \right| & \Rightarrow \forall p < -1, \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy \times 10^p} - 1 \right| \end{aligned}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Une approximation des facteurs pour approcher suffisamment le produit

Nous supposons l'hypothèse (H) réalisée avec $M \leq \frac{1}{2}$ et nous cherchons pour quelles valeurs de M cette hypothèse entraîne (P'_2) c'est-à-dire :

$$(1'') \quad \frac{\Delta xy}{xy} < 1 - \frac{x'y'}{10xy}$$

$$\text{et} \quad (2'') \quad \frac{\Delta xy}{xy} < \frac{x'y'}{0,1xy} - 1$$

Les valeurs absolues contenues dans Δxy conduisent à envisager deux cas : celui où $x'y'$ est une approximation par défaut de xy et celui où $x'y'$ en est une approximation par excès.

Afin de supprimer les valeurs absolues contenues dans Δx et Δy nous distinguerons aussi les quatre cas possibles de la position relative de x et x' et de y et y' :

$$x' < x \text{ et } y' < y; \quad x' < x \text{ et } y' > y; \quad x' > x \text{ et } y' < y \text{ et } x' > x \text{ et } y' > y.$$

Compte tenu du rôle symétrique de x et y , comme nous l'avons déjà indiqué, nous ne distinguerons pas le deuxième cas du troisième.

Si le produit estimé est une approximation par défaut du produit exact

Dans ce premier cas, nous pouvons rejeter l'hypothèse où $x' > x$ et $y' > y$.

En outre, nous avons $0,1xy < x'y' < xy < 10xy$ donc la condition $(1'')$ est assurée.

Nous recherchons donc $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : $(H) \Rightarrow 1 - \frac{x'y'}{xy} < \frac{x'y'}{0,1xy} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad 1 - \frac{x'y'}{xy} < \frac{x'y'}{0,1xy} - 1 &\Leftrightarrow xy - x'y' < 10x'y' - xy \\ &\Leftrightarrow 2xy < 11x'y' \\ &\Leftrightarrow xy < \frac{11}{2}x'y' \end{aligned}$$

♦ Cas où $x' < x$ et $y' < y$

$$\frac{\Delta x}{x} < M \text{ s'écrit : } x < \frac{1}{1-M}x' \text{ et de même } \frac{\Delta y}{y} < M \text{ s'écrit : } y < \frac{1}{1-M}y'.$$

$$\text{Ainsi, l'hypothèse (H) implique : } xy < \frac{1}{(1-M)^2}x'y'.$$

Puisque $M \leq \frac{1}{2}$, pour satisfaire $(2'')$, il suffit de choisir M tel que :

$$\frac{1}{(1-M)^2} \leq \frac{11}{2}.$$

$$\text{Or } M \in]0; 1[\text{ et } \frac{1}{(1-M)^2} \leq \frac{11}{2} \text{ conduisent à : } 0 < M \leq 1 - \sqrt{\frac{2}{11}}$$

Ainsi $M = \inf \left\{ \frac{1}{2}; 1 - \sqrt{\frac{2}{11}} \right\}$ est, dans ce cas, une valeur satisfaisante,

comme $1 - \sqrt{\frac{2}{11}} \approx 0,573$ nous retiendrons simplement $M = \frac{1}{2}$.

♦ Cas où $x' < x$ et $y' > y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit toujours : $x < \frac{1}{1-M} x'$.

La condition $\frac{\Delta y}{y} < M$ n'apporte, en revanche, pas d'autre majoration que $y < y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy < \frac{1}{1-M} x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (2''), de choisir $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{1-M} \leq \frac{11}{2}$.

Or $M \in]0 ; 1[$ et $\frac{1}{1-M} \leq \frac{11}{2}$ conduisent à : $0 < M \leq \frac{9}{11}$.

Comme $\frac{9}{11} > \frac{1}{2}$, nous retiendrons encore : $M = \frac{1}{2}$.

Si le produit estimé est une approximation par excès du produit exact

Sous cette condition, nous pouvons rejeter le cas où $x' < x$ et $y' < y$.

En outre, nous avons $0,1xy < xy < x'y' < 10xy$ donc la condition (2'') est assurée.

Nous recherchons donc $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow \frac{x'y'}{xy} - 1 < 1 - \frac{x'y'}{10xy}$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{x'y'}{xy} - 1 < 1 - \frac{x'y'}{10xy} &\Leftrightarrow 10x'y' - 10xy < 10xy - x'y' \\ &\Leftrightarrow xy > \frac{11}{20} x'y' \end{aligned}$$

♦ Cas où $x' > x$ et $y' > y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit : $x > \frac{1}{1+M} x'$ et de même, $\frac{\Delta y}{y} < M$ s'écrit : $y < \frac{1}{1+M} y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{(1+M)^2} x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (1''), de choisir $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{11}{20}$.

Or $M > 0$ et $\frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{11}{20}$ conduisent à : $0 < M \leq \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$

et comme $\sqrt{\frac{20}{11}} - 1 \approx 0,3484$, nous retiendrons : $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

♦ Cas où $x' > x$ et $y' < y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit encore : $x > \frac{1}{1+M} x'$

La condition $\frac{\Delta y}{y} < M$ n'apporte, en revanche, pas d'autre minoration que $y > y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{1+M} x'y'$.

Il suffit donc de choisir M tel que $\frac{1}{1+M} \geq \frac{11}{20}$ pour satisfaire (1).

Or $M > 0$ et $\frac{1}{1+M} \geq \frac{11}{20}$ conduisent à : $0 < M \leq \frac{9}{11}$

et comme $\frac{9}{11} > \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$, nous retiendrons encore $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Conclusion de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

L'étude menée ci-dessus conduit à choisir $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Si l'erreur relative sur x et sur y est strictement inférieure à M , alors le produit estimé $x'y'$ est plus proche du produit xy que de tous les autres nombres obtenus en plaçant une virgule au produit XY des entiers X et Y associés à x et à y .

Pour placer la virgule au produit XY de manière à obtenir xy , il suffira donc de choisir le nombre décimal le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Examinons maintenant comment, dans la pratique, choisir un ordre de grandeur suffisant pour que l'erreur relative portant sur x et sur y soit inférieure à $\sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Une précision d'un chiffre est suffisante

Choisissons, comme ordre de grandeur de x , le nombre x' défini par :

$x' = a' \times 10^n$ où a' est la valeur arrondie à l'unité de a .

Nous avons montré dans l'étude précédente que ce choix d'ordre de grandeur conduit à une erreur relative $\frac{\Delta x}{x}$ inférieure à $\frac{1}{3}$.

Comme $M \approx 0,3484$, ce choix d'ordre de grandeur pour les facteurs x et y conduit nécessairement à : $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$.

Nous en concluons que la méthode d'optimisation de l'erreur relative est directement applicable.

Illustrons son utilisation sur les exemples qui nécessitaient un ajustement de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue.

Exemples d'utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Premier exemple

Considérons les deux décimaux $x = 1,45$ et $y = 147,2$;
 les facteurs entiers associés sont $X = 145$ et $Y = 1\,472$ donc $XY = 213\,440$;
 les ordres de grandeur des facteurs sont $x' = 1$ et $y' = 100$ donc $x'y' = 100$.

On choisit le nombre le plus proche de 100, obtenu en plaçant une virgule à 213 440.

$$\text{Mentalement, } \frac{100-21,344}{21,344} \approx \frac{80}{20} \text{ donc } \frac{100-21,344}{21,344} \approx 4$$

$$\text{et } \frac{213,44-100}{213,44} \approx \frac{100}{200} \text{ donc } \frac{213,44-100}{213,44} \approx \frac{1}{2}$$

Nous en concluons que $xy = 213,44$.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

$$\begin{array}{r} 1\,48,17 \\ \times 24,9 \\ \hline 3\,689\,433 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1\,00 \\ \times 20 \\ \hline 2\,000 \end{array}$$

On choisit le nombre le plus proche de 2 000, en plaçant une virgule au nombre entier 3 689 433.

$$\text{Mentalement, } \frac{2000-368,9433}{368,9433} \approx \frac{1600}{400} \text{ donc } \frac{2000-368,9433}{368,9433} \approx 4$$

$$\text{et } \frac{3689,433-2000}{3689,433} \approx \frac{1600}{4000} \text{ donc } \frac{3689,433-2000}{3689,433} \approx 0,4$$

Nous en concluons que $148,17 \times 24,9 = 3\,689,433$.

Conclusion

Nous avons donc montré que des méthodes différentes d'utilisation des ordres de grandeur sont utilisables de façon légitime pour contrôler la place de la virgule au produit de nombres décimaux positifs. Il reste qu'aucune de ces méthodes n'est simple d'utilisation. Toutes semblent plus difficiles à mettre en œuvre correctement que la technique opératoire usuelle...

Il semble que les concepteurs du programme de sixième, et plus généralement de l'enseignement primaire et secondaire, en intégrant l'utilisation de la calculatrice parmi les modes de calcul légitimes dans une salle de classe ont souhaité compenser la perte de moyens de contrôler le résultat obtenu en passant du calcul écrit au calcul électronique. Certains manuels de l'enseignement primaire indiquent d'ailleurs aux élèves que c'est cette possibilité de contrôle explique la domination du calcul écrit par rapport à l'utilisation d'abaques ou de bouliers. L'utilisation des ordres de grandeur était familière à ceux qui utilisaient la règle à calcul avant le récent développement de l'électronique, le retour de leur utilisation

n'est donc pas surprenant. L'âge des élèves qui utilisaient la règle à calcul était plus élevé que celui des élèves qui utilisent aujourd'hui une calculatrice, leur capacité de calcul mental et d'assimilation de notion comme l'erreur absolue ou l'erreur relative était aussi plus élevée.

Les développements que nous avons conduits montrent, d'une part qu'il n'est pas envisageable de justifier ces techniques de calcul approché aux élèves de collège, et d'autre part que leur utilisation empirique risque de conduire à des erreurs. Autrement dit, l'enseignement des techniques de calcul approché pose un problème de transposition didactique tel que des recherches spécifiques apparaissent nécessaires.

- B -

CODAGE DES SÉQUENCES (MANUEL ET PROFESSEURS OBSERVÉS)

1. Codage des activités effectives des séquences

Composition des tableaux de codage des activités effectives :

Chaque groupe d'épisodes défini par le même objectif d'enseignement du professeur est repéré par un numéro dans la narration, par exemple : dans la séquence de Madame Theano, l'objectif d'enseignement " Multiplier par 0,25 c'est diviser par 4 " est repéré par le numéro 35 car c'est le cinquième objectif de la troisième séance. Ce numéro, qui donne une indication chronologique, a été reporté dans la colonne " G.E. " des tableaux suivants. Comme la chronologie des activités réelles des élèves n'est pas nécessairement celle des épisodes qui se déroulent sous la direction du professeur, nous avons limité l'indication chronologique à celle des groupes d'épisodes. Deux numéros identiques pour plusieurs activités indiquent la possible simultanéité de ces activités.

A chaque groupe d'épisodes sont indiquées :

- pour le manuel : la référence de la tâche dans le manuel (numéro de la page, de l'exercice, de la question) dans la colonne " Tâches " , le type d'activité mathématique attendue dans la colonne " Activités " et le nombre répétition de cette activité pour accomplir la tâche dans la colonne " R " ;

- pour les séquences des professeurs : le type d'activité mathématique effective dans la colonne " Activité " et le nombre répétition de cette activité constatée pour accomplir la tâche prescrite dans la colonne " R " .

Activités attendues pour réaliser les tâches prescrites par le manuel

G.E.	Tâches	Activités	R
101	p57 exercice n° 1	REE_SM	1
102	p57 exercice n° 2 a)	REE_n×n	1
102	p57 exercice n° 2 b)	REE_d×n	1
103	p57 exercice n° 3	CMCR_DOG	2
201	p58 exercice n° 1 1)	REE_D	1
201	p58 exercice n° 1 1)	REE_SM	1
201	p58 exercice n° 1 2)	REE_SM	1
202	p58 exercice n° 2	CMCR_DOG	4
202	p58 exercice n° 2	QTQS_RV	1
202	p58 exercice n° 2	MAC	4
203	p58 exercice n° 3	CMCR_RV	6
301	p59 exercice n° 4 2)	MAC	3
301	p59 exercice n° 4 1)	QTQS_RV	1
301	p59 exercice n° 4 1)	ETO_P	1
301	p59 exercice n° 4 1)	ETO_OP	1
301	p59 exercice n° 4 2)	PC_Déci=	1
301	p59 exercice n° 4 2)	PC_0inter	2
301	p59 exercice n° 4 2)	PC_0inutile	1
301	p59 exercice n° 4 3)	PC_0inter	1
301	p59 exercice n° 4 3)	PC_0inutile	2
301	p59 exercice n° 4 3)	PC_0final	2
301	p59 exercice n° 4 3)	PC_Déci=	1
302	p59 exercice n° 5	ETO_FI	1
302	p59 exercice n° 5	CMCR_×0,0...1	12
401	p60 1)	ETO_FI	2
401	p60 1)	CMCR_DOG	1
401	p60 1)	ETO_OP	1
401	p60 1)	MAC	1
402	p60 2)	CMCR_×0,0...1	3
402	p60 2)	QTQS_×<1	1
402	p60 2)	ETO_FI	1
403	p61 1)	CMCR_(D,×)	4
403	p61 1)	ETO_FI	1
403	p61 1)	CMCR_×0,5	12
403	p61 1)	CMCR_×0,0...1	1
403	p61 1)	ETO_FI	1
404	p61 2)	REE_D	2
404	p61 2)	SM_AddIsom	3
501	p62 exercice n° 1	REE	8
501	p62 exercice n° 1	REE_n×n	4
501	p62 exercice n° 1	REE_d×n	4
502	p62 exercice n° 2	REE_×/10...0	6
502	p62 exercice n° 2	CMCR_×0,0...1	5
503	p62 exercice n° 3	CMCR_×0,0...1	6
503	p62 exercice n° 3	CMCR_×0,5	6
504	p62 exercice n° 4	CMCR_RV	6
504	p62 exercice n° 4	CMCR_OP	6

G.E.	Tâches	Activités	R
505	p62 exercice n° 5	CMCR Der	2
505	p62 exercice n° 5	CMCR RV	6
505	p62 exercice n° 5	CMCR $\times 0,5$	1
505	p62 exercice n° 5	CMCR UOG	6
505	p62 exercice n° 5	PC 0inutile	2
505	p62 exercice n° 5	PC Décì=	2
505	p62 exercice n°5	QTQS RV	2
506	p62 exercice n° 6	CMCR OP	1
506	p62 exercice n° 6	QTQS \times et<	5
507	p62 exercice n° 7	PC 0inter	2
507	p62 exercice n° 7	PC 0final	1
507	p62 exercice n° 7	PC 0inutile	1
507	p62 exercice n° 7	CMCR DOG	3
508	p62 exercice n° 8	CMCR Der	2
508	p62 exercice n° 8	MAC	2
508	p62 exercice n°8	REE $n \times n$	1
508	p62 exercice n°8	REE $d \times n$	1
509	p62 exercice n° 9	PC 0inter	2
509	p62 exercice n° 9	PC 0final	2
510	p62 exercice n° 10 1)	CMCR UOG	4
510	p62 exercice n° 10 1)	CMCR Der	1
510	p62 exercice n° 10 2)	CMCR UOG	8
510	p62 exercice n° 10 2)	PC 0inutile	1
510	p62 exercice n° 10 2)	CMCR Der	1
511	p62 exercice n° 11	REE $d \times n$	4
511	p62 exercice n° 11	CMCR $\times 0,5$	2
601	p63 exercice n° 12	CMCR <>	3
601	p63 exercice n° 12	REE SM	3
602	p63 exercice n° 13	REE $d \times n$	1
602	p63 exercice n° 13	PC 0inutile	1
602	p63 exercice n° 13	PC 0final	3
603	p63 exercice n° 13	SM AddIsom	3
603	p63 exercice n° 14	PC 0final	1
603	p63 exercice n° 14	PC 0inutile	1
604	p63 exercice n° 15	PC 0inter	1
604	p63 exercice n° 15	PC 0final	5
604	p63 exercice n° 15	PC Décì=	2
604	p63 exercice n° 15	PC 0inutile	1
604	p63 exercice n° 15	CMCR (D, \times)	3
604	p63 exercice n° 15	CMCR $\times 0,0...1$	1
604	p63 exercice n° 15	CMCR $\times 0,5$	1
605	p63 exercice n° 16	SM AddIsom	1
605	p63 exercice n° 16	REE $d \times n$	1
606	p63 exercice n° 17	SM Conversion	3
606	p63 exercice n° 17	PC 0inutile	2
607	p63 exercice n° 18	REE SM	3
607	p63 exercice n° 18	REE D	1
607	p63 exercice n° 18	MAC	3

G.E.	Tâches	Activités	R
608	p64 exercice n° 19	CMCR $\times 0,5$	1
608	p64 exercice n° 19	REE $n \times n$	5
608	p64 exercice n° 19	REE D	1
608	p64 exercice n° 19	CMCR $\times 0,0...1$	3
608	p64 exercice n° 19	CMCR Der	1
609	p64 exercice n° 20	REE SM	1
610	p64 exercice n° 21	REE $n \times n$	1
611	p64 exercice n° 22 1)	REE SM	1
611	p64 exercice n° 22 1)	REE $d \times n$	1
611	p64 exercice n° 22 1)	REE $n \times n$	2
611	p64 exercice n° 22 1)	REE D	1
611	p64 exercice n° 22 1)	PC 0inutile	1
611	p64 exercice n° 22 2)	REE SM	2
611	p64 exercice n° 22 2)	PC 0inutile	2
701	Vrai/Faux a)	PC Déci=	1
701	Vrai/Faux b)	CMCR $\times 0,0...1$	1
701	Vrai/Faux c)	CMCR OP	1
701	Vrai/Faux d)	CMCR Der	1
701	Vrai/Faux e)	QTQS $\times <1$	1
701	Vrai/Faux f)	PC $\times 0,0...1$	1
701	Vrai/Faux g)	REE $\times 10...0$	1
801	p65 ex A	REE $d \times n$	3
801	p65 ex A	REE SM	1
802	p65 ex B	REE SM	1
802	p65 ex B	REE D	1
802	p65 ex B	REE $n \times n$	2
803	p65 ex C	REE SM	3
804	p65 ex D	REE SM	4
901	Enigme	CMCR Der	1
901	Enigme	REE $n \times n$	1
1001	p65 ex S1	PC 0inter	1
1001	p65 ex S1	PC Déci=	1
1001	p65 ex S1	MAC	2
1001	p65 ex S1	CMCR Der	5
1003	p65 ex S2	CMCR $\times 0,0...1$	12
1003	p65 ex S3	REE SM	1
1004	p65 ex S4	REE $n \times n$	3
1005	p65 ex S5	REE SM	1
1005	p65 ex S5	PC 0inutile	4
1005	p65 ex S5	PC 0final	4
1006	p65 ex S6	REE $d \times n$	2
1006	p65 ex S6	REE SM	2
1007	p65 ex S7	REE SM	1

Activités effectives des élèves dans la séquence de Madame Theano (3 h)

G.E.	Activités	R
11	CMCR_DOG	3
11	QTQS OG	1
12	CMCR_DOG	3
12	ETO OG	1
12	QTQS OG	1
12	REE d×n	3
12	REE SM	3
12	MAC	3
13	CMCR_UOG	7
13	ETO OG	6
13	ETO RV	6
13	MAC	10
19	PC 0inutile	1
19	PC 0inter	2
19	PC 0final	2
19	CMCR_Der	2
19	CMCR_DOG	3
19	CMCR_UOG	12
21	PC Simple	3
21	PC Décì=	2
21	ETO OG	5
21	ETO RV	5
22	PC Simple	3
22	PC Décì=	2
22	CMCR_DOG	5
22	ETO OG	5
22	ETO FI	2
22	REE D	1
23	CMCR_DOG	1
23	PC Décì=	1
23	ETO FI	1
23	ETO FI	1
23	REE n×n	1
23	REE D	1
24	PC Décì=	2
24	PC 0inutile	2
24	PC 0final	2
24	CMCR ×0,5	2
24	CMCR_DOG	3
24	CMCR RV	6
24	QTQS OG	1
24	CMCR_Der	2
24	QTQS RV	2
24	REE_D	1

G.E.	Activités	R
31	PC_0inutile	3
31	PC_Déci=	2
31	CMCR_×0,5	1
31	CMCR_DOG	3
31	QTQS_VFP	1
31	QTQS_RV	3
31	REE_D	1
32	QTQS_RV	3
32	REE_D	3
32	PC_0inutile	3
33	PC_0inutile	1
33	CMCR_Der	3
33	CMCR_UOG	2
33	QTQS_RV	2
33	REE_D	1
34	PC_0inutile	1
34	CMCR_Der	1
34	CMCR_×0,5	1
34	QTQS_RV	1
35	CMCR_0,5	2
35	QTQS_VFP	1
35	MAC	1
35	QTQS_RV	1
35	CMCR_Der	1
36	REE_×/10...0	1
36	PC_0final	2
36	CMCR_×0,5	1
36	PC_0inutile	1
36	QTQS_×<1	1
37	ETO_FI	1
37	PC_0inutile	1
37	ETO_FI	2
37	QTQS_×<1	1
38	PC_0final	4
38	PC_0inutile	2
38	REE_d×n	2
38	REE_D	1
38	SM_AddIsom	4
39	REE_SM	6
39	REE_n×n	2
39	REE_d×n	3

Activités effectives des élèves dans la séquence de Madame Agnesi (3 h 30)

G.E.	Activités	R
11	CMCR DOG	4
11	QTQS RV	1
11	REE $d \times n$	1
11	PC 0inutile	1
12	ETO C	1
12	ETO OP	6
12	REE D	1
13	ETO C	1
13	REE $d \times n$	3
13	REE $n \times n$	1
13	REE SM	6
13	CMCR DOG	1
19	CMCR $\langle \rangle$	3
19	REE SM	3
21	CMCR $\langle \rangle$	1
21	REE SM	1
22	CMCR $\langle \rangle$	1
22	REE SM	1
23	CMCR $\langle \rangle$	1
23	CMCR $\times 0,5$	1
23	REE SM	1
24	ETO P	2
24	ETO C	3
24	ETO RV	1
24	ETO FI	2
24	REE $d \times n$	1
24	SM AddIsom	3
25	PC 0inutile	1
25	PC Déci=	1
25	ETO FI	1
29	PC 0inutile	3
29	PC Déci=	1
29	CMCR UOG	6
29	CMCR $\times 0,5$	2
29	CMCR Der	2
29	CMCR RV	2
29	QTQS RV	2
29	SM AddIsom	4
29	PC Simple	3
29	PC 0final	4
29	REE $d \times n$	1

G.E.	Activités	R
31	CMCR - Der	1
31	CMCR UOG	2
31	CMCR $\times 0,5$	1
31	CMCR RV	1
31	CMCR_OP	1
31	QTQS_OG	2
31	QTQS_RV	1
31	MAC	1
31	REE d \times n	1
32	PC 0inutile	2
32	PC 0inter	1
32	ETO FI	1
32	QTQS_OG	1
32	QTQS_RV	2
32	REE_n \times n	1
33	CMCR DOG	4
33	CMCR RV	4
33	CMCR Der	3
33	QTQS $\times <1$	1
33	QTQS_RV	3
33	REE_D	1
33	PC 0inutile	3
33	PC 0final	1
33	PC_simple	1
41	CMCR UOG	1
41	CMCR_OP	1
41	CMCR_RV	2
41	QTQS_RV	1
41	REE_D	3
42	QTQS $\times <1$	1
42	ETO FI	1
42	PC 0inutile	1
42	QTQS_RV	1
43	CMCR $\times 0,0...01$	3
43	PC 0final	2
43	REE_D	2
43	ETO FI	1
44	CMCR $\times 0,5$	1
44	CMCR (D,x)	1
44	ETO FI	1
45	CMCR Der	1
45	MAC	1
45	ETO FI	1

Activités effectives des élèves dans la séquence de Monsieur Bombelli (2 h 30)

Dans cette séquence, certaines activités attendues compte tenu de la tâche prescrite n'ont pas été effectuées en classe : par exemple lorsque le professeur ou un élève donne la réponse d'un calcul écrit, mental ou raisonné qui devait être effectué à la maison et qu'aucune reprise en classe de ce calcul n'est effectué. Nous avons alors indiqué l'activité attendue mais nous ne l'avons pas comptabilisée dans les activités effectives, pour cela nous avons porté le coefficient 0 dans la colonne " R ".

G.E.	Activités	R
11	ETO P	1
11	ETO OP	2
11	ETO P	1
11	QTQS VFP	1
11	REE $n \times n$	1
11	REE $\times / 10 \dots 0$	1
19	REE SM	4
19	REE $d \times n$	4
21	REE SM	4
21	REE $d \times n$	4
22	ETO OP	1
22	ETO FI	1
22	QTQS VFP	1
23	PC 0inter	2
23	PC 0inutile	1
23	PC Déc=	1
23	QTQS RV	1
23	REE D	1
29	REE $d \times n$	3
29	PC 0inutile	2
29	PC 0inter	2
29	PC 0final	9
29	PC Déc=	2
29	QTQS RV	3
29	CMCR (D, \times)	3
29	CMCR $\times 0,0 \dots 1$	1
29	CMCR $\times 0,5$	2
31	REE $d \times n$	0
31	CMCR $\times 0,5$	0
32	divers PC	0
33	PC 0inutile	1
33	PC 0inter	1
33	PC 0final	2
33	PC Déc=	1
33	REE $n \times n$	1
33	REE $d \times n$	1

G.E.	Activités	R
34	PC Déc=	0
34	PC 0inutile	1
34	CMCR $\times 0,5$	1
34	CMCR RV	1
34	QTQS RV	1
34	REE D	1
35	ETO FI	1
35	ETO FI	1
35	ETO FI	1
35	ETO FI	1
35	ETO FI	1
35	ETO FI	1
36	CMCR (D, \times)	1
36	ETO FI	1
36	ETO FI	1
39	QTQS $\times_{et} <$	1
39	CMCR OP	1
39	CMCR $<>$	3
39	REE SM	3
39	CMCR Der	2
39	REE $n \times n$	1
39	REE $d \times n$	1
39	MAC	2

Activités effectives des élèves dans la séquence de Madame Germain (5 h)

G.E.	Activités	R
11	CMCR DOG	1
11	REE $n \times n$	4
11	REE $d \times n$	4
11	REE Voca	8
11	REE (D, \times)	1
11	QTQS VFP	1
12	CMCR $\times 0,0...1$	5
12	REE $\times / 10...0$	6
12	REE D	2
12	QTQS $\times < 1$	1
12	QTQS VFP	2
12	ETO FI	1
13	CMCR DOG	2
13	CMCR UOG	1
13	CMCR $<>$	3
13	QTQS OG	1
13	QTQS VFP	4
13	REE D	1
21	CMCR $<>$	2
21	CMCR UOG	1

E	Activités	R
22	CMCR <>	1
22	QTQS VFP	4
22	CMCR $\times_{et}<$	3
23	CMCR <>	2
23	CMCR UOG	4
23	QTQS $\times<1$	2
23	QTQS RV	3
23	REE D	2
23	CMCR $\times_{et}<$	1
23	REE $\times/10...0$	2
23	QTQS VFP	1
31	QTQS VFP	12
31	QTQS RV	1
31	REE $\times/10...0$	1
31	ETO FI	1
32	REE $d \times n$	1
32	CMCR $\times 0,0...1$	1
32	CMCR UOG	3
32	CMCR OP	5
32	CMCR (D, \times)	3
32	QTQS OP	2
32	REE $\times/10...0$	3
32	QTQS OG	2
32	CMCR RV	1
32	QTQS VFP	1
32	ETO FI	1
33	CMCR RV	6
33	CMCR OP	6
39	CMCR RV	6
39	CMCR OP	7
39	QTQS $\times_{et}<$	5
41	CMCR $\times 0,0...1$	1
41	CMCR DOG	6
41	QTQS $\times_{et}<$	4
41	CMCR $\times 0,5$	1
41	CMCR (D, \times)	2
41	QTQS OG	2
41	REE D	3
42	QTQS VFP	2
42	QTQS OG	1
43	CMCR OP	4
43	QTQS VFP	1
44	CMCR OP	1
44	ETO FI	2

G.E.	Activités	R
51	CMCR $\times 0,0...1$	1
51	REE $\times /10...0$	1
51	CMCR (D, \times)	1
51	CMCR $\times 0,5$	2
51	ETO FI	1
51	ETO F	1
51	QTQS $\times <1$	1
51	ETO FI	2
51	QTQS OG	1
51	REE D	1
52	ETO F	2
52	ETO FI	1
52	QTQS VFP	1
52	PC 0inutile	1
52	QTQS (D, \times)	2
52	CMCR (D, \times)	1
52	CMCR $\times 0,0...1$	1
53	PC 0inutile	1
53	ETO F	1
53	CMCR DOG	1
53	ETO RV	1
53	QTQS VFP	1
53	ETO FI	1
53	QTQS RV	1
53	REE $n \times n$	1
54	PC Déci=	2
54	PC 0final	2
54	PC 0inutile	2
54	CMCR $\times et <$	2
54	QTQS $\times <1$	2
54	CMCR OP	7
54	CMCR RV	4
54	CMCR Der	2
59	PC 0inter	1
59	PC 0final	5
59	PC Déci=	2
59	PC 0inutile	1
59	CMCR (D, \times)	3
59	CMCR $\times 0,0...1$	1
59	CMCR $\times 0,5$	1
59	SM AddIsom	1
59	REE $d \times n$	1

1bis. Numérotation des activités effectives

Pour dresser les graphiques chronologiques des activités effectives des élèves dans les séquences observées, nous avons porté le temps en abscisse et les activités en ordonné. Cela nécessitait de numéroter les activités, nous présentons ici la numérotation adoptée.

Numérotation des activités par type

Activités	N° des activités
REE	11 à 16
REE_ \times /10. 0	11
REE_D	12
REE_SM	13
REE_n \times n	14
REE_d \times n	15
REE_Voca	16
ETO	21 à 28
ETO_DE	21
ETO_C	22
ETO_F	23
ETO_OG	24
ETO_OP	25
ETO_P	26
ETO_RV	27
ETO_FI	28
PC	31 à 35
PC_Simple	31
PC_0inter	32
PC_0final	33
PC_0inutile	34
PC_Déci=	35

Activités	N° des activités
CMCR	40 à 49
CMCR_ \times 0,0. 1	40
CMCR_ \times 0,5	41
CMCR_<>	42
CMCR_DOG	43
CMCR_UOG	44
CMCR_OP	45
CMCR_RV	46
CMCR_Der	47
CMCR_(D, \times)	48
CMCR_ \times et<	49
QTQS	51 à 57
QTQS_(D, \times)	51
QTQS_ \times et<	52
QTQS_ \times <1	53
QTQS_OG	54
QTQS_OP	55
QTQS_RV	56
QTQS_VFP	57

2. Codage des adaptations dans les séquences des professeurs observés

Composition des tableaux de codage des adaptations :

Chaque épisode comportant une ou plusieurs adaptations est repéré dans la colonne "E" des tableaux par un numéro qui indique la chronologie. Deux numéros identiques indiquent la simultanéité des activités effectives.

A chacun de ces épisodes correspondent une ou plusieurs activités effectives : le type d'activité est indiqué dans la colonne "T.A."

A chacun de ces épisodes correspondent une ou plusieurs adaptations. Rappelons qu'une adaptation se compose de trois informations :

- 1) L'incident à l'origine de l'adaptation :
 - les erreurs commises (E) ;
 - les questions posées (Q) ;
 - les réponses incomplètes (I) ;
 - les silences des élèves interrogés (S) ;
 - ce que disent les élèves quand la réponse est hors de leur porté (P) ;
 - les désaccords entre élèves alors qu'aucun n'a tort (D).
- 2) La place de l'incident par rapport au scénario prévu :
 - l'incident porte sur un fait non compris dans le champ mathématique de la séquence (HC) ;
 - l'incident porte sur un fait compris dans le champ mathématique mais ne concerne pas la stratégie du professeur (CHS) ;
 - l'incident porte sur un fait compris dans le champ mathématique et s'inscrit dans la stratégie du professeur (S).
- 3) Le mode de gestion de l'incident par le professeur :
 - le professeur ignore l'incident (I) ;
 - le professeur répond à la place de l'élève (R) ;
 - le professeur récupère et enrichit une question ou une réponse (E) ;
 - le professeur change d'intervenant en sollicitant un autre élève (C) ;
 - le professeur guide l'élève (G) ;
 - le professeur facilite l'exécution de la tâche (F) ;
 - le professeur demande un approfondissement (A) ;
 - le professeur reprend, de façon neutre, l'expression d'un élève (N).

Chaque adaptation est indiquée par son incident (dans la colonne "I"), la place de l'incident par rapport au scénario prévu (dans la colonne P) et le mode de gestion de l'incident par le professeur (dans la colonne "G").

Les adaptations dans la séquence de Madame Theano

E	T.A.	Adaptations		
		I	S	G
111	REE	E	HC	I
112	QTQS	E	S	I
123	REE	E	HC	A
123	REE	I	HC	N
124	REE	E	HC	R
212	CMCR	S	S	G
214	CMCR	I	S	R
214	CMCR	I	S	G
222	CMCR	S	S	R
231	ETO	E	CHS	R
234	CMCR	I	S	R
242	CMCR	E	CHS	R
243	CMCR	Q	S	I
244	CMCR	Q	S	I
245	CMCR	E	S	A
246	CMCR	I	S	N
246	CMCR	I	HC	A
246	CMCR	S	S	G
247	CMCR	E	S	N
247	CMCR	E	S	A
247	CMCR	P	S	I
247	CMCR	P	S	A
247	CMCR	I	S	I
312	PC	I	S	A
313	PC	Q	S	N
313	PC	I	S	N
314	REE	I	S	E
314	REE	I	S	E
314	REE	Q	S	R
315	PC	I	CHS	R
321	CMCR	E	HC	I
321	CMCR	I	S	R
322	CMCR	I	S	G
333	CMCR	E	S	N
333	CMCR	E	S	A
334	CMCR	I	S	E
336	CMCR	E	S	A
337	CMCR	I	S	E
34	CMCR	E	S	N
34	CMCR	E	S	E
34	CMCR	P	S	C
34	CMCR	P	S	E
34	CMCR	I	S	E

E	T.A.	I	S	G
352	REE	E	CHS	G
354	QTQS	I	S	A
355	QTQS	P	S	E
356	QTQS	P	S	E
356	ETO	I	S	R
357	CMCR	Q	S	I
361	CMCR	Q	S	E
364	QTQS	Q	S	N
372	CMCR	I	S	E
373	ETO	Q	S	F
373	QTQS	E	S	A
373	QTQS	Q	S	A
373	QTQS	S	S	F

Les adaptations dans la séquence de Madame Agnesi

E	T.A.	Adaptations		
		I	S	G
111	CMCR	E	S	F
111	CMCR	E	S	R
121	CMCR	I	S	A
123	REE	I	S	E
134	REE	D	S	N
134	REE	D	S	R
211	CMCR	I	S	A
212	CMCR	I	S	E
212	CMCR	I	S	A
213	CMCR	I	S	G
213	CMCR	I	S	G
213	CMCR	I	S	R
222	CMCR	I	S	R
222	CMCR	I	S	A
222	CMCR	E	S	G
222	CMCR	I	S	R
231	CMCR	S	S	C
231	CMCR	I	S	C
231	CMCR	I	S	A
232	CMCR	S	S	C
232	CMCR	I	S	R
241	REE	I	S	G
241	REE	I	S	R
242	REE	Q	S	E
242	REE	D	S	R
242	REE	D	S	E

E	T.A.	I	S	G
243	SM	Q	S	R
243	SM	Q	S	A
243	SM	I	S	A
244	SM	I	S	E
244	SM	Q	S	G
244	PC	E	S	G
244	PC	I	S	G
244	PC	Q	CHS	R
245	SM	E	S	I
311	CMCR	I	S	A
311	CMCR	I	S	E
312	CMCR	S	S	G
313	CMCR	P	S	R
313	CMCR	P	S	G
314	CMCR	E	S	G
314	CMCR	P	S	R
314	CMCR	E	S	R
314	CMCR	E	S	R
314	CMCR	I	S	R
314	CMCR	I	S	E
315	CMCR	I	S	R
315	CMCR	I	S	R
316	CMCR	E	S	C
316	CMCR	I	S	A
316	CMCR	S	S	G
323	PC	I	S	E
324	PC	E	S	R
332	CMCR	I	S	R
333	CMCR	E	S	R
334	CMCR	I	S	R
335	QTQS	Q	S	E
335	QTQS	I	S	E
335	PC	Q	S	R
412	CMCR	Q	S	R
412	CMCR	I	S	E
412	CMCR	E	S	E
412	CMCR	I	S	R
412	CMCR	I	S	A
413	CMCR	S	S	C
413	CMCR	I	S	F
413	CMCR	I	S	E
413	CMCR	I	S	R

422	PC	Q	CHS	R
431	CMCR	E	S	R
432	CMCR	I	S	E
433	CMCR	Q	S	R
434	ETO	I	S	E
E	T.A.	I	S	G
44	ETO	E	S	R
441	CMCR	Q	HC	R
442	CMCR	E	S	N
443	CMCR	E	S	N
443	CMCR	Q	S	R
444	CMCR	E	S	R
452	MAC	I	S	A

Les adaptations dans la séquence de Monsieur Bombelli

E	T.A.	Adaptations		
		I	S	G
117	PC	Q	S	I
118	ETO	I	S	E
211	REE	I	S	R
211	REE	I	S	R
212	REE	E	S	I
215	REE	E	S	R
221	ETO	I	S	E
222	ETO	S	S	R
232	PC	D	S	R
233	PC	D	S	I
234	PC	D	S	I
311	CMCR	Q	S	I
313	CMCR	D	S	C
322	PC	Q	HC	R
331	PC	E	S	R
332	PC	E	S	I
344	CMCR	E	S	N
344	CMCR	Q	S	N
344	CMCR	S	S	C
345	CMCR	E	S	N
346	CMCR	E	S	R
347	CMCR	Q	S	E
348	PC	Q	S	R
349	PC	Q	S	R
353	CMCR	Q	S	R

Les adaptations dans la séquence de Madame Germain

E	T.A.	I	S	G
111	CMCR	Q	S	R
112	CMCR	I	S	A
113	CMCR	E	S	N
113	CMCR	Q	S	A
113	CMCR	D	HC	A
113	CMCR	E	HC	R
122	CMCR	E	S	A
122	CMCR	I	S	A
122	CMCR	D	S	I
123	CMCR	E	S	A
123	CMCR	I	S	A
123	CMCR	D	S	R
124	CMCR	E	S	A
124	CMCR	S	S	F
124	CMCR	S	S	F
131	CMCR	I	S	A
132	CMCR	I	S	A
132	CMCR	I	S	A
132	CMCR	I	S	A
132	CMCR	I	S	A
133	CMCR	S	S	F
212	CMCR	Q	S	N
213	CMCR	E	HC	N
222	CMCR	E	S	A
222	CMCR	I	S	A
223	CMCR	I	S	A
223	CMCR	I	S	N
231	CMCR	I	S	C
232	CMCR	E	S	A
232	CMCR	E	S	A
232	CMCR	E	S	G
233	CMCR	I	S	A
234	CMCR	D	S	A
235	CMCR	I	S	C
236	CMCR	E	S	A
236	CMCR	E	S	A
236	CMCR	I	S	A
312	QTQS	E	S	A
312	QTQS	S	S	C
313	QTQS	E	S	A
314	QTQS	E	S	N
314	QTQS	I	S	E
315	QTQS	D	S	N
316	QTQS	I	HC	E
316	QTQS	E	HC	A
322	QTQS	E	S	I

E	T.A.	I	S	G
323	CMCR	I	S	A
323	CMCR	I	S	E
323	CMCR	Q	S	I
323	CMCR	I	S	G
324	CMCR	S	S	A
325	CMCR	I	S	A
325	CMCR	E	S	N
325	CMCR	E	S	R
327	CMCR	I	S	N
327	CMCR	I	S	R
327	CMCR	Q	S	A
328	CMCR	Q	S	C
413	CMCR	I	HC	R
414	CMCR	Q	S	N
414	CMCR	D	S	R
414	CMCR	Q	S	R
415	CMCR	D	S	R
415	CMCR	S	S	G
415	CMCR	Q	S	C
415	CMCR	I	S	G
415	CMCR	Q	S	C
415	CMCR	I	S	F
415	CMCR	Q	S	N
415	CMCR	P	S	I
423	QTQS	E	S	R
423	QTQS	Q	S	R
424	CMCR	S	S	C
424	CMCR	S	S	E
434	QTQS	S	S	C
441	ETO	E	S	E
443	ETO	I	S	N
444	ETO	I	S	E
51	ETO	S	S	C
511	ETO	I	S	F
511	ETO	I	S	R
513	ETO	I	S	F
513	ETO	I	S	G
514	CMCR	E	S	C
514	CMCR	E	S	C
515	CMCR	E	S	R
515	CMCR	E	S	A
521	ETO	E	S	R
521	QTQS	Q	S	F
523	CMCR	S	S	R
523	CMCR	Q	S	R
531	REE	I	S	E
533	ETO	Q	S	E
534	CMCR	Q	S	R

- C -

**NARRATION DES DEROULEMENTS
DES SÉQUENCES OBSERVÉES**

1. Narration de la séquence de Madame Theano

1. Déroulement de la séance n°1

11. Utiliser les ordres de grandeurs pour contrôler une opération

11.1. Correction d'un exercice ³ :

Retrouver et corriger les erreurs commises dans les calculs ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 2985,4 \\ + 76 \\ + 529,35 \\ \hline 3580,75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 459 \\ - 561 \\ \hline 098 \end{array}$$

9,07 - 4,6 = 5,01

l'enseignant avait demandé, de surcroît, de déterminer un ordre de grandeur du résultat pour éviter de grosses erreurs.

Le problème de l'analyse des erreurs commises dans l'énoncé n'est pas abordé, l'enseignant profite du fait que l'analyse d'erreurs n'est pas une pratique généralement attendue des élèves (qui refont juste pour voir si c'est faux) pour insister sur les ordres de grandeur.

11.2. Mise en doute par les élèves de la fiabilité des ordres de grandeurs

Problème pour la dernière, certains élèves ont écrit $(600 - 400 = 200)$ au lieu de $(600 - 500 = 100$ ou $560 - 460 = 100)$ qui donne un ordre de grandeur double du résultat exact... Aucune réponse ne sera apportée à ce problème du choix de l'ordre de grandeur.

12. Reconnaitre une situation multiplicative pour résoudre un problème

12.1. Recherche de trois problèmes multiplicatifs

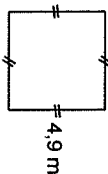
Madame Theano distribue une photocopie, les élèves ont la place de répondre sur la photocopie ⁴.

Cherchez les trois problèmes sur cette feuille. Posez les opérations...

N'oubliez pas l'ordre de grandeur

- 1) Avec ma voiture je parcours 3 fois une distance de 10,8 km. Quelle distance totale ai-je parcourue ?
- 2) Quel est le prix de 5 pains au chocolat qui coûtent 3,80 F l'un ?
- 3) Quel est le périmètre du carré ? Le périmètre est la longueur du "tour" de la figure.

Avant la recherche, l'enseignant précise le contrat : on a le droit de chuchoter avec son voisin mais pas plus, on a le droit d'utiliser la calculatrice (une dizaine de machines sont disponibles sur le bureau du professeur), elle veut voir l'opération posée.



³ Exercice n°3 p. 30 du manuel *Cinq sur Cinq* (1997), Paris : Hachette.

⁴ Exercices créés par le professeur.

Durant la recherche des élèves, Madame Theano circule dans rangs et complète le contrat : elle veut voir aussi les ordres de grandeur. Elle répond à des questions concernant la formulation de la réponse attendue de la part des élèves. Précise que la calculatrice est autorisée, pour vérifier les résultats obtenus par un calcul écrit. A plusieurs occasions, Madame Theano demande aux élèves d'effectuer un calcul approché pour contrôler la pertinence du résultat obtenu.

Echange avec un élève qui, au troisième exercice écrit $4,9 \times 3$ pour calculer le périmètre du carré.

12.2. Correction du premier exercice

Un élève est désigné pour aller recopier sa résolution au tableau. Le temps de rappeler toute la classe pour une mise en commun, un autre élève est désigné pour recopier sa résolution du deuxième exercice au tableau.

L'enseignant interroge deux élèves pour savoir s'ils sont d'accord avec la correction du premier exercice qui figure au tableau.

Pas de doute sur l'opération à effectuer : $10,8 \times 3$. A haute voix l'enseignant guide la classe pour l'estimation du produit, annonce le résultat exact obtenu par l'utilisation de la calculatrice et confirme la conformité du résultat exact avec le résultat approché.

12.3. Correction du deuxième exercice

Madame Theano commence à guider l'approximation du prix unitaire des pains au chocolat mais elle est arrêtée par une élève qui avait effectué une division pour calculer le prix des cinq pains au chocolat.

Cette erreur est signalée publiquement, l'enseignant demande à plusieurs élèves d'expliquer pourquoi ils ont effectué une multiplication. Elle s'attarde sur l'explication de l'un d'entre eux qui recourt à l'addition répétée.

Un élève va recopier sa résolution du troisième exercice.

A haute voix l'enseignant guide la classe pour l'estimation du produit, annonce le résultat exact obtenu par l'utilisation de la calculatrice et confirme la conformité du résultat exact avec le résultat approché.

12.4. Correction du troisième exercice

Madame Theano questionne les élèves sur l'opération à effectuer pour calculer le périmètre du carré, elle obtient deux types de réponses : côté \times côté ou $4 \times$ côté. Elle reprend la bonne réponse sans laisser place aux commentaires : elle entame une nouvelle fois à haute voix l'estimation du produit.

Elle corrige une erreur d'estimation signalée par des élèves de la classe qui n'était qu'une erreur de copie de l'élève qui est passé au tableau.

Elle corrige une faute de calcul, l'élève avait écrit $4,9 \times 4 = 16,6$ parce qu'il avait oublié de compter la retenue.

L'enseignant signale que l'ordre de grandeur ne permet pas de réfuter la réponse 16,6. La calculatrice rend donc aussi des services pour contrôler.

13. Elaboration d'une méthode de calcul du produit de deux décimaux

131. Recherche du premier exercice

Après distribution d'une autre photocopie, les élèves doivent répondre, sur la feuille, aux questions du premier exercice ⁵ :

Avec ta calculatrice, donne les résultats de ces opérations.
Attention cherche avant l'ordre de grandeur du résultat.

$4,9 \rightarrow$ $\times 1,2 \rightarrow$ $=$	$4,9 \rightarrow$ $\times 1,2 \rightarrow$ $=$	
$9,2 \rightarrow$ $\times 3 \rightarrow$ $=$	$9,2 \rightarrow$ $\times 3 \rightarrow$ $=$	
$1,01 \rightarrow$ $\times 2,3 \rightarrow$ $=$	$1,01 \rightarrow$ $\times 2,3 \rightarrow$ $=$	$1,01 \rightarrow$ $\times 2,3 \rightarrow$ $=$
$3,25 \rightarrow$ $\times 2,1 \rightarrow$ $=$	$3,25 \rightarrow$ $\times 2,1 \rightarrow$ $=$	$3,25 \rightarrow$ $\times 2,1 \rightarrow$ $=$

Madame Theano circule dans les rangs, le peu de place laissée sous l'opération perturbe les élèves qui commencent à calculer à la main. Le trouble passé, l'enseignante, demande aux élèves de mettre en relation ce qu'ils écrivent.

132. Recherche du second exercice

Beaucoup d'élèves ayant rapidement terminé, l'enseignante autorise ces élèves à chercher le second exercice ⁶ :

$$\begin{array}{r} 4,23 \\ \times 3,2 \\ \hline = 13536 \end{array} \quad \text{Maintenant range ta calculatrice. Je te dis que}$$

$$\begin{array}{r} 4,23 \\ \times 3,2 \\ \hline = 13536 \end{array} \quad \text{alors peux-tu dire combien vaut}$$

$$\begin{array}{r} 4,23 \\ \times 3,2 \\ \hline = \end{array}$$

Ecris ce que tu as fait.

133. Inscription au tableau des réponses au premier exercice

L'enseignante interroge les élèves tour à tour, chacun d'eux apporte une réponse numérique pour compléter les dix opérations posées dans le premier exercice, avec les calculs approchés correspondants.

⁵ Exercices créés par le professeur.

⁶ Exercices créés par le professeur.

134. Correction orale du second exercice, début de bilan

Plusieurs élèves sont interrogés pour annoncer leur résultat et expliquer ce qu'ils ont fait. Les réponses variées expriment deux méthodes : utiliser l'ordre de grandeur ou compter les décimales.

19. Du travail à faire à la maison

L'enseignante donne deux exercices pour le lendemain ⁷.

Premier exercice :

1° Pour chaque produit, quel est le meilleur ordre de grandeur du résultat,

a) $19,4 \times 48,75$: 500 800 1 000 ;

b) $0,9 \times 31,02$: 3 30 300 ;

c) $507 \times 0,098$: 5 50 500.

2° Dans chaque cas, calcule :

a) le résultat exact ;

b) l'écart avec l'ordre de grandeur trouvé précédemment.

Second exercice :

Le bon résultat

1° Pour le produit 42×198 , on propose quatre résultats (la bonne réponse est parmi eux) : 83 216 836 8 316 8 320.

2° De même pour les produits ci-dessous, expliquer ce qui permet de reconnaître le bon résultat.

$31,2 \times 2,5$: 78 780,10 7,80 78,41

$0,9 \times 72$: 6,48 64,6 64,8 648

2. Déroulement de la séance n°2

Les deux exercices précédents n'ont pas été corrigés lors de cette séance qui est donc la suite de la séance n°1 dans la progression du professeur.

21. Deux méthodes pour placer la virgule au produit de deux décimaux

211. Recherche d'un exercice de révision

L'enseignante écrit un exercice au tableau, les élèves doivent répondre sans effectuer d'opération, sans utiliser la calculatrice ⁸ :

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times 2,8 \\ \hline = 336 \end{array} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{r} 1,2 \\ \times 2,8 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,2 \\ \times 2,8 \\ \hline = \end{array}$$

⁷ Exercices n° 7 et n° 10 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

⁸ Exercices créés par le professeur.

$$\begin{array}{r} 2,92 \\ \times 1,9 \\ \hline = 5548 \end{array} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{r} 2,92 \\ \times 1,9 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,92 \\ \times 1,9 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,92 \\ \times 1,9 \\ \hline = \end{array}$$

Puis l'enseignante rappelle les règles de fonctionnement de la classe et interroge un élève.

212. Un élève est guidé pour utiliser les ordres de grandeurs

Madame Theano questionne un élève qui formule ses réponses pour la classe. Il est guidé pour effectuer $1,2 \times 2,8$. Premièrement on recopie le produit donné comme s'il n'y avait pas de virgule aux facteurs, deuxièmement on détermine l'ordre de grandeur du produit, troisièmement on place la virgule au produit recopié en respectant l'ordre de grandeur obtenu.

213. Sur cet exemple, plusieurs élèves exposent la "règle de la virgule"

L'enseignante questionne tout à tour plusieurs élèves sur la même multiplication pour qu'ils exposent leur méthode. Ils comptent le nombre de décimales.

Madame Theano reprend du tableau cette méthode pour la classe.

214. Un élève expose la méthode qu'il a utilisée pour calculer, celle des ordres de grandeurs

Après avoir exposé, sur l'exemple $1,2 \times 2,8$, la règle de la virgule, Madame Theano interroge une élève pour qu'elle expose sa méthode, l'enseignante sait que cette élève a utilisé les ordres de grandeurs.

En interrogeant un autre élève qui a compté les décimales, l'enseignante fait utiliser une nouvelle fois la méthode des ordres de grandeur.

22. *Institutionnalisation orale de la technique opératoire, applications*

221. Bilan : le calcul d'un produit de deux décimaux

Madame Theano demande à un élève de choisir la méthode qu'il préfère. Il choisit la "règle de la virgule".

L'enseignante acquiesce, à partir de maintenant, on utilisera cette méthode pour effectuer la multiplication mais, il y a un mais, on contrôlera le produit obtenu en déterminant son ordre de grandeur.

222. Pas d'application de la méthode exposée, l'élève "fait au hasard"

Madame Theano demande à une élève d'appliquer la méthode qui vient d'être exposée pour calculer $12 \times 2,8$. L'élève reste muette. Elle lui demande ce qu'elle avait écrit, l'élève répond 33,6. L'enseignante l'interroge sur sa méthode, l'élève dit avoir mis la virgule au hasard... Madame Theano demande si le hasard est bien tombé, la classe approuve le résultat 33,6.

223. Première application de la méthode exposée

Une autre élève est interrogée, elle avait mis 33,6 sous la barre de l'opération. Elle expose sa méthode, la règle de la virgule. Madame Theano lui demande alors de déterminer l'ordre de grandeur du produit.

224. Deuxième application

Plus rapidement qu'avec les deux élèves précédemment interrogés, l'enseignante fait dire à haute voix le résultat et la méthode pour $29,2 \times 1,9$. Un élève compte les décimales, un autre détermine l'ordre de grandeur.

225. Troisième application, une difficulté avec la place des chiffres

Un élève annonce 0,5548 comme résultat pour $2,92 \times 19$. Un débat animé par l'enseignante permet à l'élève de justifier sa démarche : il a compté deux chiffres après la virgule pour 2,92 et deux chiffres après la virgule pour 19 car la disposition des nombres indique que les chiffres de 19 sont après la virgule de 2,92.

Madame Theano rectifie en insistant sur le sens de l'écriture : $19 \neq 0,19$. Mais l'enseignante reconnaît que, dans les additions et les soustractions, la position des chiffres doit scrupuleusement être respectée, ce qui n'est pas le cas pour la multiplication.

Le résultat est corrigé par l'élève. Il contrôle ensuite son résultat par l'ordre de grandeur. L'enseignante fait remarquer que l'ordre de grandeur permettait de savoir que la réponse 0,5548 était fausse.

226. Quatrième application.

L'élève interrogé n'a pas utilisé la règle de la virgule, il s'est trompé dans l'écriture du produit, il ne dit pas son erreur, il se corrige oralement et conclut que $2,92 \times 1,9 = 5,548$.

23. *Institutionnalisation écrite de la technique opératoire*

231. Bilan oral de ce qui a été fait

Madame Theano demande aux élèves de sortir leur cahier de cours puis elle leur demande ce qui a été fait et quel va être le titre de la leçon. Des élèves répondent sur l'utilisation de la calculatrice et sur l'addition (!) des ordres de grandeur... Une élève corrige la réponse : on vérifie les résultats à l'aide des ordres de grandeur. L'enseignante insiste, l'élève critique aussi l'opération citée.

232. La multiplication de deux entiers

Au tableau, Madame Theano écrit⁹ le titre de la leçon (Multiplication des nombres décimaux), le titre du premier paragraphe (1. Exemple), puis elle pose

⁹ Dans les narrations des déroulements des séquences observées, nous transcrivons fidèlement à l'aide de caractères "manuscrits" ce qui a été inscrit au tableau par le professeur ou par les élèves.

l'opération 41×28 ¹⁰ et fait remarquer à la classe que, jusqu'à présent, les multiplications de deux entiers n'avaient pas été effectuées à la main.

Un élève se propose pour l'effectuer au tableau. Les autres élèves doivent l'effectuer sur le cahier.

Le premier produit partiel est écrit sans problème par les élèves.

Le second produit partiel suscite une discussion : doit-on décaler en laissant un espace, en marquant un point ou en écrivant un zéro ?

L'enseignante demande alors aux élèves de dire à quelle opération correspond le résultat 820 (second produit partiel) Une élève répond 2×41 . Le contrôle par les ordres de grandeur montre que la réponse est fausse. Des élèves proposent 20×41 .

Le produit est calculé par l'addition des produits partiels : 1 148.

Multiplication des nombres décimaux

1 Exemple

$$\begin{array}{r} 4,1 \\ \times 2,8 \\ \hline 328 \rightarrow 8 \times 4,1 \\ 82 \bullet \rightarrow 20 \times 4,1 \\ \hline 114,8 \end{array}$$

233. Le passage aux décimaux

Madame Theano pose alors la multiplication¹¹ : $4,1 \times 2,8$ et demande le résultat aux élèves. Une élève propose 11,48. L'enseignante demande à l'élève d'exposer sa démarche et à toute la classe de recopier, en même temps, les indications portées au tableau :

$$\begin{array}{r} 4,1 \\ \times 2,8 \\ \hline 328 \rightarrow 8 \times 4,1 \\ 82 \bullet \rightarrow 20 \times 4,1 \end{array} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{r} 4,1 \rightarrow 1 \text{ chiffre après la virgule} \\ \times 2,8 \rightarrow 1 \text{ chiffre après la virgule} \\ \hline 11,48 \rightarrow 2 \text{ chiffres après la virgule} \end{array}$$

234. Les contrôles du résultat

Puis Madame Theano aborde les moyens de contrôler le résultat trouvé. Un élève propose d'utiliser les ordres de grandeur. Mais une parenthèse est ouverte car l'élève propose 5 comme ordre de grandeur de 4,1. Cette parenthèse permet à l'enseignante de faire quelques rappels sur l'écriture décimale, la représentation choisie est la droite graduée. Une fois cette parenthèse fermée, l'enseignante pose

¹⁰ Exemple créé par le professeur.

¹¹ Exemple créé par le professeur.

de nouveau la multiplication et son résultat mais fait figurer les ordres de grandeur correspondants¹² :

Contrôle

$$\begin{array}{l} * \text{Ordre de grandeur} \\ 4,1 \rightarrow 4 \\ \times 2,8 \rightarrow 3 \\ \hline 11,48 \rightarrow 12 \end{array}$$

* Calculatrice

Le deuxième moyen de contrôle proposé par les élèves est la preuve par neuf. Cette méthode est critiquée par un élève parce qu'elle ne "marche" pas toujours. L'enseignante déclare renoncer à ce moyen de contrôle.

Un élève propose que la calculatrice figure parmi les moyens de contrôle. Madame Theano note ce deuxième moyen de contrôle au tableau en précisant bien qu'il figure en dernier, après la détermination de l'ordre de grandeur du produit.

24. Applications de la méthode institutionnalisée

L'enseignante demande alors aux élèves de sortir leur cahier d'exercices et de noter une multiplication à effectuer : $4,1 \times 7,1$ ainsi que deux exercices à chercher tirés du manuel.

241. Le calcul de $4,1 \times 7,1$.

Madame Theano doit préciser que l'opération ne doit être posée qu'une seule fois ce qui, par rapport à ce qui est écrit au tableau, demande une synthèse de la part des élèves.

L'enseignante circule dans les rangs, précise à nouveau la consigne, demande des explications, critique certains calculs...

Cet épisode montre une assez grande hétérogénéité des élèves de la classe, certains mettent quelques secondes, d'autres quelques minutes.

Les plus rapides commencent le premier exercice du livre¹³ :

Virgule manquante

Placer la virgule dans les nombres en couleur (ici en gras)

$$\begin{array}{ll} 24,5 \times 3,5 = \mathbf{8575} & 197 \times 0,7 = 1,379 \\ 2,8 \times \mathbf{132} = 36,96 & 0,31 \times 5,4 = \mathbf{1674} \\ 246 \times 0,25 = 6,15 & 0,75 \times \mathbf{134} = 10,05 \end{array}$$

L'enseignante continue de superviser le travail des élèves, tous parviennent à calculer $4,1 \times 7,1$.

Plusieurs élèves demandent de l'aide pour $246 \times 0,25 = 6,15$.¹⁴

¹² Afin de ne pas surcharger inutilement la lecture, nous avons préféré faire figurer dès à présent le point "calculatrice" dans cette image du tableau alors qu'il n'apparaîtra qu'un peu plus tard dans le déroulement. Cette image du tableau est celle que les élèves auront à la fin de l'institutionnalisation écrite de la technique opératoire.

¹³ Exercice n°5 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* Ge (1997), Paris : Hachette.

242. Question d'élèves : comment tenir compte du zéro ?

Alors que quelques élèves ne savent que faire du zéro de 0,25, une élève propose de ne pas en tenir compte et disant qu'il est neutre. Madame Theano réagit, elle questionne l'élève sur la signification de l'adjectif neutre, pour l'élève cela signifie que le zéro ne compte pas. L'enseignante, montre à l'élève des exemples où le zéro compte, c'est-à-dire qu'il a une signification et une utilité (en tant que chiffre dans l'écriture de 0,7 ou de 102).

L'enseignante ne dit rien sur la façon de tenir compte du zéro dans cette multiplication.

243. Question d'élèves : comment placer la virgule qui ne manque pas ?

Madame Theano est interpellée pour un problème de contrat : que doit faire l'élève quand il ne manque pas de virgule alors que la consigne n'inclut pas cette possibilité ? En fait l'élève a compté les décimales et suppose que la règle de la virgule a été appliquée à 615 (et non à 6150).

L'enseignante ne répond pas, les élèves s'agitent dans la classe...

244. Correction de la première égalité

Madame Theano propose de commencer la correction de l'exercice et reprend oralement l'énoncé : 24,5 fois... Elle est interrompue par des élèves qui souhaitent que le troisième calcul soit corrigé directement.

Mais l'enseignante envoie un élève au tableau corriger le premier calcul, il applique la règle de la virgule et contrôle l'ordre de grandeur du résultat en effectuant mentalement 25×4 .

Une élève (qui ne suit pas) trouve plus judicieux de choisir 24 plutôt que 25 comme approximation de 24,6 (c'est le 246 du troisième calcul) pour mieux pouvoir le diviser par 4

245. Une parenthèse : multiplier par 0,25 c'est diviser par 4

Madame Theano ne comprend pas ce que veut dire cette élève et elle lui propose de s'expliquer.

L'élève choisit 6 comme approximation de 6,15. Comme c'est le nombre 24 qui donne 6 quand on le divise par 4, l'élève déduit que l'ordre de grandeur du premier

¹⁴ Remarques sur cet exercice : il présente plusieurs difficultés qui n'ont pas encore été abordées en classe.

- Un problème d'application de la "règle de la virgule" se pose dans le cas où l'écriture simplifiée (en barrant les zéros inutiles) du produit ne contient pas autant de décimale qu'en contenant les facteurs à eux deux. Cette difficulté apparaît dès la troisième égalité de la première colonne : $246 \times 0,25 = 6,15$.

- La présence du chiffre zéro dans le multiplicateur est une cause d'erreurs, cette difficulté apparaît aussi pour $246 \times 0,25 = 6,15$.

- La détermination et l'utilisation de l'ordre de grandeur d'un nombre inférieur à 1 est plus délicate (elle demande des connaissances sur les produits des dixièmes, centièmes, etc.) que celle d'un nombre supérieur à 1. Et ce cas n'a pas encore été rencontré dans la classe.

facteur est 24 et donc que ce premier facteur (construit à partir de 246 en plaçant une virgule) est 24,6.

L'enseignante félicite la démarche mais elle propose (pour ceux qui ne sauraient pas que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4) de revenir à la démarche que la leçon invite à suivre, et de revenir aussi à la deuxième égalité.

246. Correction de la deuxième égalité

Madame Theano applique la règle de la virgule comme certains élèves c'est-à-dire sans tenir compte d'une éventuelle simplification de l'écriture du produit. Puis elle donne la première étape du contrôle par l'ordre de grandeur, les élèves continuent : $2,8 \approx 3$ et en prenant $13,2 \approx 13$, on aboutit à $2,8 \times 13,2 \approx 39$ donc c'est bien 13,2.

247. Correction de la difficile troisième égalité

Un élève est désigné pour écrire sa réponse au tableau, réponse qui se limite à la copie de l'énoncé $246 \times 0,25 = 6,15$. Madame Theano questionne l'élève qui s'explique, selon lui, il n'y a pas de virgule à placer à 246 : le produit a autant de décimales que les deux facteurs réunis.

L'enseignante sollicite l'attention de tous les élèves de la classe sur cet exercice qui montre quelque chose "d'intéressant". Puis elle demande à l'élève interrogé de contrôler l'égalité en utilisant les ordres de grandeur.

L'utilisation des ordres de grandeurs conduit à un échec car les élèves ne savent pas déterminer l'ordre de grandeur de 0,25, ils proposent 0 ou 1 qui ne permettent pas le contrôle.

Madame Theano propose alors, "pour voir ce que ça donne" de poser la multiplication $246 \times 0,25$. Dans un premier temps, on ne tient pas compte des virgules et on obtient $246 \times 25 = 6150$. Dans un deuxième temps, on tient compte des virgules et on obtient $246 \times 0,25 = 61,50$.

Une élève prend la parole pour indiquer qu'on peut enlever le "zéro du bout", l'égalité devient donc $246 \times 0,25 = 61,5$

L'enseignante décide de ne pas mener plus loin la correction de cette égalité.

29. *Fus d'exercice sur la multiplication des décimales à chercher à la maison*

Madame Theano donne le travail pour la fois prochaine, des exercices de géométrie.

3. Déroulement de la séance n°3

L'exercice qui pose des difficultés n'a pas encore été corrigé, rien n'a été fait en classe à propos de la multiplication des décimales depuis la séance n°2.

31. *Cas où le produit des facteurs entiers associés se termine par zéro*

Madame Theano demande d'écrire, sur le cahier de cours, le titre d'un nouveau paragraphe : Quelques cas particuliers. Pendant que les élèves sortent le bon cahier et écrivent le titre, l'enseignante en interroge quelques-uns sur la signification de l'expression "cas particuliers". Les élèves proposent "des choses

à part", "des exceptions", "des choses qui ne sont pas à part mais qui ont un petit truc, une petite anomalie".

311. Trois multiplications à effectuer.

L'enseignante demande à quelques élèves de rappeler le titre du chapitre avant de donner trois multiplications à effectuer¹⁵.

Quelques cas particuliers

$$\begin{array}{r} 5,5 \\ \times 1,2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 11,2 \\ \times 0,5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 240 \\ \times 1,25 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{donc } 5,5 \times 1,2 =$$

$$\text{donc } 11,2 \times 0,5 =$$

$$\text{donc } 240 \times 1,25 =$$

Trois élèves sont désignés pour effectuer ces multiplications au tableau. Puis l'enseignante circule dans les rangs.

312. Rappel de la méthode du cours

Madame Theano se penche sur le travail d'un élève. Elle lui demande, tout en effectuant la multiplication, de rappeler la technique opératoire, puis, tout en contrôlant le résultat, d'expliquer le contrôle par les ordres de grandeur.

L'enseignante se penche sur le travail d'un autre élève. La présentation de son travail est critiquée.

Puis l'enseignante passe d'un élève à l'autre, elle donne un conseil de présentation, elle demande si ce qui est écrit au tableau est correct, elle questionne un élève sur la suppression des "zéros inutiles"...

313. Repentir d'une élève

Les élèves qui ont effectué les multiplications ont écrit finalement :

$$5,5 \times 1,2 = 6,60$$

$$11,2 \times 0,5 = 5,60$$

$$240 \times 1,25 = 300,00$$

Mais l'élève qui a effectué la deuxième multiplication demande à retourner au tableau pour corriger une erreur, elle écrit : $11,2 \times 0,5 = 05,60$. L'enseignante acquiesce tout en retournant des rangées vers le tableau pour organiser une discussion dans la classe.

314. Discussion sur l'utilité des zéros (le sens de l'écriture décimale)

Madame Theano profite de la présence de l'élève au tableau pour la questionner sur la signification des deux zéros de l'écriture 05,60. Elle en profite pour rappeler, sur un autre exemple, le nom des différentes places par rapport à la virgule.

Bilan de la première discussion : on peut ne pas écrire le zéro des dizaines s'il n'y a pas de dizaine (sous-entendu si le nombre de dizaines est nul c'est-à-dire pas de dizaine, pas de centaine...)

¹⁵ Exercices créés par le professeur.

L'enseignante se penche sur le cahier d'une élève et dit sa réponse la classe. Elle écrit au tableau " $= 5,6$ " à la suite de $11,2 \times 0,5 = 05,60$. Elle demande enfin à la classe ce qu'elle pense de la réponse de l'élève recopiée au tableau. L'écriture ne soulève aucune contestation, l'enseignante demande des explications.

Puisieurs élèves, en fait, estiment qu'on n'a pas le droit d'enlever ainsi des zéros. Les phrases incomplètes de ces élèves laissent supposer qu'ils sont gênés par le fait d'enlever le zéro de 5,60 en tant que nombre résultat de l'opération posée : avant l'écriture de la virgule, il s'agissait de 560 et là, pas question d'enlever le zéro : il faut compter les zéros pour décaler correctement la virgule...

Madame Theano reprend sa question en interrogeant la classe sur le nombre recopié :

- quelle est la signification du 6 ? les élèves répondent en chœur six dixièmes ;
 - quelle est la signification du 0 ? les élèves répondent en chœur zéro centième.
- Puis l'enseignante indique qu'on peut ne pas écrire ce zéro puisqu'il n'y a pas de millièmes et "plus rien après".

315. Correction de la première multiplication

Madame Theano questionne un élève sur le résultat qu'il a trouvé. Il répond 6,80. Elle lui annonce une erreur et lui demande de vérifier son calcul.

L'enseignante interroge d'autres élèves qui répondent 6,6. Elle écrit " $= 6,6$ " à la suite de l'égalité $5,5 \times 1,2 = 6,60$.

316. Correction de la troisième multiplication

De la même façon, l'enseignante demande aux élèves de donner leur résultat. Ils répondent "trois cents" en chœur et elle écrit " $= 300$ " à la suite de l'égalité $240 \times 1,25 = 300,00$.

32. Discussions à propos du nombre de décimales d'un produit

Madame Theano clôt la correction des multiplications et engage une discussion en classe : "comment avez-vous appliqué la règle des virgules ?"

321. A propos de $11,2 \times 0,5$

Un premier élève prend la parole, l'enseignante ne le comprend pas et va voir le cahier de l'élève. Elle remarque une erreur à cause du zéro de 0,5 et lui propose de revenir le voir plus tard.

Difficilement, des élèves expriment ce qu'ils ont fait. Madame Theano en profite pour montrer ce qui semble une contradiction : quand on multiplie $11,2$ par $0,5$ on dit qu'on doit avoir deux chiffres après la virgule et pourtant le résultat est $5,6$ qui n'en a qu'un.

Des élèves répondent en chœur que c'est parce qu'on a enlevé un zéro.

322. Reprise du raisonnement pour $5,5 \times 1,2$

Pour toute la classe, sur l'exemple $5,5 \times 1,2$, Madame Theano reprend la méthode, la contradiction et son explication. Elle utilise un élève qui répond strictement aux questions qu'elle pose, ces questions reprennent, étapes par étapes, le raisonnement complet.

332. Pas de reprise pour $240 \times 1,25$

L'enseignante laisse aux élèves le temps de revoir les trois exemples tout en proposant un nouvel exercice.

333. Application à la détermination d'une virgule manquante (1^{er} exemple)

Ces multiplications devaient préparer les élèves à aborder l'exercice du manuel que l'enseignante avait laissé en suspens à l'heure précédente.

331. La multiplication qui posait problème.

Madame Theano écrit au tableau la multiplication sur laquelle le cours précédent s'était terminé sans qu'une réponse correcte soit apportée, il fallait placer la virgule manquante au nombre encadré dans l'égalité :

$$\boxed{246} \times 0,25 = 6,15$$

332. Repenir de l'enseignante, elle propose une autre multiplication

Tout en demandant aux élèves de placer la virgule manquante, Madame Theano revient sur sa décision et propose de commencer par l'égalité :

$$0,75 \times \boxed{134} = 10,05$$

Elle insiste sur le fait qu'on ne sait pas s'il manque ou non une virgule. Enfin, elle s'assure que les élèves ont compris la consigne.

333. Réponse d'un premier élève

Un élève est interrogé, selon lui l'égalité est correcte. L'enseignante lui demande de justifier sa réponse. Il argumente, si on ne change rien on a deux chiffres après la virgule dans les facteurs et deux chiffres après la virgule dans le produit donc l'égalité est correcte.

L'enseignante reprend le raisonnement de l'élève puis demande aux autres ce qu'ils en pensent.

334. Réponse d'un deuxième élève

Une élève n'est pas d'accord, elle a écrit 13,4. Elle a du mal à s'expliquer et revient aux ordres de grandeur : 0,75 c'est presque 1, $1 \times 134 = 134$ alors que $1 \times 13 = 13$ donc il faut écrire 13,4 pour que l'ordre de grandeur corresponde avec le produit exact 10,05.

Madame Theano approuve et félicite l'élève. Elle reprend son raisonnement avec toute la classe.

335. Contestation d'un troisième élève

Un élève conteste : "ça fait trois" dit-il pour expliquer son désaccord. Puis il complète en disant qu'avec 13,4 on a, au total, trois chiffres après la virgule donc le résultat aussi doit être modifié, il faut alors écrire 1,005.

L'enseignante se fait l'écho de la contestation de l'élève, elle l'approuve tout en recherchant un autre élève pour expliquer l'erreur de raisonnement commise.

336. Si l'on posait la multiplication

Un élève reprend l'argumentation qui recourt aux ordres de grandeur mais ne résout pas le problème de la contradiction.

Madame Theano reprend alors le décompte des chiffres après la virgule réinsérant ce décompte dans la pratique c'est-à-dire dans la multiplication posée. L'enseignante écrit au tableau :

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ \times 13,4 \\ \hline 1005 \end{array}$$

puis elle reprend lentement le décompte des chiffres écrits après la virgule, elle en compte trois et propose de placer la virgule au résultat après le 1.

Sous-entendant que ce résultat est faux, l'enseignante demande ce qu'il se passait dans la multiplication.

Un élève réagit en disant qu'il y avait un chiffre après le 5. Des élèves reprennent en chœur : un zéro !

337. L'origine du zéro qui n'apparaît pas

L'enseignante demande alors comment ils auraient pu prévoir qu'il y avait un zéro après le 5.

Les réponses exprimées sont très confuses. Certains reviennent aux ordres de grandeur, d'autres recomptent les virgules ou les chiffres après la virgule... Un élève évoque enfin la multiplication de 5 par 4 : " quatre fois cinq, vingt "

Madame Theano reprend l'explication. Elle place le zéro final du premier produit partiel, elle montre le décalage et le report de ce zéro dans le résultat de la multiplication. Elle reprend ensuite l'écriture de la virgule pour obtenir le produit. Elle interprète enfin l'absence du zéro après le 5, il a été enlevé parce qu'il n'est pas suivi de chiffres.

338. Un autre moyen de contrôle

Madame Theano montre qu'en multipliant les derniers chiffres des facteurs, on peut déterminer le dernier chiffre du produit.

Elle conclut par deux moyens de contrôle : l'ordre de grandeur et le calcul du dernier chiffre.

34. Application à la détermination d'une virgule manquante (2^e exemple)

Madame Theano propose à la classe de se pencher à nouveau sur l'égalité qui contient, peut-être, une erreur de virgule :

$$\boxed{246} \times 0,25 = 6,15$$

Un élève pense que l'égalité est correcte, l'enseignante est d'accord, elle propose de le montrer en effectuant l'opération.

Un autre élève effectue la multiplication avec difficulté, mais il multiplie 0,25 et 6,15, il hésite sur le produit 5×5 , l'enseignante lui demande de reprendre la multiplication.

$$\begin{array}{r} 2 \ 4 \ 6 \\ \times 0,2 \ 5 \\ \hline \end{array}$$

Un troisième élève intervient, affirmant qu'il manque un zéro après le 5 de 6,15, il justifie sa réponse : cinq fois six font trente. L'enseignante approuve la remarque et demande de compléter l'argument par les ordres de grandeur. Mais l'élève choisit 0 comme ordre de grandeur de 0,25...

Un quatrième élève propose de prendre 200 comme ordre de grandeur de 246 et 1 comme ordre de grandeur de 0,25, il conclut que l'ordre de grandeur du produit est 200 ce qui est incompatible avec le résultat 6,15.

Un cinquième élève propose de mettre une virgule après le 4, il obtient ainsi le produit $24,6 \times 0,25$ et conclut à un ordre de grandeur de 6 car multiplier par 0,25 c'est diviser par 4. L'enseignante propose de reprendre la démarche avec toute la classe.

35. *Multiplier par 0,25 c'est diviser par 4*

351. Etude d'un exemple : $16 \times 0,25$

Madame Theano répète l'affirmation selon laquelle multiplier par 0,25 revient à diviser par 4 puis propose de la tester sur un exemple qu'elle inscrit au tableau :

$$16 \times 0,25 =$$

Un élève affirme que ça revient à diviser par 4. L'enseignante voudrait le prouver.

Un autre élève propose de calculer $16 \div 4$. L'enseignante écrit $16 \div 4$ à côté de la multiplication. L'enseignante appelle deux élèves pour effectuer les deux opérations puis se reprend (en invoquant une injustice liée à une différence importante de difficulté d'exécution des deux opérations) et demande à tous les élèves d'effectuer les deux opérations sur leur cahier.

Madame Theano circule dans les rangs. Un élève lui demande s'il faut poser la division $16 \div 4$, elle lui demande à son tour s'il en a vraiment besoin.

L'enseignante envoie un élève au tableau puis se dirige vers un élève qui ne sait plus effectuer les multiplications (cf. paragraphe 1321) et lui demande comment il fait.

352. Une aide individualisée sur la technique de la multiplication

L'élève montre ce qu'il fait à l'enseignante pour effectuer la multiplication. Il ne décale pas le second produit partiel et n'écrit pas les chiffres des deux produits partiels en "colonnes". L'enseignante lui rappelle ce qu'il faut faire.

Le niveau sonore de la classe augmente, Madame Theano retourne au tableau et signale à la classe qu'on en termine avec cette remarque.

353. Une pierre deux coups : la division par 4 et les décimales du produit

Madame Theano demande à un élève de lui dicter les chiffres qu'il a écrits sur son cahier. Tout en les copiant au tableau, elle dit à haute voix comment il les a trouvés :

$$16 \times 0,25 = 4 \text{ et } 16 : 4 = 4$$

Deux faits sont montrés par l'enseignante. Premièrement, la multiplication de 16 par 0,25 a donné le même résultat que la division par 4. Deuxièmement le résultat de la multiplication par 0,25 est un nombre entier, sans virgule, alors qu'il y en avait deux dans les facteurs. L'enseignante demande aux élèves d'interpréter cette curiosité.

Plusieurs élèves, en chœur, expliquent qu'il y avait deux zéros après le 4 quand ils ont effectué la multiplication sans tenir compte des virgules.

Puis l'enseignante fait constater l'égalité de $16 \times 0,25$ et $16 \div 4$.

354. Une généralisation qui n'est pas évidente

Madame Theano félicite à nouveau l'élève qui affirmait que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4. Puis elle se rétracte et conclut que c'est vrai sur cet exemple. Elle demande à la classe si c'est vrai tout le temps.

Non ! Répondent en chœur de nombreux élèves... Un autre ajoute qu'on ne peut pas le savoir.

355. Un contre-exemple pour contredire une généralité

L'enseignante change alors de direction et fait remarquer que le résultat de la multiplication de 16 par 0,25 est inférieur à 16 puisqu'il est égal à 4.

Puis elle pose de nouveau la question sur la division par 4.

356. Un autre exemple pour accéder à la généralité

Madame Theano pose encore une fois la question sur la généralité de l'équivalence constatée entre la multiplication par 0,25 et la division par 4.

Même réponse de la part des élèves, elle demande alors d'essayer sur un autre exemple. Un élève propose l'exemple $40 \times 0,25$ mais il n'est pas repris par l'enseignante qui propose d'effectuer à la calculatrice $20 \times 0,25$.

Les élèves remarquent que ça donne 5 et l'enseignante fait remarquer que ça marche encore. Puis elle affirme qu'on pourrait essayer avec autant d'exemples qu'on le voudrait...

357. Un début d'explication

Un élève la coupe pour dire qu'on peut faire "0,25 est égal à 0,5..." mais il est coupé à son tour par Madame Theano avant de terminer sa phrase.

Sans doute voulait-il dire que $0,25 = 0,5 \times 0,5$ et s'appuyer sur le fait, plus souvent connu des élèves, que la multiplication par 0,5 revient à diviser par 2 pour expliquer pourquoi la multiplication par 0,25 revient à diviser par 4.

36. *Multiplier par 0,5 c'est diviser par 2*

L'enseignante semble ne pas comprendre l'intervention qu'elle a coupée, ou fait-elle seulement semblant devant la classe... Elle "rebondit" sur le 0,5 pour dire qu'elle propose autre chose, une autre règle, la multiplication par 0,5.

Elle écrit un exemple au tableau :

$$10 \times 0,5 =$$

361. Une réponse immédiate

Immédiatement, un élève donne le résultat. L'enseignante l'interroge sur sa méthode. Il a décalé la virgule. Ce qui crée une sorte de diversion, d'autres élèves demandent à diviser par 2. L'enseignante rapproche le résultat obtenu de $10 \div 2$. Elle écrit au tableau les deux égalités.

$$10 \times 0,5 = 5 \quad 10 : 2 = 5$$

362. Un deuxième exemple sans interférence

Madame Theano choisit un autre exemple : $3 \times 0,5$. L'opération est effectuée collectivement. Le résultat est rapproché de $3 \div 2$. Deux nouvelles égalités disposées en tableau viennent compléter les deux premières :

$\times 0,5$	$+ 2$
$10 \times 0,5 = 5$	$10 : 2 = 5$
$3 \times 0,5 = 1,5$	$3 : 2 = 1,5$

Puis elle propose d'étudier encore un exemple.

363. Un troisième exemple proposé par un élève

Un élève propose de multiplier 4 par 0,5. L'opération est effectuée devant toute la classe. Le tableau est complété par les deux égalités $4 \times 0,5 = 2$ et $4 \div 2 = 2$:

$\times 0,5$	$- 2$
$10 \times 0,5 = 5$	$10 : 2 = 5$
$3 \times 0,5 = 1,5$	$3 : 2 = 1,5$
$4 \times 0,5 = 2$	$4 : 2 = 2$

364. Diversion d'un élève

Un élève propose de tirer une conclusion de ces exemples : " quand on multiplie par moins que zéro, ça divise ". La phrase est riche de confusion mais Madame Theano attire l'attention de la classe sur cette affirmation.

Publiquement, elle fait corriger le " moins que zéro " en moins que 1. Mais elle ne corrige pas la division, au contraire, elle l'utilise pour faire dire aux élèves dans ces multiplications, le résultat diminue.

37. Les cas particuliers annoncés au début de la séance

L'enseignante demande si tous les élèves sont bien convaincus, ils répondent en chœur par l'affirmative. Alors elle propose de voir quelques multiplications.

371. Trois multiplications particulières

Madame Theano inscrit trois égalités au tableau :

$$0,5 \times 2 = 1$$

$$0,25 \times 4 = 1$$

$$0,125 \times 8 = 1$$

A haute voix, collectivement, les résultats sont vérifiés en utilisant la technique opératoire.

L'enseignante demande alors de les recopier sur le cahier.

Au tableau, elle encadre les trois égalités et marque " à retenir " au-dessus de ce cadre.

<i>À retenir</i>
$0,5 \times 2 = 1$
$0,25 \times 4 = 1$
$0,125 \times 8 = 1$

372. Un premier bilan de la séance

Après avoir écrit " à retenir ", l'enseignante demande ce qu'on peut retenir depuis le début de la séance.

Un premier élève est interrogé, il n'a pas tiré de règle. Il répond qu'on a multiplié par 0,5 et par 0,25 et que cela donnait un nombre entier. Il ajoute qu'on a divisé par 2 et par 4 et que cela donnait aussi un nombre entier.

Madame Theano reprend la réponse, de façon consensuelle. On a vu que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2 et que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4.

373. Un deuxième bilan de la séance

Elle rajoute aussi qu'à la fin, il a été dit que si on multiplie par 0,3 ou 0,4 alors... Elle s'interrompt et demande de compléter.

Un élève répond que cela diminue et l'enseignante teste sa compréhension de cette phrase pour donner des exemples d'utilisation. Peut-on trouver 32 en multipliant 12 par 0,3 ? Non, répond l'élève, ça doit donner plus petit que 12.

Madame Theano demande alors de formuler par une phrase ce résultat.

Après quelques hésitations, à plusieurs, aidés par l'enseignante, les élèves trouvent : quand on multiplie par un nombre plus petit que un, on obtient un résultat plus petit que le nombre de départ.

Cette phrase est dictée par l'enseignante pour que chaque élève la note sur le cahier. L'enseignante circule dans les rangs pour vérifier la prise de note en dictée.

374. Seconde phase de l'institutionnalisation

Madame Theano demande d'ouvrir le manuel à la page 61, de constater que l'on y retrouve les multiplications par 0,25 et par 0,5¹⁶.

¹⁶ Encadré Méthode pour savoir calculer " rapidement " du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette, [p. 61].

Pour le calcul du produit de plusieurs nombres, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance... Il est conseillé de faire des regroupements qui simplifient les calculs.

On retiendra en particulier : $2 \times 0,25 = 1$; $4 \times 0,25 = 1$; $8 \times 0,125 = 1$.

On retiendra aussi que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.

On retiendra enfin que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4.

38. Problème issu d'une situation multiplicative

381. Correction d'un exercice cherché à la maison

L'enseignante propose de passer à un exercice qui n'a pas encore été corrigé¹⁷ :

Reproduire et compléter le ticket de caisse :	
3 articles \times 8,00 F	24,00 F
5 articles \times 13,50 F	...
2,350 kg (31,80 F/kg)	...
0,125 kg (95,00 F/kg)	...
Total	...

Plusieurs élèves sont interrogés successivement pour donner à haute voix les réponses et les explications.

1382. Cher ? Une question de rapport

L'élève interrogé pour la troisième ligne est interrompu par un autre qui affirme que 31,80 F/kg, c'est cher.

L'enseignante canalise une discussion sur la signification de cher dans la vie courante : 31,80 F/kg c'est cher ou non suivant ce qu'on achète.

383. Retour au ticket de caisse : le sens de 0,125 kg

Le prix des 2,350 kg est trouvé. L'enseignante interroge alors sur la signification de 0,125 kg. Les élèves répondent en chœur 125 g. Mais l'enseignante demande aussi ce que 125g représentent par rapport à 1 kg. La multiplicité des réponses montre beaucoup de confusion. Les élèves répondent la moitié, le tiers, le quart, le tiers de 500g...

Madame Theano prend l'exemple des petites plaquettes de beurre pour donner une idée d'objets pesant 0,125 g. L'exercice est abandonné à ce moment où la sonnerie retentit. Les élèves sortent leur cahier de texte.

39. Deux exercices à chercher à la maison

L'enseignante donne deux exercices pour la fois prochaine. Deux problèmes de compréhension de texte. Le premier consiste à donner du sens à des opérations à partir d'un énoncé, le second consiste à mettre dans l'ordre les morceaux de phrases d'un "énoncé puzzle"¹⁸ :

A. Que calcule-t-on ?

¹⁷ Exercice n°13 p. 63 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

¹⁸ Exercices A et B p. 65 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

Quatre copains préparent un petit repas. L'un d'eux va au supermarché avec 200 F. Il achète deux boîtes de pâté à 11,50 F pièce, un pack de quatre mousses au chocolat pour 20 F, quatre petits pains à 2,10 F chacun, 600g de rôti de porc froid à 89 F le kilogramme et enfin une grande bouteille de deux litres de jus de fruits à 15,20 F.

1° Que calcule-t-on quand on effectue les opérations suivantes ?

$$2,1 \times 4 = P ; 89 \times 0,6 = Q ; 11,5 \times 2 = R ; P + Q + R + 35,2 = S ; 200 - S = T ; T \div 4 = V.$$

2° Vérifier que $V = 20$.

B. Un texte puzzle (IREM de Rennes.)

Numéroté les morceaux de phrases dans l'ordre pour reconstituer un texte correct :

- ☐ 50 kg de pommes de terre
- ☐ 3,5 t ;
- ☐ Un camion vide pèse
- ☐ Il est chargé de 30 sacs de
- ☐ 5 875 kg.
- ☐ Ainsi chargé, le camion pèse
- ☐ 22 kg de carottes ;
- ☐ et de 35 sacs de

2. Narration de la séquence de Madame Agnesi

1. Séance de révision, le programme de l'école primaire

La première séance de Madame Agnesi est consacrée à la multiplication d'un décimal par un entier, de façon décontextualisée, puis à la résolution d'exercices, tirés d'une situation d'achat de marchandises. Tous les énoncés sont identiques, seules les valeurs numériques changent.

11. Les ordres de grandeur pour déterminer un produit parmi plusieurs nombres proposés par l'énoncé

Les élèves devaient effectuer pour cette séance deux exercices du manuel. Le premier est le suivant ¹⁹ :

Sans effectuer les multiplications, rechercher le résultat qui vous semble exact.			
$234 \times 11,5 = ?$	269,1	9 621	2 691
$9 \times 28,9 = ?$	260,1	602,1	2 061
$20 \times 408,1 = ?$	816,2	8 162	2 816
$8\,725 \times 0,92 = ?$	8 027	802,7	2 087

Vérifier vos pronostics à la calculatrice.

111. Avec l'indice de la virgule au produit

Le premier élève interrogé commet une erreur (solicitée par l'énoncé) en proposant 269,1. Il a certainement compté un chiffre après la virgule dans le facteur décimal et a conclu qu'il y a un chiffre après la virgule au produit.

Un deuxième élève prend la parole pour affirmer son désaccord.

Le premier élève est sollicité par l'enseignante pour déterminer un ordre de grandeur du produit. Après quelques hésitations, l'élève propose 2 340 comme approximation du produit et conclut à la réponse n°3.

Le problème posé par le fait que le dernier chiffre ne soit pas une décimale est réglé par un élève qui est désigné pour poser la multiplication au tableau pendant qu'un autre explique comment on s'y prend pour multiplier un entier par un décimal.

Madame Agnesi pointe cette erreur de compréhension de la règle énoncée à l'école primaire, la règle ne dit rien sur le nombre de décimales du produit car son écriture peut être modifiée.

112. Les trois autres calculs sont réglés plus rapidement

Trois élèves sont successivement interrogés pour donner les réponses aux trois autres questions. Ces élèves n'ayant pas commis d'erreur, l'enseignante se contente de recopier clairement au tableau les réponses données sous la forme d'égalités :

$$\begin{aligned} 9 \times 28,9 &= 260,1 \\ 20 \times 408,1 &= 8\,162 \\ 8\,725 \times 0,92 &= 8\,027 \end{aligned}$$

113. Contrôle global de réussite

Avant de passer à la correction du second exercice, Madame Agnesi demande de lever la main aux élèves qui n'avaient, à la maison, fait aucune erreur. Les trois quarts des élèves de la classe avaient réussi parfaitement cet exercice.

12 Déterminer la position de la virgule dans un produit en utilisant des divisions par 10, 100 ou 1 000

Le second exercice à chercher à la maison était ²⁰ :

Il s'agit de retrouver, pour chaque produit, le bon résultat (sans poser les opérations). Puis on écrira les sept égalités.

Produits	Résultats
154×23	$354,2$
$154 \times 2,3$	$3\,542$
$0,154 \times 23$	$3,542$
$154 \times 0,023$	$35,42$
$154 \times 0,23$	

121. En utilisant les divisions par 10, 100, 1 000...

L'enseignante interroge un élève pour donner le premier résultat : 3 542. Elle note alors la première égalité :

$$125 \times 23 = 3\,542$$

Elle demande à un autre élève le deuxième résultat, l'élève répond correctement : 35,42. L'enseignante demande à l'élève de justifier ²¹ sa réponse. L'élève évoque une division par 100 du facteur 154 qui se reporte au produit. Puis elle inscrit la deuxième égalité :

$$1,54 \times 23 = 35,42$$

Ainsi de suite pour les sept produits.

122. Contrôle global de la réussite

Madame Agnesi s'assure de la réussite des élèves en leur demandant de lever la main s'ils n'ont fait aucune faute. Cinq élèves sur six lèvent la main.

¹⁹ Exercice n°2 p. 58. Page "Revoir" du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997). Paris : Hachette.

²⁰ Exercice n°3 p. 58. Page "Revoir" du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997). Paris : Hachette.
²¹ Cet enrichissement par le professeur de la tâche prescrite dans l'énoncé du manuel permet la recherche d'arguments divers.

123. Relation entre multiplication et numération

L'enseignante demande à la classe d'expliquer la différence entre les produits 154×23 et $0,154 \times 23$. Les explications proposées par les élèves conduisent l'enseignante à représenter le "tableau" de la numération décimale.

13. Généralisation de la multiplication des valeurs entières aux valeurs décimales dans le contexte d'un problème de prix

Madame Agnesi distribue une feuille photocopiée contenant six énoncés de problèmes ²² :

- 1) Alain achète 2 kg de chocolat à 52 F le kilogramme. Calcule sa dépense.
- 2) Bernard achète 2 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme. Calcule sa dépense.
- 3) Claude achète 0,3 kg de chocolat à 52 F le kilogramme. Calcule sa dépense.
- 4) Denis achète 2,8 kg de chocolat à 52 F le kilogramme. Calcule sa dépense.
- 5) Eva achète 0,7 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme. Calcule sa dépense.
- 6) François achète 8,3 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme. Calcule sa dépense.

131. Présentation de la résolution et de la solution : explicitation du contrat

Dès qu'ils reçoivent la feuille, les élèves lui demandent comment ils doivent présenter leur réponse. L'enseignante leur demande comment, l'année dernière, ils devaient répondre. La présentation la plus courante est celle qui distingue, en deux colonnes, la solution de l'opération.

L'enseignante dresse donc deux colonnes au tableau pour les réponses. Elle demande aux élèves de bien indiquer le numéro de la question à laquelle ils répondent.

Solution	Opération

132. Recherche des problèmes

Madame Agnesi marque le début d'une recherche autonome en circulant dans les rangs pour se pencher sur les travaux des élèves. Elle les invite à poser les opérations qu'ils doivent effectuer.

L'enseignante répond à une question de confusion entre hg et kg, le texte distribué est manuscrit et certains élèves doutent de l'écriture des deux lettres h et k.

L'enseignante laisse les élèves chercher jusqu'à ce que tout le monde ait résolu au moins les trois premiers exercices.

²² Exercices créés par le professeur.

133. Correction au tableau

Pour chaque exercice, l'enseignante choisit un élève pour marquer sa réponse au tableau.

Le premier élève ne pose pas l'opération, il écrit dans la colonne solution :

Solution	Opération
1) $2 \times 52 = 104$ Alain dépense 104F	

Le second pose, dans la colonne réservée, l'opération $41,50 \times 2$ et obtient 83,00. Il écrit dans la colonne solution : $2 \times 41,5 = 83$. Bernard dépense 83 F.

Pour le troisième exercice, l'élève, dans la colonne opération écrit une conversion du poids de chocolat ($0,3 \text{ kg} \rightarrow 300 \text{ g}$), il pose 52×3 et obtient 156. Puis il explique qu'il a, ensuite, remis le zéro. Il transforme la multiplication : 3 devient 0,3 et 156 devient 15,6. La colonne solution est remplie comme pour les deux problèmes précédents.

Pour ce troisième exercice, un élève propose une autre solution. Il est invité par l'enseignante à la rédiger au tableau. Dans la colonne opération, l'élève écrit 52 F le kg , $52 \text{ F pour } 1 \text{ 000 g}$, $5,2 \text{ F pour } 100 \text{ g}$. Il pose ensuite la multiplication $5,2 \times 3$ et obtient le même résultat que précédemment.

134. Un point méthode

La comparaison des deux méthodes de résolution est animée sous la forme d'une discussion par l'enseignante. Les avis sont partagés mais un élève semble recueillir une plus grande adhésion. Son point de vue est que le problème est toujours le même, seules changent les valeurs (poids de chocolat et prix au kg) donc on peut effectuer la même opération pour trouver la solution.

Cet élève va corriger le quatrième exercice. Dans la colonne opération, il pose $52 \times 2,8$ et obtient 145,6. Il remplit la colonne solution comme les autres élèves.

135. Utilisation des ordres de grandeur pour contrôler le résultat d'une multiplication

Madame Agnesi explique, sur ce dernier exemple ($52 \times 2,8 = 145,6$) comment la détermination d'un ordre de grandeur du produit permet de contrôler le résultat. Un élève propose $50 \times 3 = 150$ et confirme que le résultat 145,6 est possible.

19. Des exercices pour la prochaine fois

Après cette intervention, l'enseignante fait noter le travail pour la fois prochaine, un exercice du manuel ²³ :

- Ai-je assez d'argent ? (De tête)
 1° Je dois acheter 48 objets coûtant 0,95 F chacun. Ai-je assez avec un billet de 50 F pour payer ?

²³ Exercice n°12 p. 63 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

2° Le litre d'essence sans plomb coûte 5,84 F. Je mets 41 litres dans le réservoir. Ai-je assez avec un billet de 200 F pour payer ?

3° J'ai acheté 4,250 kg de saumon à 125 F le kg. Ai-je assez avec un billet de 500 F pour payer ?

Les deux derniers problèmes ne sont pas résolus

2. Déroulement de la séance n°2

Madame Agnesi fait s'installer les élèves et leur demande de préparer leur cahier pour noter la correction de l'exercice à chercher à la maison.

21. Premier exercice : majoration d'un produit

Une élève est désignée pour aller au tableau, l'enseignante prend le cahier de l'élève. Un autre élève est désigné pour lire l'énoncé.

211. Lecture du titre

L'élève commence sa lecture, l'enseignante demande de lire le titre et commente, aide de quelques élèves : il ne fallait pas poser d'opération mais répondre "avec sa tête".

L'enseignante demande aussi que les réponses soient justifiées, elle cite le cahier qu'elle a entre les mains où l'élève répond simplement "oui, j'ai assez" pour montrer l'insuffisance de la réponse.

212. Lecture de l'énoncé, premières écritures

L'élève lit l'énoncé : "Je dois acheter 48 objets coûtant 0,95 F chacun. Ai-je assez avec un billet de 50 F pour payer ?"

L'enseignante insiste sur les données numériques. L'élève au tableau inscrit l'opération $0,95 \times 48$.

Madame Agnesi commente pour la classe : l'élève a posé une multiplication, mais on ne demande pas le résultat. Elle demande à l'élève sa réponse, l'élève répond qu'elle a assez avec 50 F.

L'enseignante demande une justification. L'élève répond en disant que $0,95 \times 48$ c'est à peu près 1 F, et comme il y a 48 objets, elle aura assez. L'enseignante recueille l'approbation de la classe, tout le monde est d'accord.

213. De l'ordre de grandeur à la majoration

Pourtant Madame Agnesi prolonge le raisonnement. Elle demande à l'élève comment sont 0,95 et 48 par rapport à 1 et à 50. L'élève répond qu'ils sont inférieurs.

L'enseignante demande alors combien on paierait pour 50 objets à 1 F, l'élève répond 50 F. C'est l'enseignante qui apporte la conclusion finale.

214. Ecriture de la solution

L'enseignante écrit au tableau :

$$0,95 \times 48$$

$$0,95 \times 1$$

$$\text{et } 48 \times 50$$

$$\text{donc } 0,95 \times 48 \times 50.$$

Madame Agnesi demande alors quelle conclusion écrite, les élèves proposent "j'ai assez". Elle note cette proposition sous les calculs et inscrit, en première ligne, la référence de l'exercice puis le numéro de la question.

22. Deuxième exercice : minoration d'un produit

L'élève reste au tableau, un autre est interrogé pour lire l'énoncé : "Le litre d'essence sans plomb coûte 5,84 F. Je mets 41 litres dans le réservoir. Ai-je assez avec un billet de 200 F pour payer ?"

221. Ecriture des opérations

L'enseignante reprend les valeurs numériques, l'élève écrit la multiplication. Mais il indique les unités dans les calculs, l'enseignante lui demande de les effacer.

222. Résolution

Madame Agnesi demande sa réponse à l'élève puis de justifier. Il répond correctement, il n'a pas assez. Mais la justification proposée repose sur la détermination de l'ordre de grandeur : 5,84 c'est à peu près 6.

L'enseignante le coupe, c'est de toute façon plus que 5. Elle demande de continuer le raisonnement.

L'élève continue avec 6 F et dit que $6 \times 41 = 246$ donc qu'il n'a pas assez. L'enseignante le reprend de nouveau : "oui mais 6 F c'est plus que 5,84 alors tu ne pourras pas savoir".

Madame Agnesi interroge alors un autre élève pour partager son raisonnement : 41 c'est plus que... ? 40 répond l'élève. De même, l'enseignante fait dire à l'élève que 5,84 c'est plus que 5. Puis elle tient le raisonnement : si c'était 5 et 40 ça ferait 200. D'où la conclusion : comme c'est plus que 5 et plus que 40, c'est plus que 200.

Elle écrit les inégalités au tableau, elle demande aux élèves de formuler la réponse. Ils proposent "Non, je n'ai pas assez d'argent", ce que l'enseignante copie au tableau.

23. Troisième exercice : minoration d'un produit

L'élève reste au tableau, un autre est désigné pour lire l'énoncé : "J'ai acheté 4,250 kg de saumon à 125 F le kg. Ai-je assez avec un billet de 500 F pour payer ?"

231. Plusieurs élèves pour plusieurs tentatives

Madame Agnesi reprend les valeurs, l'élève écrit la multiplication au tableau $4,250 \times 125$. L'enseignante demande à l'élève de répondre à la question mais il reste muet.

Un autre élève prend la parole pour expliquer que $4,250 \times 125$ c'est plus que 4 kg et que 125 F c'est le prix de 1 kg mais il n'arrive pas à conclure.

Un autre élève prend la suite et propose d'effectuer de tête $4 \times 125 = 500$. Madame Agnesi reprend le raisonnement : si on achetait 4 kg, on devrait payer 4×125 F c'est-à-dire... puis elle s'interrompt.

232. Comment calculer de tête 4×125 ?

Un élève est interrogé pour qu'il explique comment, de tête, il calcule le produit 4×125 . L'élève ne répond pas.

Un autre affirme que 125 est le quart de 500. L'enseignante le félicite de savoir ce résultat mais interroge un autre élève.

L'élève utilise que 25 est le quart de 100 et la distributivité pour conclure que $125 \times 4 = 400 + 100 = 500$.

2233. Suite et fin de la résolution

Madame Agnesi reprend le raisonnement, si on achetait 4 kg, on devrait payer 4×125 F c'est-à-dire 500 F, comme on achète plus que 4 kg, on paiera plus que 500 F.

Elle écrit en disant ce qu'elle écrit :

$$4,250 > 4$$

$$4 \times 125 = 500$$

$$\text{donc } 4,250 \times 125 > 500.$$

233. Le cahier est noté

Madame Agnesi renvoie l'élève à sa place en demandant d'indiquer les justifications de ses réponses. Les élèves de la classe demandent quelle note l'élève a obtenue, l'enseignante dit 5 (sur 5).

24. Reprise de l'exercice de la séance précédente

Madame Agnesi demande de conserver les cahiers ouverts et de reprendre la feuille photocopiée où figurent les problèmes de calcul du prix à payer pour le chocolat acheté.

241. Dernière multiplication d'un décimal par un entier

Un élève est envoyé au tableau mais dit qu'il ne comprend pas. L'enseignante insiste, on va lui expliquer.

Un élève lit l'énoncé : "4) Denis achète 2,8 kg de chocolat à 52 F le kilogramme. Calcule sa dépense."

L'élève au tableau écrit l'opération en ligne $2,8 \times 52 =$. Un élève dit qu'il faut commencer par effectuer l'opération sans tenir compte de la virgule. L'élève interrogé pose la multiplication $2,8 \times 52$ alors que l'enseignante dit qu'il doit calculer 28×52 . L'élève effectue correctement la multiplication.

L'enseignante rajoute : il y avait un chiffre dans la partie décimale, il y en aura un dans le résultat.

Un élève propose de vérifier à la calculatrice. L'enseignante accepte.

242. Un élève propose une autre méthode

Un élève dit qu'il a fait autrement. Madame Agnesi rappelle à l'ordre la classe qui commence à s'agiter et donne la parole à l'élève qui propose de calculer 2×52 . L'enseignante le reprend : en fait tu calcules 20×52 puis tu rajoutes 8×52 .

Mais l'élève n'est pas d'accord, il insiste pour faire 2×52 . Il effectue ce calcul de tête $2 \times 52 = 104$. Après, il y a un conflit entre deux élèves : celui qui est interrogé dit qu'il calcule ensuite 8×52 alors que son voisin pense qu'il faut calculer $0,8 \times 52$.

L'enseignante soutient le voisin. L'élève interrogé se range à cet avis et termine la démarche en disant qu'il rajoute ensuite les deux résultats obtenus.

Madame Agnesi compare les deux méthodes en soulignant que la seconde consiste à séparer la partie décimale de la partie entière alors qu'avec la première (qui a manifestement sa préférence) 2,8 est considéré comme un seul nombre. Elle conclut qu'on doit faire un seul calcul plutôt que plusieurs et multiplier directement par 2,8.

243. Une conversion pour éviter de multiplier deux décimaux

Puis l'enseignante invite les élèves à passer à l'exercice suivant. Un élève lit l'énoncé : "Eva achète 0,7 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme. Calcule sa dépense."

L'enseignante demande si cela va faire la même chose, des élèves répondent par l'affirmative. Elle demande alors quelle opération il va falloir faire, un élève répond une multiplication, un autre précise 41,50 \times 0,7.

Madame Agnesi demande alors ce qu'il y a de nouveau dans cette opération par rapport aux autres problèmes.

Un élève répond qu'il y a zéro unité mais l'enseignante rappelle qu'à l'un des problèmes, on achetait 0,3 kg.

Une autre élève ne répond pas à la question mais dit "qu'il faut faire pour trouver en grammes". L'enseignante l'envoie faire au tableau et lui demande pourquoi elle veut le faire en grammes. Mais l'élève précise sa pensée en modifiant sa réponse : elle voulait faire le calcul en hectogrammes.

L'enseignante refuse cette conversion puis revient sur sa décision et laisse l'élève résoudre le problème avec sa méthode.

L'élève trace un tableau de conversion et aboutit à 7 hg. Puis elle convertit le prix au kg : elle divise par 10 pour trouver le prix d'un hectogramme. L'enseignante la questionne pour qu'elle argumente sa démarche. L'élève est invitée à écrire 1 hg coûte 4,15 F puis 7 hg coûtent $4,15 \times 7 = 29,05$.

Madame Agnesi demande aux élèves qui a fait autrement. Un élève dit qu'il a fait directement, l'enseignante l'envoie au tableau.

244. Une autre conversion pour éviter de multiplier deux décimaux

L'enseignante demande des précisions sur la démarche, l'élève dit qu'il a converti en grammes. Elle lui demande de le faire, il écrit $4,150 \times 7$.

L'enseignante l'interrompt pour qu'il s'explique sur cette conversion en grammes. L'élève est assez confus mais il ressort que la présence du zéro est associée (trois chiffres après la virgule) à une conversion en grammes.

L'enseignante n'insiste pas, l'élève semble affirmer avoir procédé différemment parce qu'il n'a pas utilisé le tableau de conversion.

Madame Agnesi reprend la méthode de conversion en hectogrammes pour la classe en expliquant qu'on procède ainsi pour éviter de multiplier un décimal par un décimal parce qu'on ne sait pas le faire, on convertit pour avoir à effectuer un décimal multiplié par un nombre entier.

245. Première multiplication de deux décimaux

Madame Agnesi propose de poser directement la multiplication des nombres décimaux, elle s'appuie sur certains élèves qui disent qu'ils ont procédé ainsi. Elle invite à effectuer dans un premier temps la multiplication sans tenir compte des virgules, comme on le faisait déjà pour multiplier un décimal par un entier. Elle annonce qu'il faudra ensuite se demander comment obtenir le résultat 29,05 obtenu avec l'autre méthode.

Une élève est désigné pour poser l'opération, elle écrit : $41,5 \times 0,7$. Mais l'enseignante insiste pour conserver le zéro de 41,50 pour rester fidèle aux nombres de l'énoncé. Elle rajoute le zéro qui n'a pas été écrit par l'élève.

Sans tenir compte des virgules, l'élève obtient 29 050. L'enseignante propose alors de tenir compte des virgules et commence à compter, avec quelques élèves le nombre de décimales : deux dans 41,50 plus un dans 0,7 on en a trois en tout.

Des élèves disent qu'on compte alors trois décimales au résultat et qu'on obtient alors 29,050. L'enseignante fait remarquer qu'on retrouve le résultat précédent, elle détaille l'égalité entre 29,050 et 29,05.

L'enseignante reprend le calcul avec 41,5 au lieu de 41,50. Elle interroge une élève qui confond la partie entière et la partie décimale. Elle est corrigée par l'enseignante et par d'autres élèves.

246. Deuxième multiplication de deux décimaux

Un élève est invité à corriger le dernier problème. Un élève lit l'énoncé : "François achète 8,3 kg de chocolat à 41,50 F le kilogramme. Calcule sa dépense."

Au tableau, l'élève pose $8,3 \times 41,5$. L'enseignante lui demande de dire à haute voix comment il calcule. Il obtient 344,45.

Madame Agnesi demande aux élèves de lever la main s'ils ont fait de même. Huit élèves ont multiplié directement les nombres décimaux. L'enseignante demande alors aux autres élèves, la méthode qu'ils ont utilisée.

En fait, c'est la même élève que précédemment qui répond : elle a converti en hectogramme pour ne pas avoir deux nombres à virgule.

247. Première institutionnalisation orale

L'enseignante demande à l'élève qui a multiplié directement les nombres décimaux de redire à haute voix comment il s'y prend.

Il calcule sans tenir compte des virgules, ensuite il remet la virgule, pour cela il compte le nombre de chiffres qui sont après la virgule dans les deux nombres multipliés et il en met autant au résultat.

Madame Agnesi répète la méthode et indique que c'est celle qu'il faudra dorénavant utiliser plutôt que de procéder à des conversions. Un premier argument est avancé : le problème posé ne sera pas toujours avec des kg et des hg.

248. Deuxième institutionnalisation orale

Puis l'enseignante demande à un autre élève de d'exposer de nouveau la méthode pour multiplier deux décimaux.

25. Institutionnalisation écrite de la technique opératoire

Madame Agnesi propose d'écrire cette méthode sur le cahier. Les élèves rechignent et s'agitent en sortant leur cahier de cours. L'enseignante fait revenir le calme en reprenant collectivement puis individuellement plusieurs élèves.

Tout en écrivant, l'enseignante dit à haute voix ce qu'elle écrit :

III. Produit de deux nombres décimaux

On effectue la multiplication sans s'occuper des virgules, puis on compte le nombre total de chiffres des parties décimales (à droite de la virgule). Le résultat comporte autant de chiffres dans sa partie décimale.

En disant "partie décimale" l'enseignante rappelle l'attention de l'élève qui confond partie entière et partie décimale et précise pour lui que ce sont les chiffres à droite de la virgule, ce qu'elle écrit entre parenthèses.

Puis Madame Agnesi propose de marquer un exemple, elle donne la consigne : "vous poserez l'opération, vous l'effectuerez comme s'il n'y avait pas de virgule et, après, vous compterez les chiffres de la partie décimale et vous marquerez la virgule."

L'enseignante ajoute qu'il faudra aussi écrire en ligne la multiplication avec son résultat et qu'il y aura lieu de faire une petite remarque.

Exemple ²⁴

$$\begin{array}{r} 26,6 \\ \times 3,5 \\ \hline 1330 \\ 798 \\ \hline 9310 \end{array} \quad 26,6 \times 3,5 =$$

29. Deux exercices pour la séance prochaine

L'enseignante précise qu'il faut compléter le cahier de cours, apprendre la leçon et donner deux exercices ²⁵ :

²⁴ Exemple créé par le professeur.

²⁵ Exercices n°5 p. 62 et n°13 p. 63 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

Virgule manquante

Placer la virgule dans les nombres en couleur (ici en gras)

$$\begin{array}{ll} 24,5 \times 3,5 = \mathbf{8575} & \mathbf{197} \times 0,7 = \mathbf{1,379} \\ 2,8 \times \mathbf{132} = \mathbf{36,96} & 0,31 \times 5,4 = \mathbf{1674} \\ \mathbf{246} \times 0,25 = \mathbf{6,15} & 0,75 \times \mathbf{134} = \mathbf{10,05} \end{array}$$

Reproduire et compléter le ticket de caisse :

3 articles \times 8,00 F	24,00 F
5 articles \times 13,50 F	...
2,350 kg (31,80 F/kg)	...
0,125 kg (95,00 F/kg)	...
Total	...

Ces deux exercices ont été corrigés lors d'une séance d'exercices en classe dédoublée qui devait porter sur la géométrie, nous n'avons pas assisté à cette séance.

3. Déroulement de la séance n°3

Les élèves avaient à chercher un exercice à la maison ²⁶ :

Sans effectuer les opérations, retrouver les produits égaux :

$$\begin{array}{ll} a = 12,3 \times 4,56 & a = 12,3 \times 45,6 \\ b = 1\,230 \times 0,456 & e = 123 \times 4,56 \\ c = 0,123 \times 456 & f = 1,23 \times 45,6 \end{array}$$

31. Utiliser la règle de la virgule ou des opérateurs pour retrouver des produits égaux

Une élève est invitée à se rendre au tableau.

Un élève est désigné pour lire l'énoncé. Madame Agnesi commente : retrouver les produits égaux signifie qu'on ne demande pas le résultat.

L'élève au tableau copie les six produits sous la dictée de l'enseignante. Elle doit ensuite expliquer sa méthode pour trouver les produits égaux.

31.1. Une première égalité obtenue en comptant les décimales

Elle commence par affirmer que $a = f$, l'enseignante demande pourquoi. L'élève explique que les deux produits comportent trois chiffres après la virgule. L'enseignante précise que les facteurs sont décimaux qui ont les mêmes chiffres. Elle demande d'écrire au tableau l'égalité : $a = f$.

L'élève ajoute que $b = c$.

L'enseignante fait un aparté à la classe : de toute façon, même si l'énoncé précise qu'il ne faut pas effectuer les opérations, il est conseillé d'utiliser sa calculatrice pour vérifier les affirmations.

²⁶ Ces deux exercices ont été aussi donnés par Madame Thales qui utilise le même manuel.

²⁶ Exercices n°4 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

312. La première égalité obtenue en utilisant l'ordre de grandeur

Madame Agnesi revient sur la consigne qui invite à tenir des raisonnements. Une élève propose de déterminer un ordre de grandeur. L'enseignante demande alors l'ordre de grandeur de a , l'élève répond 12×4 mais ne parvient pas à le calculer de tête. L'enseignante propose de remplacer 12 par plus simple. L'élève effectue alors 10×4 , et il trouve 40. L'enseignante rappelle qu'on avait plus que 10 et plus que 4, l'élève propose alors 50.

Madame Agnesi demande alors si f a aussi 50 comme ordre de grandeur. Un élève répond par l'affirmative, il explique que $1 \times 45 = 45$ donc l'ordre de grandeur est bien 50.

313. Première difficulté avec l'ordre de grandeur

L'enseignante demande à l'élève au tableau quel est l'ordre de grandeur de b . L'élève répond $1\,000 \times 1$. L'enseignante répète en expliquant que 0,4 c'est moins que 1 mais que c'est un peu le même ordre de grandeur. Puis elle conclut, comme l'élève, que l'ordre de grandeur de b est 1 000.

Madame Agnesi revient sur sa décision, elle trouve que finalement 1 000 c'est un peu beaucoup et elle se justifie : 0,4 c'est quand même pas 1. Un élève propose plutôt 0,5 ; l'enseignante demande alors de situer 0,5 par rapport à 1. Les élèves répondent que c'est la moitié. L'enseignante dit alors qu'au lieu de 1 000, on va plutôt dire... elle laisse les élèves compléter, ils proposent 500. L'enseignante accepte 500.

314. Deuxième difficulté avec l'ordre de grandeur

Madame Agnesi demande à l'élève au tableau de dire à quel produit b est-il égal. L'élève répond que b est égal à c . L'enseignante demande un ordre de grandeur de c , elle demande ensuite un ordre de grandeur de 0,123. De nombreux élèves proposent zéro. L'enseignante rejette la proposition, justifiant qu'en multipliant par zéro, on obtiendra toujours zéro. Elle propose alors 0,1. L'élève au tableau trouve que 0,1 n'est pas très loin de zéro. L'enseignante reconnaît la proximité mais demande à ce qu'on prenne tout de même 0,1 pour 0,123.

Pour 456, les élèves proposent 400 ou 500. Madame Agnesi choisit de prendre 500 et demande l'ordre de grandeur de c . L'élève au tableau propose de dire que 0,1 c'est un dixième mais ne sait pas poursuivre son raisonnement. L'enseignante demande aux autres élèves de la classe.

Un élève prend la parole pour dire que 0,1 c'est 10% et que le résultat fera environ 100 ou 200.

Madame Agnesi ne contredit pas mais écrit au tableau : $500 \times 0,1$. Plusieurs élèves proposent alors 50 comme résultat. L'enseignante montre la méthode, on effectue l'opération sans tenir compte de la virgule, on obtient 500 puis on compte un chiffre après la virgule et l'on obtient 50,0 c'est-à-dire 50. L'enseignante demande alors quel est l'ordre de grandeur de c . Des élèves répondent 50. Ce qui permet à l'enseignante de réfuter l'égalité $b = c$ proposée par l'élève au tableau.

315. Retour à la méthode du nombre de décimales

Madame Agnesi demande aux élèves quel est le dernier chiffre de c . Des élèves répondent 8, l'enseignante explique : $6 \times 3 = 18$ donc le dernier chiffre de c sera 8.

Puis l'enseignante demande à l'élève au tableau de déterminer le nombre de chiffres après la virgule du nombre c . L'élève répond 3. L'enseignante ajoute 3 comme a , comme f et demande à l'élève de conclure. L'élève répond que c est égal à f et est égal à a . L'enseignante rajoute " $= c$ " à l'égalité $a = f$.

Madame Agnesi conclut qu'il y a trois nombres qui sont égaux.

316. Un problème avec le nombre de décimales

L'enseignante demande à passer au produit b tout en signalant une difficulté : il n'y a pas 123 mais il y a le zéro. L'élève au tableau compte le nombre de décimales, elle en trouve 3 puis en annonce 4 à cause du zéro. L'enseignante n'est pas d'accord et demande à d'autres élèves ce qu'ils ont trouvé.

Un élève affirme que b est comme c et a . Madame Agnesi demande des explications, il se reprend et annonce que b est égal à d et à e (sans doute le lui a-t-on soufflé) mais ne sait pas le justifier.

317. Retour aux ordres de grandeur

Madame Agnesi rappelle que l'ordre de grandeur de b est 500. Elle demande l'ordre de grandeur de d . Des élèves répondent $10 \times 50 = 500$. L'enseignante conclut que b et d sont égaux.

Madame Agnesi revient au nombre de chiffres après la virgule du produit b , les élèves en comptent trois. Elle demande alors pourquoi b n'est pas égal à a . Elle répond elle-même que c'est à cause du zéro qui est le dernier chiffre du produit des entiers.

L'enseignante demande alors l'ordre de grandeur de e . Les élèves répondent 500. Et l'enseignante écrit au tableau : $b = d = e$.

Elle demande enfin de lever la main à ceux qui ont trouvé le même résultat. Environ 50% des élèves lèvent la main. On pourrait douter de la méthode utilisée par les élèves, c'est ce que l'enseignante signale en disant que parmi ceux qui lèvent la main, il y en a certainement quelques uns qui ont utilisé la calculatrice contrairement à ce qui était demandé. Il fallait utiliser l'ordre de grandeur ou le nombre de chiffres après la virgule. Puis elle ajoute qu'il faut se méfier du nombre de chiffres après la virgule.

32. Comment contrôler un résultat sans calculatrice : institutionnalisation

Madame Agnesi demande de prendre le cahier de leçon ce qui soulève l'enthousiasme de la classe.

321. Contrôler un résultat

L'enseignante dit ce qu'elle écrit au tableau.

IV. Comment contrôler un résultat (sans calculatrice)

L'enseignante précise ce que veut dire le titre. Par exemple, au supermarché, un prix annoncé peut être contrôlé pour dire à la caissière qu'il y a une erreur.

322. Première méthode

L'enseignante dit ce qu'elle écrit au tableau.

1) Penser à chercher un ordre de grandeur

Elle précise les limites de ce contrôle : on peut avoir le bon ordre de grandeur mais s'être trompé à l'opération.

L'enseignante évoque les difficultés que pose le zéro final d'un produit.

323. Attention aux zéros qu'on supprime

L'enseignante dit ce qu'elle écrit au tableau.

2) Certains zéros sont inutiles et peuvent être supprimés

Exemple ²⁷ $8,25 \times 1,2$

L'enseignante rappelle les erreurs que l'on peut commettre en comptant les décimales, par exemple quand un zéro final peut être supprimé. L'enseignante demande de poser et d'effectuer l'opération, elle envoie au tableau un élève pour l'effectuer.

L'élève effectue la multiplication et obtient 9,900. L'enseignante précise que sur l'opération en ligne, on écrira seulement 9,9.

Madame Agnesi commente l'exemple. Imaginons qu'on demande à un élève de dire si l'opération $8,25 \times 1,2 = 9,9$ est juste, si l'élève compte trois chiffres après la virgule dans les facteurs, il peut penser que l'opération est fautive en ne trouvant qu'un seul chiffre après la virgule au produit.

324. Attention aux zéros qui décalent les produits partiels

L'enseignante dit ce qu'elle écrit au tableau.

3) Attention aux zéros

L'enseignante indique qu'elle pense aux zéros qui posent des problèmes quand on doit décaler. Elle demande d'effectuer $124 \times 10,5$ et envoie un élève au tableau pour la poser et l'effectuer au tableau.

La classe est assez agitée, Madame Agnesi passe dans les rangs et voit de nombreuses erreurs (décalage incorrect, zéro rajouté à la fin...). Puis elle demande à l'élève qui a effectué la multiplication au tableau de justifier les deux "points" (décalage des dixièmes aux dizaines). Il répond qu'il veut éviter une ligne de zéros.

L'élève au tableau obtient finalement 13020. L'enseignante lui demande d'écrire l'opération en ligne : $124 \times 10,5 = 1302$. Elle fait remarquer à nouveau qu'il n'y a pas de décimales dans le produit alors qu'il y en a un dans les facteurs. Puis propose quelques exemples.

33. Quelques exemples d'application

L'enseignante dit ce qu'elle écrit au tableau.

4) Exemples ²⁸

²⁷ Exemple créé par le professeur.

²⁸ Exemples créés par le professeur.

a) Place la virgule dans le nombre en couleur (ici en gras)

$$3,6 \times 281 = 10,116$$

$$25 \times 2,916 = 729$$

$$42 \times 0,15 = 0,63$$

$$125 \times 5,2 = 6,5$$

331. Recherche des élèves

Madame Agnesi circule dans les rangs et apporte quelques précisions : on peut ajouter des zéros, il vaut mieux travailler au crayon à papier, on peut penser à l'ordre de grandeur...

L'enseignante laisse les élèves chercher, la classe s'agite mais Madame Agnesi laisse encore les élèves chercher.

332. Correction de la première égalité

Elle envoie une élève au tableau. Elle ne sait pas expliquer pourquoi mais elle écrit 2,81. L'enseignante propose de déterminer l'ordre de grandeur : $3 \times 3 = 9$, le produit est 10 donc l'ordre de grandeur est bon.

333. Correction de la deuxième égalité

Egalité suivante. L'enseignante dit 25. L'élève continue par une approximation, $25 \times 3 = 75$ donc la virgule est placée après le 2 : 72,9.

Madame Agnesi fait remarquer qu'il y a trois chiffres après la virgule dans les facteurs mais seulement un chiffre après la virgule dans le produit. Des élèves expliquent en chœur : c'est parce qu'il y a un zéro...

L'enseignante rectifie, il n'y a pas un zéro mais deux zéros. Quand on effectue la multiplication, on obtient 72 900 avant de placer la virgule et c'est 72,900 qu'on écrit 72,9.

334. Correction de la troisième et de la quatrième égalité

La troisième égalité est corrigée correctement par l'élève au tableau. L'enseignante justifie : elle indique 4,2 et dit 5, elle indique 0,15 et un élève dit 0,1.

La quatrième égalité est corrigée par l'élève sans explication.

Madame Agnesi félicite l'élève et demande aux élèves qui n'ont pas compris de corriger sur leur cahier et d'appeler pour avoir des explications complémentaires. La classe est très agitée.

335. Le temps des questions

Dès qu'un élève pose une question, Madame Agnesi demande le calme car la question peut intéresser tout le monde. L'enseignante reprend l'explication pour $25 \times 2,916 = 72,9$.

Puis un autre élève demande des explications sur l'égalité $4,2 \times 0,15 = 0,63$. Il ne comprend pas pourquoi on écrit 4,2 qui est plus grand que le résultat de la multiplication. L'enseignante souligne la contradiction ressentie par cet élève. Un autre élève propose une explication : on a multiplié par un nombre qui est plus petit que 1. L'enseignante complète par un autre exemple $8 \times 0,5 = 4$.

Un autre élève ne comprend pas pourquoi il y a trois décimales aux facteurs et seulement deux au produit. Madame Agnesi pose l'opération. Elle explique la méthode : on multiplie sans tenir compte des virgules, c'est-à-dire qu'on multiplie 42 par 15 ce qui donne 630. On compte trois chiffres après la virgule donc on est obligé d'écrire un zéro 0,630.

39. La sonnerie interrompt les nombreuses questions des élèves

La sonnerie retentit, l'enseignante demande de noter le travail pour la séance suivante : un exercice de géométrie.

4. Déroulement de la séance n°4 (25 min)

Dans la première partie de la séance, le thème de la multiplication des décimaux est clos. La deuxième partie est consacrée à la géométrie.

Madame Agnesi rappelle qu'il n'y avait pas d'exercice de calcul pour cette séance, les élèves sont invités à prendre leur cahier de cours pour continuer la leçon.

41. Déterminer le produit de deux décimaux connaissant le produit des facteurs entiers associés

L'enseignante indique qu'elle va proposer d'autres exemples. Elle dit et commente en écrivant au tableau ²⁹ :

$$5) \text{ On donne } 386 \times 205 = 79\ 130$$

$$\text{Trouver } 3,86 \times 2,05 =$$

$$2,05 \times 386 =$$

$$2,05 \times 3\ 860 =$$

411. Quelques précisions sur la consigne

Madame Agnesi précise que la première égalité peut être vérifiée, par exemple à la calculatrice. Elle précise, qu'en revanche, la calculatrice n'est pas autorisée pour répondre aux questions.

Un élève demande pourquoi cela n'est pas copié dans le cahier d'exercices, l'enseignante répond que de tels exercices ont déjà été faits en classe, il s'agit maintenant de résumer l'essentiel.

La classe est calme, les élèves cherchent. L'enseignante précise qu'on peut supprimer les zéros inutiles.

412. Correction

Une élève est interrogée pour donner le premier résultat. Elle dit 7,913. La réponse soulève quelques protestations mais l'enseignante coupe court, elle valide la réponse et explique le résultat : on compte quatre chiffres après la virgule ce qui donne 7,9130 mais on en n'écrit que trois car on supprime le dernier zéro.

²⁹ Exercices créés par le professeur.

Un autre élève donne la deuxième réponse : 791,3. L'enseignante procède de même : elle valide la réponse et l'explique. Elle justifie qu'il n'y ait pas le même nombre de chiffres après la virgule dans les facteurs et dans le produit.

Un troisième élève est interrogé, il propose : 791,3. Madame Agnesi fait remarquer qu'il donne la même réponse pour un calcul différent. Certains élèves disent que le zéro est inutile mais d'autres protestent. L'enseignante demande de rappeler la condition sous laquelle le zéro est inutile. Une élève répond que c'est quand il est après la virgule et l'enseignante précise, en dernière position après la virgule. Puis elle lit le nombre 3 860 avec ou sans zéro final : trois mille huit cent soixante, ce n'est pas pareil que trois cent quatre-vingt-six. L'enseignante demande aux élèves quel est le résultat.

41.3. La troisième multiplication

Un quatrième élève répond 7 913. Madame Agnesi lui demande des explications mais il n'en donne pas. Certains élèves prétendent qu'il l'a fait à la calculatrice mais l'enseignante le défend, il a peut-être seulement vérifié à la calculatrice. L'enseignante valide la réponse et demande à la classe une explication.

Une élève propose de déterminer l'ordre de grandeur. L'enseignante l'aide à poursuivre cette piste. L'élève dit $4000 \times 2 = 8000$. L'enseignante répète la réponse et demande une autre explication.

Un sixième élève explique que 386 a été multiplié par 10 pour faire 3 860. L'enseignante l'interrompt et reprend l'explication à haute voix, pour toute la classe. Le nombre 386 a été multiplié par 10 donc le produit 791,3 est multiplié par 10 lui aussi³⁰

Mais l'enseignante a entendu un élève dire qu'il fallait rajouter un zéro au résultat précédent. Elle indique comment il convient de multiplier par 10 en expliquant pourquoi le fait de rajouter un zéro, à la fin de la partie décimale, ne change pas le nombre décimal.

41.4. Qui a tout juste ?

Madame Agnesi demande qui a eu tout juste. Un tiers des élèves lève la main.

42. La multiplication par un nombre inférieur à un

L'enseignante propose d'écrire sur le cahier la remarque qu'un élève avait formulée à la séance précédente.

42.1. La multiplication n'agrandit pas toujours

6) Remarque

$$4,2 \times 0,15 = 0,63 \quad 31$$

Le résultat 0,63 est inférieur à 4,2 car 0,15 est inférieur à 1.

³⁰ L'enseignante se réfère au produit précédent et non au produit donné.

³¹ Exemple créé par le professeur.

L'enseignante rajoute : quand on multiplie un nombre, le résultat n'est pas forcément plus grand que ce nombre.

Puis Madame Agnesi circule dans les rangs pour contrôler ce qui est écrit sur les cahiers et précise que s'il persiste un petit doute sur des petites choses, bien qu'on soit en fin de leçon, on peut lever la main.

42.2. Une question

Un élève signale à l'enseignante une incompréhension sur la place de la virgule dans le produit.

L'enseignante lui demande s'il se souvient de sa leçon, l'élève répond par l'affirmative. L'enseignante retourne au tableau. Elle reprend alors l'exemple $3,86 \times 2,05 = 7,913$. Il y a quatre chiffres après la virgule dans les facteurs mais il n'y en a que trois décrits au produit car il y avait un zéro qui est inutile. L'enseignante demande si c'était bien la question posée.

43. Quelques cas particuliers : multiplications par 0,1, 0,01 ou 0,001

Madame Agnesi propose de passer à un nouveau paragraphe pour voir quelques cas particuliers

43.1. Multiplication par 0,1

L'enseignante dit en même temps qu'elle écrit.

V. *Comment multiplier par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc.*

$$12,3 \times 0,1 = 1,23 \quad 32$$

Un élève demande ce que signifie la lettre V avant le titre, l'enseignante lui rappelle que c'est un chiffre romain qui veut dire 5.

Une élève fait la remarque suivante : quand on multiplie par 0,1 c'est comme si on divisait par 10.

Un autre élève dit qu'on peut faire comme si c'était 1 et décaler ensuite la virgule d'un cran. Vers la droite ou vers la gauche, cette question soulève quelques discussions dans la classe qui s'agit et l'enseignante rappelle dans quel sens il convient de déplacer la virgule.

43.2. Multiplication par 0,01 et 0,001

Madame Agnesi propose deux autres multiplications.

$$14,35 \times 0,001 =$$

$$34,9 \times 0,01 =$$

L'enseignante laisse les élèves chercher en précisant que 0,1 est un cas particulier c'est-à-dire qu'il se conduit de la même manière que les autres. Puis l'enseignante précise que s'il y a besoin de rajouter des zéros, on peut le faire. Elle laisse encore du temps aux élèves puis interroge l'un d'entre eux.

³² Exemple créé par le professeur.

L'enseignante demande combien il y a de chiffre après la virgule. L'élève répond 5 et l'enseignante, au tableau, montre où doit se placer la virgule et écrit les deux zéros nécessaires.

Elle interroge un autre élève pour la dernière multiplication, il donne la bonne réponse.

433. Une question d'un élève

Madame Agnesi demande à la classe une règle qu'on pourrait dire pour résumer ce qui vient d'être fait mais un élève pose une question. Il ne comprend pas la deuxième multiplication.

L'enseignante explique qu'il multiplie par 1, il doit obtenir 1435, puis il doit compter les chiffres après la virgule, il y en aura 5 donc il doit compter 1, 2, 3, 4, 5 et là il faut rajouter un zéro puisqu'on ne dispose que de quatre chiffres puis un autre zéro pour écrire la virgule.

434. Une règle

Madame Agnesi interroge des élèves pour dire une règle, les élèves ne souhaitent pas répondre. Une élève se propose qui énonce (à nouveau) quand on multiplie par 0,1 cela revient à diviser par 10 et l'enseignante termine : c'est-à-dire qu'on recule la virgule d'un rang vers la gauche.

44. *Vocabulaire, commutativité et associativité de la multiplication*

L'enseignante demande comment s'appelle le résultat d'une multiplication. La classe est confuse mais un élève donne la réponse.

Madame Agnesi propose de noter du vocabulaire sur le cahier.

441. Produit, facteurs

En écrivant, elle demande comment s'appellent les nombres qu'on multiplie. Un élève répond.

VI. *Produit de plusieurs facteurs*³³

$$2 \times 17 \times 0,5$$

Après avoir écrit le premier produit, l'enseignante rappelle le vocabulaire, elle demande combien il y a de facteurs, les élèves en compte trois. L'enseignante prolonge la phrase.

$$2 \times 17 \times 0,5 \text{ est un produit de trois facteurs.}$$

Une élève ne comprend pas pourquoi l'enseignante dit que l'opération est un produit alors qu'elle n'a pas écrit le résultat. Rapidement l'enseignante dit que c'est comme ça qu'on écrit le nombre qu'on va trouver.

442. Une première méthode pour multiplier

Elle demande à la classe comment on calcule ce produit. Un élève répond qu'on commence par les deux premiers. Un autre élève propose d'écrire des parenthèses.

³³ Exemples créés par le professeur.

Madame Agnesi les félicite et demande combien ils trouvent. Ils répondent $34 \times 0,5$ ce qui fait 17. L'enseignante écrit le résultat :

$$(2 \times 17) \times 0,5 = 17$$

443. Une autre méthode

Madame Agnesi demande une autre méthode plus astucieuse pour effectuer ce calcul. Un élève propose de calculer 2×17 puis de diviser par 2. L'enseignante répète à haute voix. Elle dit à l'élève que c'est possible.

Un autre élève propose de changer l'ordre. L'enseignante écrit pendant que l'élève dit :

$$(2 \times 0,5) \times 17 = 1 \times 17 = 17$$

L'enseignante montre ce qui est astucieux, on a effectué des calculs plus faciles.

Un élève pose une question parce qu'il n'arrive pas à comprendre pourquoi l'enseignante a écrit $34 \times 0,5 = 17$. Elle lui propose de la poser. Des élèves expliquent que 0,5 c'est un demi et qu'il faut diviser par 2.

444. Commutativité et associativité de la multiplication

L'enseignante propose de dire ce qui a été fait. On a changé l'ordre... Elle s'interrompt pour laisser les élèves terminer la phrase.

Un élève dit qu'on a changé l'ordre de grandeur. L'enseignante répond par la négative.

Un autre élève corrige. L'enseignante propose d'écrire une phrase.

Dans le calcul d'un produit, l'ordre des facteurs peut changer

Elle précise qu'on trouvera le même résultat et qu'il convient de changer l'ordre pour simplifier les calculs.

45. *Limites de la calculatrice pour le calcul d'un produit*

Madame Agnesi dit qu'il reste une dernière chose à écrire.

451. Un produit à la calculatrice

Elle dit en écrivant

V7 *Calculatrice : attention danger*

L'enseignante rappelle que les calculatrices qui ne sont pas scientifiques posent des problèmes mais elle rajoute, à l'étonnement des élèves, que les calculatrices scientifiques aussi.

L'enseignante demande de sortir la calculatrice et écrit au tableau pendant que les élèves prennent leur matériel.

Avec une calculatrice, trouver

$$1,279 \ 283 \times 3,942 \ 671 =$$

Madame Agnesi précise qu'il est possible que tous les élèves ne trouvent pas la même réponse. Puis elle demande de lui dicter les chiffres un par un.

Elle interroge un élève qui donne une réponse qu'elle écrit au tableau :

C_n obtient 5,0439071

L'enseignante demande si tous les élèves ont obtenu ce résultat avec leur calculatrice. C'est le cas.

452. Critique du résultat

Madame Agnesi demande si on peut être certain de ce résultat. Les élèves répondent par l'affirmative. L'enseignante renchérit.

L'enseignante propose une petite remarque : regardons quel est le dernier chiffre.

Un élève répond que le dernier chiffre devrait être 3. L'enseignante demande des explications. Un élève dit que la calculatrice n'a pas assez de chiffres.

L'enseignante précise que le résultat est beaucoup trop long et elle écrit :

Ce résultat n'est pas exact car le dernier chiffre doit être 3.

L'enseignante précise que le résultat proposé par la calculatrice n'est pas non plus complètement faux, il est seulement arrondi.

46. Fin de la séance

Madame Agnesi termine la séance. Elle demande aux élèves de terminer de recopier puis de ranger leurs cahiers pour un petit contrôle de géométrie.

3. Narration de la séquence de Monsieur Bombelli

1. Déroulement de la séance n°1 (25 min)

Durant la première séance, Monsieur Bombelli corrige un exercice de géométrie durant 25 minutes puis commence un nouveau chapitre : la multiplication des décimaux.

11. Activité préparatoire sur la multiplication des décimaux : comparaison de la méthode des opérateurs et de la règle de la virgule (constatations)

Monsieur Bombelli demande que les élèves sortent leur cahier de cours. Il rappelle qu'une activité de révision a déjà été faite pour donner du sens à des calculs ³⁴.

111. Préparation du cahier de cours

La classe est agitée. L'enseignant reprend de nombreuses fois les élèves qui bavardent et qui répondent. Il menace d'une punition (pages de copie). L'enseignant indique qu'on commence le chapitre 5, il suit les chapitres du manuel ³⁵.

Monsieur Bombelli écrit au tableau sans dire oralement tout ce qu'il écrit. Il précise que c'est un chapitre très court, qui ne contient pas grand chose de nouveau, qui ne prendra pas beaucoup de temps et que le contrôle sur ce chapitre est à prévoir d'ici à une semaine ³⁶.

L'enseignant insiste sur la disposition des titres, parties et sous-parties. Il indique que, conformément à son habitude, il commence par une activité préparatoire. Il écrit :

Chapitre 5

Multiplication des décimaux

I. Activité préparatoire

Activité 4 p. 59

Monsieur Bombelli précise que le mot activité est écrit au singulier car il ne traitera qu'une activité, la seule qui présente un certain intérêt, comme les élèves pourront le remarquer en faisant les autres à la maison, s'ils le souhaitent.

³⁴ Activité n°1 p. 58 du manuel *Cinq sur Cinq* Ge (1997), Paris : Hachette.

³⁵ Dans cette activité une situation d'édition d'un journal scolaire est décrite qui porte sur des nombres entiers. Les questions portent sur la signification de certains calculs : coût du papier, coût total (frais de photocopie + coût du papier), nombre d'exemplaires vendus, recette, bénéfice.

³⁶ Manuel *Cinq sur Cinq* Ge (1997), Paris : Hachette.

³⁶ Une semaine correspond à trois heures de cours, l'enseignant envisage donc deux autres séances sur la multiplication des décimaux.

Voici l'activité :

4. COMMENT MULTIPLIER DEUX DECIMAUX ?

Pour effectuer le produit ($12,75 \times 6,7$), Léa et Alix proposent les deux méthodes suivantes :

Léa	Alix
$\begin{array}{r} 12,75 \\ \times 6,7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 12,75 \\ \times 100 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 100 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 1000 \\ \hline \end{array}$

Terminer les calculs de Léa. Trouve-t-elle le même résultat qu'Alix ? Pourquoi ?

112. Lecture de l'énoncé

L'enseignant invite à lire l'énoncé de l'activité, il interroge un élève qui lit le titre et la première phrase de l'énoncé.

L'enseignant coupe l'élève après " méthodes suivantes " et prend la parole.

113. Commentaire de l'activité de Léa par le professeur

Monsieur Bombelli commente ³⁷ :

Donc Léa, vous avez un schéma qui vous dit comment elle fait. Donc elle multiplie par 100 en haut, elle multiplie par 10 en bas, donc les deux termes du produit, l'un par 100 l'autre par 10. Donc après, bilan des courses, elle obtient des nombres qui sont entiers. Elle les multiplie, elle obtient un résultat et le résultat elle le divise par 100, par 1000 et elle dit que c'est le résultat de l'opération. Vous voyez un peu ce qu'elle fait ? Elle multiplie par 10, elle multiplie par 100 celui du haut, elle multiplie par 10 celui du bas, elle fait l'opération, et le résultat, elle le divise par 1000 et elle dit que c'est le résultat de l'opération. C'est Léa, elle fait comme ça. D'accord ? Bon !

114. Lecture de l'activité d'Alix par un élève

Le professeur interroge un élève pour qu'il lise la méthode d'Alix. Il ponctue chaque paragraphe par un " oui " approbateur.

115. Parenthèse de l'enseignant

Le professeur indique que le titre du chapitre est " Multiplier des décimaux " et que celui de l'activité est " comment multiplier deux décimaux " donc qu'on est dans le vif du sujet : on se demande ici comme faire pour multiplier deux décimaux.

³⁷ Le paragraphe qui suit est une intervention longue du professeur, ses propos sont transcrits intégralement.

116. Calculs

L'enseignant lit la consigne. Il précise qu'il faut faire ce qui est demandé, c'est écrit " terminer les calculs ", il faut le faire.

Pendant que les élèves font leurs calculs Monsieur Bombelli recopie le livre au tableau. Un élève demande s'il faut en faire autant. L'enseignant répond par l'affirmative et justifie pédagogiquement sa demande : cela permettra de mieux retenir ce que Léa a fait. Puis il envoie un élève effectuer les calculs.

L'enseignant précise qu'il faut commencer par la colonne de droite parce qu'a priori, on ne sait pas faire la colonne de gauche. L'élève au tableau obtient :

$$\begin{array}{r} 12,75 \\ \times 6,7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 67 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1275 \\ \times 1000 \\ \hline \end{array}$$

117. Une question de décalage, pas de réponse

Un élève appelle l'enseignant et pose une question. Il ne comprend pas pourquoi, sous la ligne déjà remplie (premier produit partiel), il y a deux zéros. Le professeur n'explique rien, il se contente de lire un à un les chiffres : 7, 6, 5, 0, 0. En ajoutant que l'élève a fait la multiplication.

Monsieur Bombelli invite l'élève au tableau à répondre aux questions posées au vu des résultats obtenus.

118. Comparaison des deux méthodes

L'élève répond que oui, Léa trouve le même résultat qu'Alix. Le professeur demande de noter cette réponse par une phrase sous le calcul. L'élève écrit :

Oui, elle trouve la même chose.

L'enseignant conclut : on se dit, comme ils trouvent le même résultat, que les deux méthodes vont être bonnes. Il ajoute que ce résultat sera justifié plus tard.

19. Du travail à la maison

Monsieur Bombelli demande de sortir le cahier de textes et de noter l'exercice à chercher pour la fois suivante ³⁸ :

Problèmes et démarches

Voici quatre problèmes suivis de quatre démarches. Il s'agit d'associer à chaque problème la bonne démarche et de répondre à la question posée.

① Un libraire vend 250 cahiers à 6,50 F pièce et 25 classeurs à 12,50 F chacun. Quel est le montant de la vente ?

³⁸ Exercice n° D p. 65, du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

② Nicole voit, en vitrine, une nappe à 250 F. Elle décide de faire la même nappe en achetant 6,50 m de tissu à 25 F le mètre et 12,50 F de fournitures. Combien a-t-elle économisé ?

③ Thomas se fait livrer 250 ceufs. Il constate que 6 douzaines sont cassées, mais que 25 ceufs sont récupérables. Combien lui en reste-t-il ?

④ Fred a 250 F. Il achète 6 cassettes à 12,50 F pièce et une boîte de rangement à 25 F. Combien lui reste-t-il ?

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & 6 \times 12,50 = T & T + 25 = U \\ \text{b.} & 6,50 \times 250 = P & 12,50 \times 25 = Q \\ \text{c.} & 6 \times 12 = X & X - 25 = Y \\ \text{d.} & 6,50 \times 25 = R & R + 12,50 = S \end{array} \quad \begin{array}{l} 250 - U = \dots \\ Q + P = \dots \\ 250 - Y = \dots \\ 250 - S = \dots \end{array}$$

2. Déroulement de la séance n°2

21. Associer des opérations à une démarche en référence à une situation

Les élèves sont invités à sortir leur cahier, Monsieur Bombelli vérifie longuement, carnet de note à la main, les cahiers des élèves. La classe est bruyante, l'enseignant menace de punitions.

211. Premier problème

Le professeur se rend au tableau et interroge un élève qui doit le rejoindre au tableau avec son cahier. Il est invité à donner sa réponse. L'élève propose la solution b.

L'enseignant approuve, demande à l'élève de recopier sa réponse au tableau et aux autres de noter la correction. L'enseignant circule dans les rangs pour vérifier que les élèves prennent la correction. Les élèves copient en bavardant assez bruyamment.

Au tableau, l'élève écrit :

$$1) \quad 6,50 \times 250 = P ; 12,50 \times 25 = Q ; Q + P = 1\ 937,50$$

Monsieur Bombelli demande de justifier les calculs intermédiaires, l'élève écrit sous la dictée :

$$6,50 \times 250 = 1\ 625 ; 12,50 \times 25 = 312,50$$

$$Q + P = 1\ 625 + 312,50 = 1\ 937,50$$

L'enseignant demande une conclusion rédigée. L'élève écrit sous la dictée :

Conclusion : Le montant de la vente est 1 937,50 F.

L'enseignant renvoie l'élève à sa place et en interroge un autre pour le deuxième problème.

212. Deuxième problème

Une élève est interrogée, elle donne sa réponse : d. L'enseignant lui demande de faire au tableau comme l'élève précédent. Elle copie :

$$2) \quad 6,50 \times 25 = R ; R + 12,50 = S ; 250 - S = 107,50.$$

Monsieur Bombelli demande de justifier, l'élève dit $250 - 142,50 = 107,50$ ³⁹.

Compte tenu de l'agitation de la classe (certains ont peut-être remarqué la faute au tableau mais personne ne le manifeste) et du temps passé pour copier, l'enseignant demande d'écrire directement la conclusion. L'élève écrit :

Conclusion : elle a économisé 107,50 F.

L'enseignant renvoie l'élève à sa place et en interroge un autre pour le troisième problème.

213. Troisième problème

L'élève interrogé donne sa réponse : c. Même scénario : l'enseignant demande à l'élève de faire au tableau comme l'élève précédent. L'élève copie :

$$3) \quad 6 \times 12 = X ; X - 25 = Y ; 250 - Y = 203.$$

Conclusion : il lui reste 203 ceufs.

L'enseignant renvoie l'élève à sa place et en interroge un autre pour le quatrième problème. Les élèves sont toujours très agités, quelques cahiers de correspondances ont été ramassés et quelques punitions distribuées.

214. Quatrième problème

Même scénario. Monsieur Bombelli interroge un élève, il lui demande de faire au tableau comme l'élève précédent. L'élève copie :

$$4) \quad 6 \times 12,50 = T ; T + 25 = U ; 250 - U = 150$$

Conclusion : il lui reste 105F.

L'enseignant renvoie l'élève à sa place. Il retourne vers le tableau pour passer à la suite mais un élève l'interrompt et signale une erreur au deuxième problème.

215. Correction de l'erreur au deuxième problème

L'élève dit qu'il n'a pas trouvé 107,50 mais 75. D'autres élèves confirment ces résultats. Dans un brouhaha important l'enseignant effectue les calculs, il constate l'erreur et demande aux élèves de corriger leur correction en recopiant ce qu'il écrit au tableau :

$$6,50 \times 25 = \underbrace{162,50}_R ; 162,50 + 12,5 = \underbrace{175}_S$$

$$250 - 175 = 75$$

Conclusion : elle a économisé 75 F.

Puis Monsieur Bombelli demande aux élèves de sortir le cahier de cours pour terminer l'activité préparatoire commencée lors de la séance précédente.

³⁹ En fait la réponse de l'élève est juste pour le choix de la méthode mais fautive pour les calculs. Il est vraisemblable que l'élève a multiplié 6,50 par 20 plutôt que par 25. Ainsi elle trouve 130 pour R, 142,50 pour S et bien 107,50 pour résultat.

22. Activité préparatoire sur la multiplication des décimaux : comparaison de la méthode des opérateurs et de la règle de la virgule (constatations)

Monsieur Bombelli rappelle les deux méthodes de Léa et d'Alix. Il note au tableau la réponse qui avait été donnée lors de la séance précédente :

Cur, elle trouve la même chose.

221. La multiplication des décimaux avec les opérateurs

L'enseignant demande alors de répondre à la deuxième partie de la question : "Pourquoi ?". Un élève répond que c'est la même chose qui a été fait mais que Léa et Alix le disent différemment.

L'enseignant demande aux élèves de noter sur le cahier de cours la réponse à cette question, la classe est assez agitée, l'enseignant écrit sans dire tout ce qu'il écrit à haute voix :

Parce que l'on a procédé aux mêmes manipulations dans les deux cas.

222. Analyse plus approfondie de la méthode

Monsieur Bombelli demande plus d'explication aux élèves, il demande pourquoi ces deux manipulations donnent bien le même résultat. Aucun élève ne répond, la classe est toujours agitée, les remarques de discipline, les menaces de punitions sont fréquentes.

L'enseignant explique que les deux multiplications par 100 et par 10 reviennent à une multiplication par 1 000 du produit. Ces deux multiplications servent à obtenir une multiplication de deux entiers, c'est-à-dire une multiplication que l'on sait effectuer. Il faut donc diviser par 1 000 ce produit pour trouver le résultat.

Monsieur Bombelli dit de noter cette remarque sur le cahier. Il écrit au tableau ce que les élèves doivent recopier :

Remarque : par ailleurs, on vérifie que le résultat des manipulations est bien le produit des deux décimaux de départ.

En effet, en multipliant le premier terme par 100 et le deuxième par 10, puis en faisant le produit, on obtient le produit des deux nombres initiaux multipliés par 10×100 donc par 1 000.

En divisant le tout par 1 000, on retombe sur le produit des deux nombres initiaux.

La classe est très agitée durant la copie. L'enseignant s'interrompt fréquemment. Il punit quelques élèves.

23. Application à trois multiplications de décimaux

Monsieur Bombelli demande aux élèves de sortir leur cahier d'exercices pour effectuer les multiplications qui suivent l'activité dans le manuel ⁴⁰ :

Calculer les produits : $7,49 \times 3,25$; $68 \times 4,03$; $30,5 \times 70,02$.

Vérifier les résultats avec la calculatrice

Pendant que les élèves préparent leur matériel, l'enseignant circule dans la classe, fait quelques remarques concernant la discipline et désigne un élève pour effectuer la première multiplication au tableau.

231. Une première multiplication qui ne pose pas de difficulté

L'élève pose et calcule sans difficulté la multiplication demandée :

$$\begin{array}{r} 7,49 \\ \times 3,25 \\ \hline 3745 \\ 14980 \\ 224700 \\ \hline 24,3425 \end{array}$$

L'enseignant remercie l'élève. Un autre demande à faire la deuxième, l'enseignant accepte.

232. Un problème de disposition dans la deuxième multiplication

L'élève commence à poser l'opération :

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 4,03 \\ \hline \end{array}$$

Cette disposition soulève quelques contestations de la part de certains élèves. Les avis ne sont pas exprimés publiquement mais, à haute voix, certains disent qu'il faut aligner les chiffres d'autres prétendent que c'est faux dans une multiplication, d'autres encore disent que ce n'est pas grave dans une multiplication.

Monsieur Bombelli perçoit la polémique, il explique que l'alignement des chiffres est indispensable pour une addition ou pour une soustraction mais qu'il n'a pas d'importance pour une multiplication. Au tableau, il renchérit : "en toute logique, comme on est amené à oublier la virgule, on disposera les multiplications en plaçant les chiffres les uns sous les autres mais sans tenir compte de la virgule" et il montre la disposition préconisée au tableau à côté de celle de l'élève :

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 4,03 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68 \\ \times 4,03 \\ \hline \end{array}$$

⁴⁰ Question n°2 de l'activité n°4 p. 59 du manuel *Cinq sur Cinq 6e* (1997), Paris : Hachette.

233. Un problème de décalage évité

Puis l'élève au tableau calcule le deuxième produit :

$$\begin{array}{r} 6 \ 8 \\ \times 4, 0 \ 3 \\ \hline 2 \ 0 \ 4 \\ 2 \ 7 \ 2 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ 7 \ 4, 0 \ 4 \end{array}$$

L'élève au tableau n'a pas écrit de ligne de zéros, cela gêne certains élèves qui ne le disent pas publiquement.

Monsieur Bombelli félicite l'élève au tableau et lui demande de calculer la dernière multiplication. Les autres élèves sont invités à corriger leurs erreurs éventuelles. La classe est assez agitée, l'enseignant fait quelques remarques.

234. "Pas de problème" avec la troisième multiplication

L'élève au tableau effectue l'opération :

$$\begin{array}{r} 3 \ 0, \ 5 \\ \times 7 \ 0, \ 0 \ 2 \\ \hline 6 \ 1 \ 0 \\ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 2 \ 1 \ 3 \ 5, \ 6 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Les deux lignes de zéros que certains élèves écrivent sur leur cahier et qu'ils ne retrouvent pas au tableau provoquent quelque agitation supplémentaire.

L'enseignant demande de ne pas recopier les opérations sur le cahier de cours mais seulement un bilan.

235. Une contradiction avec "la règle de la virgule"

Monsieur Bombelli demande aux élèves de copier ce qu'il écrit au tableau :

2. Petite synthèse des résultats

$$7,49 \times 3,25 = 24,3425$$

$$68 \times 4,03 = 274,04$$

$$30,5 \times 70,02 = 2\ 135,61$$

La soumission retentit mais l'enseignant prend le temps de faire remarquer que dans cette synthèse, à la troisième ligne il y a au total trois chiffres après la virgule dans les facteurs et qu'il n'y en a que deux dans le résultat car il n'a pas écrit le zéro final.

29. Trois exercices pour la séance suivante

Monsieur Bombelli demande aux élèves de noter le travail (trois exercices) pour la séance prochaine ⁴¹ :

Premier exercice (activité préparatoire du manuel)

Retrouver et corriger les erreurs commises dans les calculs

$$\begin{array}{r} 3,8 \ 5 \\ \times 2 \ 0,6 \\ \hline 2 \ 3 \ 1 \ 0 \\ 6 \ 7 \ 0 \ 0 \\ \hline 9,0 \ 1 \ 0 \end{array} \qquad 13,4 \times 0,2 = 26,8$$

$$\begin{array}{r} 0,1 \ 8 \\ \times 4 \ 5 \ 0 \\ \hline 9 \ 0 \\ 7 \ 2 \\ \hline 8,1 \ 0 \end{array}$$

Deuxième exercice

Trouver la règle

Une même règle permet de passer d'un nombre au suivant. Trouver la règle et compléter :

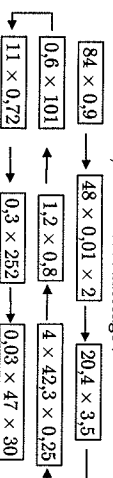
- a) 1,5 ; 4,5 ; 13,5 ; 40,5 ; ... ; ... ; ...
b) ... ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; ... ; ...

Troisième exercice

Le message secret

Code	A	C	E	S	T	X
Secret	7,92	75,6	0,96	71,4	42,3	60,6

A l'aide de ce code, retrouver le message :



3. Déroulement de la séance n°3

Les élèves sont très bruyants, Monsieur Bombelli leur demande de se lever et de le regarder, de croiser son regard, en silence.

L'enseignant commence la séance par la correction des deux exercices, il corrigera ensuite l'activité

31. Correction du travail à la maison (1^{er} exercice)

L'enseignant annonce que l'exercice était facile, qu'il ne veut pas y consacrer beaucoup de temps donc qu'il le corrigera lui-même au tableau. Protestations de quelques élèves, menaces de punition.

31.1. Parenthèse sur les tests de performance

Monsieur Bombelli signale, pour l'information, que ce genre de petits exercices est la base de tests de quotient intellectuel pour l'armée, ou autre. Il rajoute qu'on va pouvoir tester si le QI d'un élève est ici de 0, de 1 ou de 2.

⁴¹ Question 3 de l'activité n°4 p. 59, exercices n°11 p. 62 et n°15 p. 63 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

Les élèves s'approprient à poser des questions mais l'enseignant coupe court : on ne perd pas de temps, prenez vos cahiers d'exercices...

312. Première question

L'enseignant demande aux élèves de noter ce qu'il écrit au tableau :

Exercice n°11 p. 62

a)

Il interroge une élève, lui demande quelle est la règle, elle répond "fois trois". Monsieur Bombelli reprend, multiplie par trois, et il écrit au tableau les nombres sous la dictée de l'élève :

a) multiplier par 3

1,5 ; 4,5 ; 13,5 ; 40,5 ; 121,5 ; 364,5 ; 1093,5

L'enseignant précise que les nombres sont faciles à trouver une fois que la règle est devinée puis il interroge une autre élève.

313. Deuxième question

L'élève dit que la règle est "en divisant par 2". Un autre élève prend la parole pour dire que c'est aussi "multiplier par 0,5". L'enseignant félicite cet élève et écrit les nombres en interrogeant des élèves au tableau :

b) diviser par 2 ou multiplier par 0,5

8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125

314. Retour aux tests de performance

Monsieur Bombelli conclut que c'était facile et donc que le jour où on leur posera ce genre de question à un test de QI, les élèves auront déjà 2 à leur test. Les élèves sont amusés, ils demandent des informations sur le temps laissé aux candidats. L'enseignant répond qu'on laisse suffisamment de temps pour répondre et propose de passer à l'exercice suivant.

32. Correction du travail à la maison (deuxième exercice)

L'enseignant présente l'exercice comme étant facile à faire à la maison car personne n'est là pour savoir si l'élève utilise la calculatrice. Il rajoute que le message codé était facile à trouver car le livre a une version un peu naïve des messages codés.

321. Un élève donne le message

Monsieur Bombelli demande à un élève de dire le message qu'il a trouvé, l'élève répond : "c'est exact". L'enseignant rajoute que, compte tenu du message, il y a des chances que cette réponse soit la bonne.

L'enseignant demande le silence et note au tableau :

Exercice n°15 p. 63

On obtient

C E S T E X A C T (...)

L'enseignant rajoute un petit commentaire entre parenthèse au tableau, les élèves demandent la signification du point d'exclamation, il dit que c'est à cause de l'humour du livre qu'on fait un petit... il ne termine pas sa phrase. Certains élèves rient doucement.

322. Un problème d'apostrophe

Un élève reprend l'enseignant qui n'a pas mis d'apostrophe après le C. L'enseignant explique qu'il n'y a pas d'apostrophe dans le message, c'est la lecture qu'on en fait qui a une apostrophe.

Monsieur Bombelli demande de sortir le cahier de cours. La classe s'agit, l'enseignant menace les élèves d'être... "Sanctionnés" rajoutent des élèves. L'enseignant les félicite, à défaut d'appliquer la règle, ils l'ont comprise !

33. Correction du travail à la maison (activité préparatoire)

L'enseignant demande le silence total. Les élèves sont toujours assez bavards.

331. Première opération : une erreur de décalage

L'enseignant signale que la faute était dans le décalage, il y avait trois zéros. L'enseignant écrit au tableau.

$$\begin{array}{r} 3, 8 5 \\ \times 2 0, 6 \\ \hline 2 3 1 0 \\ 7 7 0 0 0 \\ \hline 7 9, 3 1 0 \end{array}$$

Il commente l'opération en l'effectuant : on commence par oublier les virgules puis on fait un décalage correspondant au nombre de chiffres après la virgule cumulée.

L'enseignant annonce qu'il doit rajouter un commentaire sur ce qui est faux dans l'opération du livre.

332. Doute d'une élève

Une élève demande à l'enseignant si l'opération écrite au tableau est juste. L'enseignant répond par l'affirmative mais l'élève dit qu'à la première ligne ce n'est pas 2 310 mais 2 210 qu'il convient d'écrire.

L'enseignant reste sur ses positions et change de sujet : il revient au commentaire qu'il doit formuler.

333. Formulation de l'erreur de la première opération

Monsieur Bombelli reprend l'analyse de l'erreur du livre : il manque une position dans le décalage de la deuxième ligne. Il écrit au tableau et il demande aux élèves d'en faire autant :

Opération de gauche : décalage dans la 2e ligne.

334. Deuxième opération

L'enseignant annonce l'erreur dans l'opération "centrale" : c'est une erreur de virgule. Il écrit au tableau :

Opération au centre : mauvais placement de la virgule.
La bonne opération est $13,4 \times 0,2 = 2,68$.

La classe s'agite, un élève a lancé quelque chose mais Monsieur Bombelli l'a vu. Il demande le carnet de correspondance pour prendre un rendez-vous avec la famille de l'élève.

L'enseignant commente l'égalité : il y a un chiffre après la virgule dans le premier facteur, un chiffre après la virgule dans le deuxième facteur donc, dans le produit, il doit y avoir, en fait sauf exceptions, deux chiffres après la virgule. Donc ça nous donne 2,68.

335. Troisième opération

Monsieur Bombelli conseille de poser l'opération pour se rendre compte de l'erreur : un mauvais décalage dès la première ligne. Il écrit :

$$\begin{array}{r} \text{Opération de droite : mauvais décalage dès la première ligne} \\ 0,18 \\ \times 450 \\ \hline 900 \\ 7200 \\ \hline 81,00 \end{array}$$

Les élèves bavardent, l'enseignant ramasse un nouveau carnet de correspondance. Un morceau de gomme atterrit devant le tableau, le coupable s'est dénoncé et son carnet de correspondance est ramassé pour y porter une heure de colle. Un élève jette un papier sur le sol, l'enseignant voit le papier à terre, il ramasse le carnet de l'élève.

Monsieur Bombelli signale qu'on pourrait maintenant passer au cours qui ne contient pas de théorie importante mais qu'il préfère tout de même proposer un nouvel exercice pour être bien sûr que tout le monde ait compris ce qui est vital dans le produit de deux décimaux.

34. Placer les virgules manquantes dans une multiplication de décimal

L'enseignant dit aux élèves que ce petit exercice doit se faire très vite, il ne pose pas de difficulté car il n'y a pas de calcul à effectuer, seulement une virgule à placer ⁴².

⁴² Exercice n°5 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

Cet exercice a été donné par Mesdames Theano et Agnès, les élèves ont éprouvé de nombreuses difficultés. L'enseignant pense-t-il vraiment que l'exercice est facile ? On peut en douter compte tenu de la remarque sur les objections éventuelles.

Virgule manquante

Placer la virgule dans les nombres en couleur (ici en gras)

$$\begin{array}{l} 24,5 \times 3,5 = \mathbf{8575} \\ 2,8 \times \mathbf{132} = 36,96 \\ \mathbf{246} \times 0,25 = 6,15 \end{array}$$

L'enseignant demande aux élèves de se tenir prêts, il prévient qu'il ne leur laissera pas le temps de réfléchir : l'élève interrogé lit l'énoncé et donne immédiatement sa réponse.

341. Première égalité

L'élève interrogé annonce directement le résultat : 85,75.

L'enseignant annonce qu'il se contentera de mettre au tableau les réponses données par les élèves, si certains veulent émettre des objections, ils pourront le faire à la fin.

85,75

342. Deuxième égalité

L'élève interrogé se trompe de calcul : elle avait fait le deuxième de la première colonne et non le deuxième de la première ligne. L'enseignant lui demande de reprendre. Il l'aide pour aller plus vite en lui disant qu'on n'a pas le choix pour placer la virgule.

L'élève répond 1,97 que l'enseignant écrit au tableau

85,7 1,97

Monsieur Bombelli se rend compte que le tableau sera difficile à lire et avertit qu'il va recopier intégralement les calculs. Pendant ce temps, les élèves doivent réfléchir.

$24,5 \times 3,5 = 85,75$ $1,97 \times 0,7 = 1,379$

343. Troisième et quatrième égalités

L'élève interrogé propose 13,2 pour la troisième égalité, un autre propose 1,674 pour la quatrième égalité. L'enseignant note les réponses au tableau :

$2,8 \times 13,2 = 36,96$ $0,34 \times 5,4 = 1,674$

344. Cinquième égalité

L'élève interrogé propose 24,6 mais cette proposition engendre un brouhaha dans la classe. L'enseignant refuse la réponse et interroge une autre élève. Cette élève propose 246 et Monsieur Bombelli écrit :

$246 \times 0,25 = 6,15$

Un élève proteste car il fallait changer 246. Il ajoute que c'est en divisant 24 par 4 qu'on obtient 6. L'enseignant répond qu'il ne se prononce pas pour l'instant, laissant entendre que certains des résultats sont peut-être faux. La classe est agitée, les élèves souhaitent intervenir.

L'enseignant se range finalement à l'argument de l'élève : il fallait changer 246 et dans la réponse, 246 n'a pas été changé. Il interroge de nouveau l'élève qui a répondu 246 en lui demandant comment elle le modifie. L'élève interrogée reste muette, l'enseignant conclut qu'elle ne modifie pas 246.

345. Sixième égalité

Monsieur Bombelli interroge une élève pour la dernière égalité. Elle propose 134. L'enseignant répète la réponse et rajoute " donc on ne change pas " puis il note :

$$0,75 \times 134 = 10,05$$

Il ajoute que les réponses au tableau sont celles qui ont été proposées par les élèves.

Certains élèves chahutent et sont repris par l'enseignant.

346. Une mauvaise interprétation de la règle

L'enseignant commente les deux dernières égalités : là on voit un chiffre après la virgule (premier facteur), un chiffre après la virgule (deuxième facteur), deux chiffres après la virgule (produit), donc ça c'est les réponses apparentes. Tout le monde est-il d'accord avec ça ?

De rares voix d'élèves disent non parmi de nombreux oui.

Monsieur Bombelli signale qu'il y avait un piège et qu'on est tombé dedans. On ne peut pas déduire de la règle que si on multiplie deux nombres qui ont un chiffre après la virgule on obtient un nombre qui a deux chiffres après la virgule. C'est très souvent vrai sauf quand dans l'opération, si on la pose, on obtient un zéro au bout.

L'enseignant entoure la cinquième et la sixième égalité en dessinant un panneau " attention danger ! " Il place les virgules correctement et il demande aux élèves un peu d'attention pour expliquer pourquoi " on se trompe en répondant instinctivement sans réfléchir ".

$$24,6 \times 0,25 = 6,15$$

$$0,75 \times 13,4 = 10,05$$

347. Placer la virgule correctement en posant l'opération

L'enseignant rappelle la méthode d'un élève, multiplier par 0,25 revient à diviser par 4 donc on se rend bien compte que c'est 24,6 qui divisé par 4 donnera 6,15. Mais, pour bien expliquer ce qui se passe, l'enseignant dit qu'il vaut mieux poser l'opération.

Monsieur Bombelli demande aux élèves de noter :

Explication

$$\begin{array}{r} 24,6 \\ \times 0,25 \\ \hline 1230 \\ 4920 \\ \hline 6,150 \end{array}$$

L'enseignant rappelle le cours : on effectue sans tenir compte de la virgule et on place la virgule au résultat.

348. Un problème de disposition qui resurgit

Pendant l'effectuation de la multiplication l'enseignant est interrompu par un élève qui ne comprend pas pourquoi il dispose mal les chiffres de l'opération : il aurait dû mettre le zéro en dessous du 4. L'enseignant répond de la même façon que la dernière fois : comme on va oublier les virgules, c'est comme si on multipliait 246 par 25 donc on est sensé les alignés comme cela. Mais ajoute que les élèves disposent d'une certaine liberté dans les décalages.

349. Retour à l'opération

Il compte les chiffres après la virgule, un, deux, trois puis il compte les décimales du produit, un, deux, trois et il place la virgule. Enfin il ajoute que comme le zéro est inutile on peut le barrer et il reste bien 6,15.

L'élève qui ne comprend pas la disposition des chiffres rappelle l'enseignant, il lui montre son cahier et lui demande si c'est bien ou s'il faut faire comme lui. Monsieur Bombelli répond de façon ambiguë, ou il faut faire comme au tableau et ou il peut user de sa liberté pour faire comme sur le cahier.

L'enseignant conclut qu'on attendait trois chiffres après la virgule mais comme il y a un zéro inutile qu'on fait disparaître, on en a finalement deux seulement. Plusieurs voix disent " ah ! ouais..." se font entendre.

L'enseignant rajoute que c'est exactement le même problème pour la dernière égalité.

34A. Bilan de cet exercice

Les élèves sont mis en garde : tout cela ne remet pas en cause le cours sur la multiplication. L'enseignant parle là de la technique opératoire.

Monsieur Bombelli rajoute que ce qui est faux c'est d'affirmer qu'un nombre à un chiffre après la virgule multiplié par un nombre avec deux chiffres après la virgule, ça donnerait un nombre avec trois chiffres après la virgule. Ce n'est pas vrai à tous les coups même si c'est souvent le cas.

35. Institutionnalisation de la multiplication des décimaux

L'enseignant demande aux élèves de prendre leur cahier de cours. Il précise qu'on va marquer le cours qui doit leur sembler naturel compte tenu de tout ce qui a déjà été fait.

351. Un petit problème de cahier

Certains élèves ne comprennent pas pourquoi l'enseignant demande le cahier de cours car ils ont fait le dernier exercice dans ce cahier.

L'enseignant les rassure : l'exercice est tellement important qu'il peut bien figurer dans le cours.

352. Premier paragraphe : la multiplication de deux décimaux.

Le professeur rappelle qu'on avait écrit, au grand 1, l'activité préparatoire et maintenant, grand 2, le cours. Comme d'habitude, dit un élève. Comme d'habitude confirme l'enseignant.

L'enseignant demande de se reporter à la page 60 qui va être lue.

Le professeur paraphrase ce qui est écrit dans le manuel : les méthodes pour multiplier deux décimaux : calcul mental, à la main, à la machine.

L'enseignant commence par le calcul à la main, en précisant que ça, on sait le faire, et rappelle rapidement la technique.

L'enseignant affirme également que le calcul à la machine ne pose pas de problème, et pour cause...

L'enseignant signale que la seule chose qui n'a pas été vraiment faite, c'est le calcul avec les ordres de grandeur, c'est-à-dire avec le calcul approché mais il précise que cela a déjà été un peu fait par ailleurs. Ici l'enseignant critique le manuel qui annonce du calcul mental alors qu'il ne donne pas un moyen de calculer le produit, seulement de l'approcher. Toutefois il rajoute que la valeur approchée du produit permet de placer la virgule correctement

353. Multiplier ou diviser par 0,1

Une élève pose une question sur la règle " multiplier par 0,1 revient à diviser par 10 " : elle demande s'il est vrai aussi que diviser par 0,1 revient à multiplier par 10. L'enseignant répond que cet énoncé est vrai aussi mais que pour l'instant on n'est pas censé le savoir.

Pour la classe entière l'enseignant indique le paragraphe consacré aux multiplications par 0,1 ; 0,01 et 0,001. Il signale que ce point a déjà été traité. Pas de difficulté.

354. La multiplication n'agrandit pas toujours

Paragraphe " attention danger ". L'enseignant critique le manuel, il confie à ses élèves qu'il doute un peu qu'ils soient vraiment susceptibles d'être exposés à ce danger.

L'enseignant paraphrase l'énoncé du livre et donne un autre exemple. Quand on multiplie par 0,5 on sait que ça divise par 2 donc on trouvera un résultat plus petit. Il rajoute que c'est facile et qu'on peut passer à autre chose.

L'enseignant demande que les élèves représentent leur cahier d'exercice. Des élèves bavardent, un autre carnet de correspondance est ramassé.

36. Un exercice résolu : calcul rapide

Monsieur Bombelli signale que contrairement à son habitude, l'exercice résolu ne sera pas copié dans le cahier de cours mais dans le cahier d'exercices car il n'est pas suffisamment " type " pour le mettre dans le cours.

L'exercice propose des méthodes pour calculer rapidement qui utilisent la commutativité et l'associativité de la multiplication ainsi que les produits $0,5 \times 2 = 1$; $0,25 \times 4 = 1$...

L'enseignant demande aux élèves d'aller à la page de l'exercice ⁴³.

EXERCICE RESOLU

Enoncé Calculer rapidement : $A = 2,5 \times 7 \times 4 \times 0,3$;

$B = 16 \times 0,5$; $C = 124 \times 0,5$; $D = 8,8 \times 0,5$;

$E = 16 \times 0,25$; $F = 124 \times 0,25$; $G = 8,8 \times 0,25$.

Solution

$A = 2,5 \times 7 \times 4 \times 0,3$

$A = 10 \times 2,1$

$A = 21$

$B = 8$; $C = 62$; $D = 4,4$; $E = 4$; $F = 31$; $G = 2,2$.

Le professeur explique le A : on effectue d'abord $2,5 \times 4 = 10$, donc $A = 10 \times 7 \times 0,3$ c'est-à-dire $10 \times 2,1$ donc $A = 21$. Pour faire cela, on se dit que c'est commutatif... Des élèves disent " quoi ??? ", et l'enseignant dit qu'on peut faire dans l'ordre qu'on veut, on peut commutier.

Puis Monsieur Bombelli demande à une élève de lire le point-méthode qui figure sous la solution de l'exercice résolu ⁴⁴

METHODE

Pour le calcul du produit de plusieurs nombres, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance... Il est conseillé de faire des regroupements qui simplifient les calculs.

• On retiendra en particulier $2 \times 0,5 = 1$ $4 \times 0,25 = 1$ $8 \times 0,125 = 1$.

• On retiendra aussi que multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.

• On retiendra enfin que multiplier par 0,25 revient à diviser par 4.

L'enseignant ponctue par des " oui " d'approbation. Il propose enfin d'arrêter la séance sur cette lecture.

39. Du travail à la maison : trois exercices

Monsieur Bombelli annonce le prochain contrôle qui portera sur tout, et en particulier sur ce dernier chapitre. Il n'aura pas lieu lors de la séance prochaine mais celle d'après.

Il donne ensuite les exercices (que, manifestement, il choisit juste avant de les donner) : les deux premiers étant déclarés faciles. ⁴⁵

⁴³ Exercice n°1 p. 61 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

⁴⁴ Méthode p. 61 du manuel *Cinq sur Cinq* de (1997), Paris : Hachette.

Nous n'avons pas assisté à la séance de correction des exercices.

L'enseignant rend plusieurs carnets de correspondance, ceux des élèves qui se sont calmé mais il garde deux carnets pour convoquer le tuteur légal.

Premier exercice :

Calculs inutiles

Ranger ces produits par ordre croissant : $T = 42 \times 1,09$; $U = 42 \times 0,95$; $E = 42 \times 1,1$; $S = 420 \times 0,1$; $J = 42 \times 0,9$.

Deuxième exercice

Ai-je assez d'argent ? (De tête)

1° Je dois acheter 48 objets coûtant 0,95 F chacun. Ai-je assez avec un billet de 50 F pour payer ?

2° Le litre d'essence sans plomb coûte 5,84 F. Je mets 41 litres dans le réservoir. Ai-je assez avec un billet de 200 F pour payer ?

3° J'achète 4,250 kg de saumon à 125 F le kg. Ai-je assez avec un billet de 500 F pour payer ?

Troisième exercice

Retrouver les chiffres manquants :

$1...2...57 \times \dots = \dots 9...9...9$ et $\dots 7...7 \times 0... = 2403,3$
Contrôler vos résultats à la calculatrice.

⁴⁵ Exercices n°6 p. 62 ; n°12 p. 63 et n°8 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

4. Narration de la séquence de Madame Germain

Avant cet enseignement, Madame Germain a testé ses élèves sur la multiplication des entiers et sur la multiplication des décimaux. Pour la multiplication des entiers, l'enseignante a décelé deux élèves en difficulté, les autres élèves ont obtenu des résultats conformes à ce qu'on peut attendre, en moyenne, à l'entrée en sixième. Pour cette évaluation, l'enseignante se réfère notamment au dispositif ministériel d'évaluation des élèves à l'entrée en sixième. La multiplication de deux décimaux a conduit à un échec général, ce qui est normal : elle n'a pas été enseignée à ces élèves l'an passé.

1. Déroulement de la séance n°1

Madame Germain indique que les élèves doivent ouvrir leur livre mais qu'ils n'auront pas besoin d'écrire, ils n'auront besoin que de leur tête pour réfléchir.

1.1. Débuts d'une conception "double-entier" des nombres décimaux

L'enseignante propose un exercice ⁴⁶ situé sous une rubrique intitulée "calculs de tête" :

Donner "rapidement" :

- a) Le double de 35 ; de 108 ; de 8,5 ; de 13,4.
- b) Le triple de 21 ; de 102 ; de 0,5 ; de 10,3.

1.1. Recherche individuelle

Une élève demande ce qu'il faut faire, Madame Germain répond qu'on lit et qu'on fait dans sa tête. L'enseignante laisse un moment aux élèves pour lire seuls. La classe est très silencieuse.

1.1.2. Réponses à haute voix

L'enseignante interroge un élève qui répond 70. Elle insiste pour qu'une phrase complète soit énoncée, par exemple : le double de 35 est 70. Ainsi, suivant l'ordre induit par la disposition de la classe (chaque élève passe la parole à son voisin, à côté puis derrière), les élèves énoncent les phrases suivantes. Le double de 108 est 216. Le double de 8,5 est 17. Le double de 13,4 est 26,8. Le triple de 21 est 63. Le triple de 102 est 306. Le triple de 0,5 est 1,5. Le triple de 10,3 est 30,9.

Madame Germain demande si quelqu'un n'est pas d'accord avec une au moins des réponses. Ces réponses font l'unanimité dans la classe.

1.1.3. Des questions du même type

L'enseignante annonce qu'elle va poser une question analogue pour le a) comme pour le b).

⁴⁶ Exercice n°1 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

Quel est le double de 13,8 ? L'enseignante laisse du temps de réflexion puis interroge une élève qui répond, après une longue réflexion, 27,6. L'enseignante demande de lever la main si on est d'accord, la classe est unanime.

Quel est le triple de 10,9 ? L'enseignante laisse du temps de réflexion puis interroge une élève qui répond 32,7. L'enseignante interroge une élève qui semble surprise, l'élève dit qu'elle aurait répondu 21,8. L'enseignante écrit au tableau :

Le triple de 10,9 est 21,8

Des élèves réagissent : " non ce n'est pas le double ". Madame Germain pose à nouveau la question à l'élève qui, cette fois, répond 32,7. L'enseignante barre 21,8 au tableau et écrit 32,7 :

Le triple de 10,9 est 32,7

L'enseignante demande comment l'élève a fait, elle a rajouté 10,9 à 21,8. Une élève critique cette méthode qui fait faire deux opérations au lieu d'une mais l'enseignante explique qu'elle a peut-être fait ainsi parce qu'elle avait déjà calculé le double. Elle demande à l'élève concernée qu'elle ait déjà fait cette erreur, qu'elle ne sait pas comment elle aurait fait si elle n'avait pas déjà fait cette erreur.

L'enseignante demande comment on peut se rendre très vite compte que la réponse 21,8 est fautive. Un élève répond que ça doit faire dans les 30 et pas dans les 20. L'enseignante commence une phrase : c'est ce qu'on appelle... Les élèves répondent : une estimation, une valeur approchée, un ordre de grandeur, un nombre arrondi, une hypothèse. L'enseignante reprend l'élève : le mot hypothèse a un autre sens en mathématiques qui sera étudié plus tard.

12. *Évaluer des connaissances des élèves sur l'écriture décimale*

Madame Germain demande de passer à l'exercice suivant ⁴⁷. Pas de temps préalable de réflexion, on répond immédiatement.

Donner rapidement les résultats, sans poser les opérations bien sûr !

$$76,25 + 10 = ?$$

$$28,4 + 100 = ?$$

$$76,25 - 10 = ?$$

$$28,4 \times 10 = ?$$

$$76,25 \times 10 = ?$$

$$28,4 \times 0,1 = ?$$

$$76,25 \times 0,1 = ?$$

$$28,4 \times 100 = ?$$

$$76,25 \times 100 = ?$$

$$28,4 \times 0,01 = ?$$

$$76,25 \times 0,01 = ?$$

$$28,4 \times 1\,000 = ?$$

$$76,25 \times 1\,000 = ?$$

$$28,4 \times 0,001 = ?$$

121. Les premières réponses des élèves

L'élève interrogée demande si elle doit lire l'opération, l'enseignante répond par l'affirmative.

$$76,25 + 10 = 86,25$$

L'enseignante demande aux élèves qui ne sont pas d'accord de lever la main immédiatement après le résultat.

$$76,25 - 10 = 66,25$$

122. Première erreur : multiplication par 10

$$76,25 \times 10 = 760,25.$$

Madame Germain ne dit rien mais dix mains se lèvent. L'enseignante demande aux élèves qui ont levé la main de poser leur question. Un élève dit qu'il n'est pas d'accord mais qu'il n'a pas de question. L'enseignante demande des questions.

Un élève trouve que c'est difficile de toujours devoir poser une question. Madame Germain le confirme mais elle dit que c'est comme cela, qu'on comprend les difficultés des autres et les siennes.

Un élève pose la question : " as-tu placé la virgule au bon endroit ? " L'élève ne sait pas répondre. Suit une autre question, plus complexe que la précédente : Autre question : " pourquoi as-tu rajouté un zéro ? " L'élève répond qu'elle s'est trompée que c'est 762,5. L'enseignante demande que l'élève réponde quand même à la question posée : d'où vient le zéro ? Rires...

Madame Germain demande si quelqu'un peut tenter d'expliquer d'où vient le zéro. Un élève propose : elle a mis de côté le 25, elle a multiplié par 10 et après avoir eu le résultat, elle a mis la virgule et remis le 25. L'enseignante demande à l'élève si elle a oublié de multiplier aussi le 25 par 10. L'élève ne sait plus comment elle a fait. Une autre élève dit que pour obtenir 760,25, l'élève a fait comme si c'était un nombre entier, elle a rajouté un zéro. Certains élèves protestent et l'élève complète : à la partie entière du nombre. Cette interprétation fait l'unanimité dans la classe.

L'enseignant demande à l'élève qui s'est trompée si elle est toujours d'accord avec 762,5. Elle reste d'accord avec cette réponse. Madame Germain lui demande si il est normal qu'il n'y ait pas de zéro. Elle trouve cela normal, bien qu'un élève dise que c'est 762,50. Tout le monde est d'accord. L'enseignante confirme qu'on peut ne pas écrire les zéros inutiles.

123. Deuxième erreur : multiplication par 0,1

Un élève affirme $76,25 \times 0,1 = 7,625$. Un autre élève lève la main, il a trouvé 76,35. L'enseignante demande qui a une question à poser. Une élève pose la question : " es-tu bien sûr que tu as multiplié ? ". L'élève répond qu'il a additionné.

L'enseignante demande pourquoi, il n'avait pas fait attention.

L'enseignante rappelle qu'il n'y a plus qu'une réponse proposée, tout le monde est-il d'accord ? Oui. Qui peut expliquer pourquoi ?

Quand on multiplie par zéro ça va devenir zéro, quand on multiplie par zéro virgule quelque chose, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, ça ne va pas devenir zéro, mais il va quand même être plus petit, il va être divisé.

L'enseignante demande un complément d'explication. Une élève répond qu'en multipliant par 0,1, on divise par 10.

L'enseignante fait remarquer que certains ont l'air étonné.

Un élève dit que 0,1 c'est un dixième. L'enseignante continue : multiplier par 0,1 c'est comme multiplier par un dixième, et multiplier par un dixième c'est diviser par 10.

⁴⁷ Exercice n°2 p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq 6e* (1997), Paris : Hachette.

124. Pas de problème pour la multiplication par 100 mais pour la multiplication par 0,01.

Un élève répond : $76,25 \times 100 = 7\,625$

Une élève dit, après une longue hésitation : $76,25 \times 0,01 = 762,5$. Personne n'est d'accord avec cette réponse, l'enseignante demande qui a une question à poser à l'élève.

Un élève pose "est-ce que tu es sûre que c'est ça". L'enseignante dit que ce n'est pas une question, enfin, c'est une question mais ce n'est pas une vraie question. Un élève pose "est-ce que tu ne t'es pas un peu embrouillée quand on a fait la multiplication par 0,1 ?" L'élève ne sait pas répondre à cette question, l'enseignante propose de compléter. Un élève pose "est-ce que tu as écouté quand on a fait la multiplication par 0,1 ?" Madame Germain répond que sûrement car un élève écoute toujours. Elle demande toutefois à l'élève si elle se rappelle ce qui a été dit pour 0,1. L'élève ne sait plus. L'enseignante demande qui peut le redire.

Quand on multiplie par 0,1 c'est comme si on divisait par 10, voilà ! L'enseignante rajoute : c'est parce que 0,1 c'est un dixième.

L'enseignante demande si l'on peut dire quelque chose d'analogue pour 0,01. C'est diviser par 100 répond un élève. Quelle explication en donnes-tu ? demande l'enseignante. Comme il y a un zéro en plus ça fait diviser par 100 répond l'élève. L'enseignante demande une autre façon de dire les choses. Un élève propose 0,01 c'est comme un centième, alors on divise par 100.

Madame Germain demande à l'élève si elle peut, avec ces explications, répondre à la question. L'élève n'arrive pas. L'enseignante lui demande de diviser 28,4 par 100, elle répond 0,284. L'enseignante lui demande alors de multiplier 28,4 par 0,01. Mais l'élève ne répond pas. L'enseignante rappelle que c'est comme diviser par 100 et repose sa question. L'élève répond que ça fait pareil. L'enseignante pose à nouveau la question $76,25 \times 0,01$. L'élève répond 0,7625. L'enseignante demande si c'est pour faire comme tout le monde qu'elle donne la réponse majoritaire de la classe. L'élève répond qu'elle a mieux compris. Madame Germain dit qu'elle a plutôt mieux appris que mieux compris et qu'on y reviendra.

125. Multiplication par 1 000 et remarque de l'enseignante

Un élève affirme $76,25 \times 1\,000 = 76\,250$, pas de question de la part des élèves. Madame Germain dit à la classe : c'est bizarre, il n'y a pas de questions pour les multiplications par 10, 100 ou 1 000 mais il y a un flottement quand on multiplie par 0,1 ou 0,01, il faudra donc qu'on y revienne.

126. L'exercice n'est pas terminé

L'enseignante annonce qu'on va changer d'activité. Un élève lui fait remarquer que l'exercice n'est pas terminé mais l'enseignante lui répond que ce n'est pas grave parce qu'elle en sait assez sur ce qu'elle voulait savoir...

13. Mobiliser les ordres de grandeur ou les encadrements pour déterminer un produit parmi trois nombres

Madame Germain demande aux élèves de regarder, page 58, le bonhomme avec la loupe. Elle leur dit qu'ils vont devoir, eux aussi, prendre leur loupe mathématique pour regarder certains calculs ⁴⁸ :

Sans effectuer les multiplications, rechercher le résultat qui vous semble exact.			
$234 \times 11,5 = ?$	269,1	9 621	2 691
$9 \times 28,9 = ?$	260,1	602,1	2 061
$20 \times 408,1 = ?$	816,2	8 162	2 816
$8\,725 \times 0,92 = ?$	8 027	802,7	2 087
Vérifier vos pronostics à la calculatrice.			

L'enseignante paraphrase la consigne en insistant sur le fait qu'il ne faut pas effectuer les multiplications.

131. Première multiplication, avec des approximations

Un élève est interrogé. Très rapidement, il propose, selon lui, 2 691. Madame Germain lui demande des explications. C'est assez simple, répond-il, en disant que 11,5 c'est à peu près 10, donc ça fera à peu près 2 340 ; comme 9 621 c'est trop grand parce que, enfin ça me semble trop grand et que 269,1 c'est trop petit car le nombre doit avoir au minimum quatre chiffres. L'enseignante lui fait remarquer que 269,1 est un nombre de quatre chiffres. L'élève répond quatre chiffres avant la virgule. Madame Germain insiste. L'élève dit qu'il doit trouver plus que 2 340 donc le nombre doit avoir des unités de mille alors que 269,1 n'en a pas. L'enseignante est d'accord.

Madame Germain interroge un autre élève car, dit-elle, certains d'entre eux aimeraient bien qu'on explique autrement. L'élève explique que le produit doit être proche de 234×10 c'est-à-dire de 2 340, comme le seul nombre qui est proche de 2 340 est 2 691.

L'enseignante demande des explications complémentaires pour 269,1 parce qu'elle ne comprend pas l'argument des quatre chiffres. Pour les élèves cela semblait clair : c'est quatre chiffres sans virgule. L'enseignante critique "sans virgule", un élève dit enfin que c'est la partie avant la virgule qui doit avoir quatre chiffres. L'enseignante déclare qu'à présent, elle a compris. Elle demande aux autres s'ils ont compris eux aussi, ils répondent par l'affirmative.

132. Des approximations aux encadrements

Madame Germain revient alors sur le fait que 9 621 a été écarté, un peu vite à son avis : quand on multiplie par 11,5 ça fait plus que quand on multiplie par 10. Certains élèves prennent la parole pour dire que c'est impossible que juste pour peu de différence entre 11,5 et 10 ça agrandisse tant que ça. L'enseignante demande une explication de cette impossibilité. Un élève répond que pour passer de 2 340 à 9 621 il faut encore multiplier par 4 environ, or il ne restait pas

⁴⁸ Activité 2 p. 58 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

beaucoup à multiplier pour aller jusqu'à 11,5. L'enseignante demande si tout le monde est convaincu. Les élèves répondent par l'affirmative. "Alors n'aimerez-vous pas dire les choses plus clairement" propose l'enseignante. Les élèves sont d'accord.

Un élève reprend l'idée selon laquelle le nombre écarté est trop éloigné de la valeur approchée. Mais Madame German répète sa demande : elle veut savoir pourquoi c'est trop éloigné.

Un élève tente de multiplier 234×11 mais il a trop de difficultés, il y parvient mais il ne sait plus quoi faire avec la partie décimale.

Plusieurs élèves s'essaient à passer de 10 à 11,5. L'enseignante critique la méthode des élèves qui consiste à faire le calcul autrement qu'en posant la multiplication. Elle rappelle que les élèves ont trouvé une valeur approchée trop petite 2 340. Elle propose de trouver une valeur approchée trop grande qui montre que 9 621 ne peut pas convenir.

Un élève propose 234×20 qui fait quatre mille et quelque donc 9 621 est trop grand. Une élève rappelle que 2 340 est plus petit que le résultat, que 4000 et quelque est plus grand que le résultat car 20 est plus grand que 11,5, et comme 2 691 est le seul à être entre les deux c'est lui le résultat. L'enseignante demande qui est convaincu, toutes les mains ne sont pas levées. L'enseignante propose à un élève une dernière tentative d'explication pour ceux qui ne sont pas encore convaincus. Une élève dit que 11,5 est compris entre 10 et 20 donc le produit est compris entre 234×10 et 234×20 c'est-à-dire entre 2 340 et 4 680 et quelque. Comme 2 691 est le seul à être entre ces deux nombres, c'est lui le résultat. La démonstration a convaincu les plus rétifs... Madame German manifeste sa satisfaction et propose de passer au suivant.

133. Deuxième multiplication interrompue par la sonnerie

Une élève pense que le résultat de $9 \times 28,9$ est le nombre 602,1. L'enseignante lui demande de dire pourquoi. L'élève reste muette. Puis elle propose de remplacer 28,9 par 30. Madame German demande combien font 9×30 . L'élève répond difficilement 270. D'autres élèves viennent l'aider mais la sonnerie retentit et la concentration baisse suffisamment pour que l'enseignante propose d'y revenir la fois suivante.

2. Déroulement de la séance n°2 (50 min)

L'enseignante règle, durant 5 minutes, un problème matériel lié à une sortie.

Une partie de la classe est envoyée dans la salle informatique à côté. Les noms de ces élèves ne sont pas préparés à l'avance mais Madame German prépare des paires d'élèves pour la salle informatique : ce sont les élèves les plus avancés sur la multiplication.

Ceux qui restent en classe "normale" continuent le travail de la séance précédente. Nous sommes resté avec cette partie de la classe (16 élèves sur 26)

21. Analyse de texte : critique de l'utilisation, par un élève fictif, d'un encadrement pour déterminer un produit parmi trois nombres (1^{er} exemple)

L'enseignante recopie l'énoncé de l'exercice abandonné lors de la séance précédente car ce jour là, la journée des élèves est "lourde" et pour alléger le cartable, ils ne prennent pas le manuel de mathématiques.

Je vais effectuer les multiplications, rechercher le résultat qui vous semble exact.

$234 \times 11,5 = ?$	269,1	9 621	2 691
$9 \times 28,9 = ?$	260,1	602,1	2 061
$20 \times 408,1 = ?$	816,2	8 162	2 816
$8\,725 \times 0,92 = ?$	8 027	802,7	2 087

Je vérifie vos promesses à la calculatrice.

211. Lecture silencieuse de réponses

Madame German distribue une feuille photocopiée⁴⁹ qui contient, pour le premier calcul, des raisonnements qui représentent ceux de la séance précédente. Les élèves doivent la lire et dire ce qu'ils pensent de ce qui est écrit :

Je cherche le résultat juste parmi ceux proposés (n°2 p. 58)

1) $234 \times 11,5 = 2\,691$
 car $234 \times 10 = 2\,340$
 et $234 \times 20 = 4\,680$
 on a $269,1 < 2\,691 < 9\,621$
 donc $269,1 < 234 \times 10 < 234 \times 11,5 < 4\,680 < 9\,621$
 et le seul choix possible pour $234 \times 11,5$ est 2691.

... autre façon de comprendre...

Autrement dit : $2\,340$, c'est-à-dire 234×10 est trop petit
 $4\,680$, c'est-à-dire 234×20 est trop grand
 donc $269,1$ est "encore plus" trop petit et $9\,621$ est "encore plus" trop grand. Il ne reste plus que $2\,691$.

... autre façon encore...

$234 \times 10 = 2\,340$ donc $269,1$ est beaucoup trop petit.

Pour calculer $234 \times 11,5$ il faut ajouter un peu plus (mais pas beaucoup plus...) que 234 donc on choisit $2\,691$.

Remarque : Ces trois façons de raisonner sont justes, la plus précise est la première.

Les élèves lisent silencieusement la feuille. Un élève dit qu'il n'arrive pas à lire quelque chose (la feuille est écrite à la main). Il n'arrive pas à lire le mot choix. Un autre n'arrive pas à lire le mot "raisonner".

212. Lecture à haute voix de la dernière façon

Une élève demande de l'aide car elle ne comprend pas la dernière façon. L'enseignante lui propose de lire ensemble. Elle lit lentement à haute voix en mettant bien le ton. Elle s'arrête à chaque phrase pour demander si l'élève

⁴⁹ Feuille préparée par l'enseignante.

comprend. Elle répond, à chaque fois, qu'elle comprend tout. L'enseignante lui fait remarquer que, pourtant, elle s'est contentée de lire...

213. Bref échange autour de ces réponses

Après quelques minutes, Madame Germain demande ce qu'ils pensent de ces trois façons d'expliquer les choses.

Un élève dit que la première est la plus simple. L'enseignante s'exclame "la plus simple ?!" Un élève corrige : "la plus précise" mais l'enseignante lui fait remarquer que c'est ce qu'elle a écrit...

L'enseignante leur demande de choisir celle dans laquelle ils s'y retrouvent le mieux. Sur 16 élèves, douze choisissent la première, trois la deuxième et un la troisième.

22. Analyse de texte : critique de l'utilisation, par un élève fictif, d'un encadrement pour déterminer un produit parmi trois nombres (2^e exemple)

Madame Germain distribue une nouvelle feuille⁵⁰ et leur demande d'écrire ce qu'ils pensent de la réponse proposée pour le deuxième calcul.

Que penser de cette réponse pour le 2) ?

$$9 \times 28,9 = 602,1$$

$$9 \times 30 = 270$$

$$9 \times 20 = 180$$

Donc 260,1 est trop petit et 2 061 est trop grand, c'est 602,1 le résultat exact.

221. Lecture de la réponse proposée

Un élève lève la main pour répondre. L'enseignante lui rappelle qu'elle demande d'écrire la réponse au dos de la feuille.

Madame Germain laisse les élèves chercher et rédiger, pendant ce temps, elle va voir les élèves en salle informatique. Puis elle revient et se penche sur les productions écrites.

Elle reprend un élève qui propose sa réponse au lieu d'écrire ce qu'il pense de la réponse proposée. L'enseignante précise qu'on peut dire si on la trouve bien ou non et pourquoi. Elle laisse encore quelques minutes puis elle dit qu'ils ont assez réfléchi qu'ils doivent écrire maintenant.

Elle retourne en salle informatique puis revient.

222. Première critique de la réponse proposée

Madame Germain interroge un élève qui doit lire ce qu'il a écrit : "je ne crois pas que c'est le bon résultat car si on additionne 270 plus 180 est égal à un chiffre inférieur à 602,1."

L'enseignante demande ce que les élèves pensent de cette réponse. Une élève pose la question : "pourquoi as-tu ajouté 270 plus 180 ?" L'élève répond qu'il ne sait pas, en riant. L'enseignante demande ce qu'est 270 et ce qu'est 180. L'élève répond que 270 c'est 9 multiplié par 30 puis dit qu'il s'est trompé. L'enseignante

⁵⁰ Feuille préparée par l'enseignante.

lui demande d'expliquer en quoi il s'est trompé. L'élève dit maladroitement qu'il a calculé au lieu de comparer.

223. Deuxième critique de la réponse proposée

Un autre élève dit que l'élève fictif a mal comparé parce que 9×20 donne un résultat plus petit que $9 \times 28,9$. Madame Germain demande aux autres s'ils ont compris ce qu'a dit cet élève, s'ils ont des questions à lui poser. Un élève demande s'il est sûr qu'il faut comparer. L'élève ne sait que répondre. L'enseignante demande à l'élève de relire sa réponse, car dit-elle, sans faire exprès, elle ne comprend pas ce qu'il a écrit.

L'élève ne lit pas sa réponse et dit : "il a mal comparé parce que 28,9 c'est plus petit que 30 et en multipliant 9 par 28,9 il trouve un résultat plus grand que le résultat de 9 multiplié par 30. L'enseignante répète et rajoute que l'élève pense donc que la réponse est fausse.

224. Troisième critique de la réponse proposée

Un autre élève, Raphaël, lève la main pour lire sa réponse. Madame Germain accepte une dernière lecture. Il lit : "la réponse de l'élève est fausse parce que 9 multiplié par 28,9 est compris entre 9 multiplié par 20 et 9 multiplié par 30 et comme 9 multiplié par 30 est égal à 270, le nombre 602,1 est forcément trop grand. Les élèves réagissent unanimement pour dire que c'est bien.

225. Dernière critique de la réponse proposée

L'enseignante propose alors d'écrire la réponse. Raphaël relit son texte mais l'enseignante le coupe : ce n'est pas cette réponse qu'elle veut que les élèves écrivent. Elle demande à une autre élève, Maud, de dicter sa réponse. Elle dit : "nous écrivons la réponse de Maud" puis Maud dicte sa réponse à la classe : "non ce n'est pas la bonne réponse car 9 multiplié par 30 égal 270 donc le résultat doit être inférieur à 270 et non supérieur car 9 multiplié par 28,9 est plus petit que 9 multiplié par 30." Madame Germain demande à ceux qui n'ont pas écrit "nous écrivons la réponse de Maud" de rajouter sous sa réponse "nous avons écrit la réponse de Maud". L'enseignante rajoute que c'était une autre façon d'exprimer la réponse Raphaël.

226. A propos du deuxième calcul : la bonne réponse

Madame Germain demande alors quel nombre ils choisissent. Un élève propose 260,1. L'enseignante demande d'écrire "la réponse que nous choisissons est 260,1."

23. De la critique à l'action : déterminer un produit parmi trois nombres

Puis Madame Germain demande de répondre aux deux autres questions en expliquant la réponse.

Elle laisse quelques minutes aux élèves, elle circule dans les rangs et examine quelques productions écrites.

231. Un conflit entre minoration et approximation

Une élève lit sa réponse à l'enseignante : " pour calculer de tête je vais multiplier par 400. 20 fois 400 égal 8 000 donc 816,2 est trop petit et 2 816 aussi donc c'est 8 162 car c'est lui le plus près de 8 000. L'enseignante lui demande de répondre pour le suivant. On discutera de la réponse après.

232. Emergence de la règle de la virgule

Un élève appelle Madame Germain car, selon lui, il n'y a pas la bonne réponse parmi les propositions. Il s'explique à la demande de l'enseignante : " 20 fois 400 égal 8 000, la réponse est dans les huit mille mais la seule réponse proposée dans les huit mille est 8 162 qui ne peut pas être la bonne réponse car elle n'a pas un ⁵¹ chiffre après la virgule.

" Bonne remarque " dit l'enseignante. Elle pose une question à l'élève : " mais quand on multiplie 408,1 par 10, est-ce qu'on trouve un nombre entier ? " L'élève ne répond pas et répète que, peut-être, ils ont oublié d'écrire le chiffre après la virgule. L'enseignante repose sa question. L'élève répond 4 081. Madame Germain lui fait remarquer qu'il n'y a pas de virgule, que c'est un nombre entier. Elle fait remarquer que pour multiplier 408,1 par 20 il reste à multiplier ce nombre (4 081) par 2, puis elle pose la question : est-ce possible alors qu'on trouve un nombre entier ? L'élève accepte que le résultat puisse être un nombre entier.

233. Avec l'écriture décimale

Le résultat est 8 162 car dans 20 fois 408,1 on aura obligatoirement rajouté un chiffre. 2 816 ne pourra être le bon résultat, car rien qu'en rajoutant le 1 de 408,1, 4 081 sera plus grand.

Madame Germain demande des explications complémentaires, l'élève explique qu'à cause du 0 du nombre 20, le 1 de 408,1 doit passer dans les unités et que ça fait plus que 2 816.

234. Des réponses par les approximations

Madame Germain demande à une élève de lire sa réponse. Elle lit : " 20 multiplié par 400 égal 8 000 et comme..." puis elle s'écarte du texte en disant qu'elle a trouvé 8 162 mais l'enseignante lui demande de lire ce qu'elle a écrit, précisément.

Elle reprend " 20 multiplié par 400 égal 8 000 et comme 8 162 est plus proche de 8 000, je pense que c'est la bonne réponse. "

Un élève demande ce qu'elle a fait de la virgule. L'élève reste muette. Un élève répond à sa place que, quand on multiplie 408,1 par 20, le chiffre 1 passera dans la partie entière. Elle acquiesce : oui, c'est pour ça.

Un élève trouve que la réponse lue n'est pas très bien expliquée. Il a obtenu le même résultat. Madame Germain lui demande de lire sa réponse. Il lit : " je pense que la bonne réponse est 8 162 parce que 408,1 multiplié par 10 est égal à 4 081 et que 4 081 multiplié par 2 est égal à 8 162.

⁵¹ Au sens de " exactement " un.

L'enseignante dit qu'il a multiplié dans sa tête et lui rappelle la consigne. L'élève répond qu'il trouvait que ce n'était pas compliqué de multiplier de tête.

235. Des réponses par encadrement

L'enseignante interroge une autre élève. Elle lit : " 20 fois 400 est égal à 8 000 et 20 fois 500 est égal à 10 000 donc 816,2 est trop petit et 2 816 aussi. Donc 8 162 est le résultat car 8 162 est le plus proche de 8 000. " Un élève demande où est passée la virgule. Un autre lui répond que quand on multiplie ça agrandit donc que la virgule peut disparaître. L'enseignante fait une remarque : " et bien, je crois qu'on n'y est pas encore arrivé ! "

Une élève veut lire sa réponse, l'enseignante accepte : la bonne réponse est 8 162 parce que 20 multiplié par 400 égal 8 000 et 20 multiplié par 500 égal 10 000, et 816,2 est trop petit et 2 816 aussi donc c'est 8 162. L'élève tourmenté par la virgule lève la main mais l'enseignante lui dit que les histoires de virgule seront étudiées la prochaine fois.

236. Retour aux approximations, avec prise en compte de l'erreur

Madame Germain propose à un dernier élève de lire sa réponse pour le dernier produit ⁵². Une élève lit : " j'ai choisi 8 027, il faut que ce soit intérieur car comme on multiplie par 0,92 donc c'est comme une division. " L'enseignante lui demande si 2 087 n'est pas plus petit que 8 725. L'élève répond que oui, mais il ne faut pas que ce soit trop petit. L'enseignante demande aux élèves ce qu'ils pensent de cette réponse. Ils sont plutôt d'accord.

237. La relation entre la multiplication qui réduit et la division

Madame Germain demande à un élève qui a traité cette question de lire sa réponse, de nombreux élèves ne l'ont pas abordée, une élève lit : " tout le monde sait que si on multiplie un nombre par un nombre à virgule ça fait comme une division, le résultat est 8 027.

Un élève pose une question : " penses-tu que si on multiplie par un milliard virgule on ça fera une division ? " Elle répond que non mais qu'elle voulait dire un nombre comme 0,92 c'est-à-dire sans partie entière.

L'enseignante dit qu'elle ne comprend tout de même pas bien pourquoi c'est 8 027 qu'on choisit. Un élève dit maladroitement que si on multipliait par 1 ça reviendrait au même donc si on multiplie par moins que 1 ça fait plus petit. Un élève fait remarquer qu'ils sont tous plus petits et l'enseignante renchérit en disant que du coup ça ne sert à rien de dire que le résultat est plus petit.

Un élève dit alors que multiplier par 1 ça revient au même mais aussi que 0,92 est proche de 1 donc on choisit 8 027 qui est proche de 8 725.

Madame Germain demande aux élèves d'écrire leur nom sur leur feuille et de la lui laisser sur la table avant de partir.

⁵² La fin de la séance approche...

3. Déroulement de la séance n°3

Madame Germain rappelle qu'à la séance précédente, tout le monde n'a pas fait la même chose en même temps.

31. *Discussion d'une affirmation de nombreux élèves : le produit d'un nombre à virgule par un nombre entier est un nombre à virgule*

Elle annonce qu'elle va parler du travail qui a été fait par ceux qui ont travaillé sur papier (par opposition à ceux qui ont travaillé sur un logiciel d'EAO). L'enseignante demande aux élèves d'avoir sous les yeux l'énoncé de cet exercice⁵³ :

Sans effectuer les multiplications, rechercher le résultat qui vous semble exact.			
$234 \times 11,5 = ?$	269,1	9 621	2 691
$9 \times 28,9 = ?$	260,1	602,1	2 061
$20 \times 408,1 = ?$	816,2	8 162	2 816
$8\,725 \times 0,92 = ?$	8 027	802,7	2 087

Vérifier vos pronostics à la calculatrice.

Madame Germain raconte qu'elle a "fait souffrir" les élèves de ce groupe parce qu'elle leur a demandé d'expliquer bien précisément quel était le résultat qu'on pouvait choisir entre les trois résultats qui étaient proposés. Elle rajoute qu'elle ne s'est pas contentée d'un "il semble que, on pourrait penser que..." Elle ajoute qu'elle a posé cette question à d'autres classes, et annonce que, plus tard dans l'année, ils pourront consulter leurs productions pour voir les différents modes d'expression suivant le niveau (classe) des élèves sur cette question-là.

311. Que penser d'une "règle" récurrente dans les réponses des élèves ?

L'enseignante propose de revenir sur une réponse qu'elle a trouvée à plusieurs reprises pour le troisième produit. Certains élèves, annonce-t-elle, ont répondu : "je choisis la réponse 816,2". Elle fait remarquer que, d'après ce qui a été dit, ce choix n'est pas le bon ; des élèves répondent en chœur "non". L'explication donnée disait que comme on multiplie un nombre à virgule par un nombre entier, on doit encore trouver un nombre à virgule. Madame Germain pose la question à la classe : "que pensez-vous de cette affirmation ?" Puis formule à nouveau la question : "y a-t-il règle ou une espèce de règle qui dit que quand on multiplie un nombre à virgule par un nombre entier, on trouve forcément un nombre à virgule ?"

Sept élèves lèvent la main pour répondre à la question posée mais Madame Germain laisse quelques instants pour réfléchir en disant qu'elle pense que plus d'élèves que ces sept là ont une idée sur la validité de cette règle. Elle pose la question autrement : "est-ce que c'est vrai ou est-ce que c'est faux cette règle ?" Cinq mains supplémentaires se lèvent dont une timidement. L'enseignante choisit l'élève timide pour répondre.

312. Une tentative de validation de la règle

L'élève dit qu'elle pense que c'est vrai et l'enseignante lui demande pourquoi ou de donner un exemple montrant que c'est vrai. Mais l'élève reste muette. Madame Germain fait appel à d'autres élèves. Un élève dit qu'il n'est pas d'accord mais l'enseignante le coupe et lui demande de se taire ou de fournir un exemple où la règle semble fonctionner. L'élève dit qu'il pense le contraire mais qu'il peut donner un exemple, l'enseignante le note au tableau sous la dictée de l'élève :

$$28,1 \times 2 = 56,2$$

L'enseignante demande à l'élève précédente si elle est satisfaite de l'exemple proposé. L'exemple satisfait l'élève. Madame Germain lui demande si elle pense qu'avec cet exemple on peut affirmer que quand on multiplie un nombre entier par un nombre à virgule on trouve un nombre à virgule, l'élève répond par la négative.

L'enseignante lui demande alors ce qu'il faudrait faire pour prouver qu'elle a raison de penser que cette règle est correcte. L'élève ne répond pas, l'enseignante demande qui est d'accord avec l'élève. Peu d'élèves lèvent la main.

313. Des cas à envisager pour valider la règle

Un élève affine : "je crois que si on multiplie un nombre à virgule par un nombre inférieur à dix ça donnera un nombre à virgule mais si on le multiplie par un nombre supérieur à dix, ça ne donnera plus un nombre avec virgule." Il explique ainsi que dans l'exemple du manuel ($20 \times 408,1$), il n'y aura pas de virgule au résultat. Madame Germain demande si les élèves sont d'accord avec ce qui vient d'être dit. Les élèves disent en chœur que ce n'est pas très clair.

314. Des tentatives pour infirmer la règle

Un élève pense qu'on n'a pas de moyen d'affirmer que c'est vrai mais qu'on a un moyen d'affirmer que c'est faux. L'élève s'explique en donnant un exemple que l'enseignante note au tableau :

$$4,1 \times 10 = 14$$

Madame Germain lui demande s'il pense que cet exemple suffit pour montrer que la règle est fausse. L'élève répond par l'affirmative : "oui, car il y a au moins une opération où la règle n'est pas vraie." Un élève le corrige : "pas totalement vraie" et l'enseignante commente : "nous voilà dans les totalement vrai, pas tout à fait vrai..."

Un élève propose un autre exemple que l'enseignante écrit au tableau :

$$20,5 \times 2 = 41$$

Madame Germain lui fait remarquer qu'avec l'exemple précédent on avait déjà un nombre entier, l'élève lui répond que là il a multiplié par un nombre inférieur à 10.

315. Quelle conclusion tirer de toutes ces tentatives ?

L'enseignante récapitule sous la forme d'une question : "On en est où ? On a donné un exemple de produit d'un nombre à virgule par un nombre entier qui

⁵³ Exercice n°2 p. 56 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

donne un nombre à virgule puis on a donné après deux exemples du produit d'un nombre à virgule par un nombre entier qui donne un nombre entier. ”

Un élève dit : “ comme la règle dit que toutes les multiplications d'un nombre à virgule par un nombre entier donnent un nombre à virgule et comme on a deux exemples, et qu'on peut en avoir plus, du contraire, la règle est fausse. ”

Madame Germain demande qui est d'accord pour dire que la règle est fausse parce qu'on a trouvé deux exemples. Un seul doit se lever. Une élève rappelle qu'on peut trouver de nombreux exemples comme le premier où on a un nombre décimal. Un élève répond que si la règle était vraie, c'est pour toutes les opérations qu'on aurait un nombre à virgule, donc la règle n'est pas vraie.

316. Comment infirmer une règle, un exemple en dehors des mathématiques

L'enseignante prend un exemple en dehors du domaine des mathématiques : tous les élèves de 6eD⁵⁴ portent des lunettes. Un élève dit que c'est faux, qu'il n'y a pas de règle. L'enseignante répond que si, c'est vrai et donne des exemples d'élèves de la classe qui portent des lunettes.

Un élève lui répond : “ moi, madame, je n'ai pas de lunettes donc votre affirmation est fausse puisqu'il y a au moins un élève qui n'a pas de lunettes. ” Une autre élève, Marie, dit que la règle n'est pas totalement fausse puisqu'il y a des élèves qui ont des lunettes, peut-être pas les autres mais il y a des personnes qui en ont. Un élève lui répond qu'elle dit cela parce qu'elle, elle a des lunettes.

Un élève dit que la règle vraie est “ toutes les personnes qui ont des lunettes ont des lunettes. ” L'enseignante reprend : “ j'ai dit, tous les élèves de 6eD ont des lunettes. ” Plusieurs voix crient “ c'est faux ” et l'enseignante s'adresse à Marie et lui demande si la règle est vraie. Elle répond que non, parce qu'il n'y en a que quelques-uns qui portent des lunettes.

317. Application aux règles mathématiques

L'enseignante repose la question : “ est-ce qu'il est vrai que quand on multiplie un nombre entier par un nombre à virgule, on trouve un nombre à virgule ? ” Plusieurs élèves répondent non. L'enseignante confirme : “ non, il arrive quelques fois qu'on obtienne un nombre entier. ” Elle ajoute que la règle est fausse.

32. Effet sur le produit d'un changement de position de la virgule dans les facteurs

L'enseignante propose de passer à un autre exercice, elle ajoute qu'elle voudrait qu'on réussisse à le terminer⁵⁵.

Il s'agit de retrouver, pour chaque produit, le bon résultat (sans poser les opérations). Puis on écrit les sept égalités.

⁵⁴ La 6eD est la classe de Madame Germain.

⁵⁵ Exercice n°3 p. 58, Page “ Revoyr ” du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

Produits	Résultats
154×23	154×23
$154 \times 2,3$	$0,154 \times 23$
$154 \times 0,023$	$154 \times 0,23$
	$354,2$
	$3,542$
	$35,42$

L'enseignante rajoute que pour faire cet exercice, les élèves devront se rappeler ce qui a été dit à l'exercice précédent, ils essaieront de trouver des ordres de grandeurs du produit, c'est-à-dire de remplacer les deux facteurs du produit par des nombres qui sont proches.

321. Le temps de la réflexion

L'enseignante demande aux élèves de réfléchir, elle note l'énoncé au tableau :

154×23	•	$354,2$
$1,54 \times 23$	•	$3,542$
$154 \times 2,3$	•	$3,542$
$0,154 \times 23$	•	$35,42$
154×23	•	$35,42$
$154 \times 0,023$	•	
$154 \times 0,23$	•	

322. Le produit des deux entiers

Madame Germain interroge une élève. Elle répond 154 multiplié par 23 égal 3 542. L'enseignante l'envoie relier les deux nombres en expliquant pourquoi elle les relie. Elle explique qu'elle les relie parce qu'il y a deux nombres entiers donc on doit obtenir un nombre entier. C'est logique répond-elle, si on multiplie des nombres à virgule, on trouve un nombre à virgule. L'enseignante, sans relever la confusion logique, fait remarquer que là, on a des nombres entiers. L'élève répond que c'est pareil et l'enseignante propose de continuer.

323. Le produit $154 \times 2,3$ avec des opérateurs

L'élève propose de relier $154 \times 2,3$ avec 354,2 parce qu'on a divisé par 10 (pour passer de 23 à 2,3) et là aussi (pour passer de 3 524 à 354,2). Madame Germain demande aux élèves s'ils sont d'accord avec l'explication. Certains trouvent que ce n'est pas très clair, l'enseignante demande à l'élève de reprendre son explication. L'élève répète qu'on a divisé 23 par dix, donc que le résultat doit être divisé par 10. L'enseignante complète : “ si on multiplie un nombre par un nombre dix fois plus petit, on trouvera un résultat dix fois plus petit. ” Les élèves approuvent et l'enseignante autorise à relier les deux nombres.

Elle demande une autre explication avec la même réponse. Une élève déclare que ça dépend du nombre de chiffres qu'il y a derrière la virgule au produit. L'enseignante demande de rappeler l'instruction donnée au début de l'exercice, c'est-à-dire d'utiliser les ordres de grandeurs, puis elle ajoute que le nombre de

chiffres après la virgule est une petite recette qu'on verra plus tard, qu'on utilisera mais qui n'explique pas le pourquoi des choses.

323bis. Le produit $154 \times 2,3$ avec des approximations

Une élève commence à proposer des approximations mais recourt aussi à d'autres arguments si bien que le raisonnement est impossible à suivre et des élèves lèvent la main avant même qu'elle ait terminé. Madame Germain ne les interroge pas mais aide cette élève à formuler un raisonnement fondé sur les ordres de grandeurs :

- quelle valeur tu proposes pour arrondir 2,3 ?
- trois
- les autres proposent deux, est-ce que tu serais d'accord pour l'arrondir à deux ?
- oui
- 154 c'est près de ?
- 200
- je dirais plutôt 150, oui ?
- oui
- 2,3 c'est près de 2, donc 150 multiplié par 2 c'est près de ?
- euh...
- les autres proposent 300, est-ce que tu es d'accord ?
- oui
- alors est-ce que 300, c'est bien près de 354,2 ? Est-ce que c'est plus près de celui là que des autres ?
- oui
- donc on choisit 354,2, c'est ça que tu veux dire ?
- oui

324. Le produit $1,54 \times 23$ avec des opérateurs puis avec les approximations

Un élève propose un autre résultat : $1,54 \times 23 = 35,42$. L'enseignante demande de justifier. Il répond que $154 \times 23 = 3\,542$ et $1,54$ c'est 154 divisé par 100 donc le résultat sera divisé par 100 aussi. L'enseignante demande l'avis des autres élèves qui sont d'accord, elle autorise donc l'élève à se rendre au tableau pour relier les deux nombres.

Madame Germain demande de retrouver le résultat par les valeurs arrondies mais les élèves ne répondent rien. L'enseignante reconnaît que les élèves veulent faire autrement mais, au risque de paraître obstinée, elle tient à ce qu'ils utilisent cette méthode aussi. Un élève propose d'arrondir $1,54$ à 1 mais d'autres élèves réclament l'arrondi à 2 et il accepte. Il continue en disant qu'il n'est pas utile d'arrondir 23, qu'on trouve un produit arrondi de 46 et que $35,42$ est la solution la plus proche de cette valeur arrondie.

L'enseignante demande si les autres sont d'accord avec ça, ils répondent par l'affirmative, elle demande de continuer.

325. Le produit $154 \times 0,23$ avec les approximations

L'élève propose 35,42 comme résultat de $154 \times 0,23$. Il argumente en disant que forcément ça donnera le même résultat que précédemment. L'enseignante

demande d'expliquer pourquoi. Il dit qu'il va le faire avec les arrondis, il approche 154 par 200 et $0,23$ par 0. D'autres élèves se mettent à rire. L'enseignante lui demande combien font deux cents multipliés par zéro. L'élève répond deux cents erreur, il propose d'arrondir $0,23$ à 1 mais ça ne lui plaît pas. Un élève propose 0,2 mais c'est l'enseignante qui termine en multipliant par 0,1 puis par 2 : $154 \times 0,1$ c'est près de 15 donc en multipliant par 0,2 ça fera près de 30.

326. Le produit $15,4 \times 23$ avec les opérateurs

Madame Germain propose de passer au suivant. Un élève propose d'associer $15,4 \times 23$ à $354,2$ parce que 154 est divisé par 10 donc le résultat (3 542) est aussi divisé par 10. Il ajoute qu'on remplace $15,4$ par 15 puis 23 par 20 et que 15×20 c'est 300. L'enseignante lui demande le résultat qu'il avait proposé, il répond 354,2, elle lui demande si cela correspond, il répond par l'affirmative.

Une élève propose : " avec la même logique, $0,154 \times 23$ ça ferait 3,542. " L'enseignante lui demande de justifier. Elle répond qu'on a divisé par 1 000 le nombre 154 donc le résultat est divisé par 1 000.

327. Le produit $0,154 \times 23$ avec les approximations

L'enseignante demande un raisonnement avec les ordres de grandeur ou les arrondis. L'élève dit 20 multiplié par 0,2 mais ne trouve pas le produit. Un élève trouve 4 mais le dit timidement. L'enseignante répète à haute voix et demande à la classe si elle est d'accord. Pas de protestation mais l'enseignante propose de le faire. Elle demande combien font $2 \times 0,2$, les élèves proposent 0,4 puis elle demande le double quelques décimaux, les élèves savent le déterminer et l'enseignante le dit : " ça vous savez faire. " Elle demande alors combien font $20 \times 0,2$, elle indique que pour multiplier par 20 on peut déjà multiplier par 10 et puis multiplier par 2 ou le contraire. Ainsi, dit elle, on trouve bien 4.

327bis. Le produit $0,154 \times 23$ avec des déplacements de virgule

Pour ce même calcul, une élève, Marie, propose des déplacements de virgule, elle transforme $0,154 \times 23$ en $1,54 \times 2,3$ et dit que $1,5 \times 2$ se rapproche de 3 puis propose de relier $0,154 \times 23$ à 3,542. Un grand silence des élèves de la classe suit cette explication. Certains élèves manifestent leur incompréhension : hou là là... L'enseignante lui propose de reprendre. L'élève ne change rien à son explication et l'enseignante propose à un autre élève, Vincent, de répéter, avec ses mots à lui, l'explication qui vient d'être donnée.

Vincent va au tableau et écrit la transformation que Marie effectue :

$$0,154 \times 23 = 1,54 \times 2,3$$

↳ 3

Puis il explique que Marie remplace $1,54$ par $1,5$ puis $2,3$ par 2 donc elle trouve 3 et choisit, en conséquence la réponse 3,542. Marie est d'accord avec cette interprétation de sa pensée. Les autres élèves déclarent qu'ils comprennent

l'explication de Vincent. Donc, conclut l'enseignante, ils comprennent aussi celle de Marie... Puis elle propose de continuer.

328. Le produit $154 \times 0,023$ avec les opérateurs

Un élève, pour $154 \times 0,023$, propose 3,542 qu'il obtient en divisant par 10 le résultat de $154 \times 0,23$ parce que 0,023 c'est 0,23 divisé par 10. Son explication est un peu confuse et certains élèves réagissent vivement. L'enseignante déclare qu'elle trouve que cet élève a expliqué. Puis elle propose à un autre élève de reprendre cette explication.

Un élève se propose mais il n'y arrive pas seul, l'enseignante l'aide et l'élève reprend l'explication en donnant explicitement le résultat de $154 \times 0,23$ qui est divisé par 10 pour donner le résultat de $154 \times 0,023$.

La classe déclare être d'accord. L'enseignante demande aux élèves d'ouvrir leurs cahiers.

33. *Même type de situation : retrouver des produits égaux*

Madame Germain demande aux élèves de faire un exercice ⁵⁶. Elle précise qu'il faut bien regarder les produits proposés avant de se lancer dans de grandes explications.

Sans effectuer les opérations, retrouver les produits égaux :

$$a = 12,3 \times 4,56$$

$$b = 1\,230 \times 0,456$$

$$c = 0,123 \times 456$$

$$d = 12,3 \times 45,6$$

$$e = 123 \times 4,56$$

$$f = 1,23 \times 45,6$$

331. Le temps de la recherche

L'enseignante laisse les élèves chercher en observant leurs productions, elle vient nous voir pour nous dire qu'elle avait donné l'exercice précédant à des "cinquième" dont très peu d'élèves, ont utilisé les ordres de grandeurs et dont beaucoup se sont trompés.

Un élève pose une question sur la présentation de l'exercice : faut-il associer les éléments des deux colonnes ? L'enseignante répond que ce n'est qu'une commodité de présentation, les associations doivent se faire entre tous les produits.

Madame Germain demande à un élève qui a terminé s'il est capable d'expliquer sa réponse. L'élève commence une explication, l'enseignante lui propose alors d'essayer de l'écrire.

L'enseignante laisse quelques minutes aux élèves sans rien dire, la classe est muette, les élèves travaillent...

332. Où en sont les élèves

L'enseignante signale que certains ont déjà trouvé des ressemblances, certains ont déjà terminé et que ces derniers doivent essayer de rédiger des explications. L'enseignante demande qui n'a trouvé aucune ressemblance, une élève est concernée. Madame Germain demande qui pense que les multiplications se

⁵⁶ Exercice n°4, p. 62 du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

répartissent selon deux résultats possibles, aucun élève ne lève la main. Trois résultats possibles, six élèves lèvent la main. Quatre ou plus résultats différents, aucun élève de lève la main.

39. *Du travail à la maison*

L'enseignante demande d'arrêter la recherche et de prendre le cahier de texte, elle dicte :

– Remplacer les nombres de l'exercice n°4 p. 62 par des valeurs arrondies entières ou au dixième si les valeurs sont inférieures à 1. Retrouver réponses données en classe.

– Exercice n°6 p. 62 ⁵⁷ ;

Calculs utiles

Ranger ces produits par ordre croissant : $T = 42 \times 1,09$; $U = 42 \times 0,95$; $E = 42 \times 1,1$; $S = 420 \times 0,1$; $J = 42 \times 0,9$.

4. Déroulement de la séance n°4

41. *Reprise l'exercice sur les produits égaux : approcher les produits*

L'enseignante envoie un élève au tableau pour écrire.

411. Dictée de nombres décimaux

Elle dicte : "petit a égal 12 virgule 3 multiplié par 4 et 56 centièmes" l'élève écrit :

$$a = 12,3 \times 4 \text{ et}$$

L'enseignante l'interrompt et lui dit : "je pensais que tu allais écrire quatre virgule cinq six" et l'élève corrige :

$$a = 12,3 \times 4,56$$

L'enseignante reprend la dictée : "b égal mille deux cent trente multiplié par quatre cent cinquante-six millièmes. L'élève écrit

$$B = 1230 \times 0,456$$

De même : "123 millièmes multipliés par 456". Et l'enseignante demande à l'élève d'accélérer.

$$C = 0,123 \times 456$$

Elle dicte la suite de façon traditionnelle : "douze virgule trois" ou en indiquant la valeur de la partie décimale : "quatre et cinquante-six centièmes"

$$D = 12,3 \times 45,6$$

$$E = 123 \times 4,56$$

$$F = 1,23 \times 45,6$$

⁵⁷ Du manuel *Cinq sur Cinq* 6e (1997), Paris : Hachette.

412. Majuscule, minuscule

Madame Germain demande à l'élève de remplacer les lettres par des lettres minuscules. En mathématiques, dit-elle, on utilise le plus souvent des majuscules pour indiquer les points et des minuscules pour indiquer les nombres.

L'élève commence à corriger le "a" mais les élèves lui indiquent que celui là est le seul à être bien écrit, il corrige alors les autres.

413. Remarque sur les chiffres des nombres

L'enseignante demande qui veut faire une remarque sur les chiffres des nombres qui sont écrits. Un élève dit qu'à part la virgule et les zéros, c'est les mêmes opérations. L'enseignante dit qu'elle n'a pas demandé une remarque sur les opérations mais une remarque sur les chiffres.

Un élève dit que, si on ne tient pas compte du zéro et de la virgule, ce sont les mêmes chiffres et dans le même ordre.

Madame Germain précise même que le premier facteur comporte les chiffres 1, 2 et 3 dans cet ordre et que le deuxième facteur comporte les chiffres 4, 5 et 6 dans cet ordre. Elle ajoute que si l'on écrivait ni les zéros ni les virgules, on aurait à chaque fois le même calcul à faire.

414. Réponse aux questions avec les arrondis

L'enseignante rappelle que cet exercice avait déjà été cherché en classe et qu'elle avait demandé de le reprendre en remplaçant les nombres par leurs valeurs arrondies à l'unité. Elle demande à l'élève au tableau d'écrire sous la dictée de ses camarades. Puis elle indique le modèle pour démarer :

$$a \approx 12 \times 4$$

$$b \approx 1230 \times 0,5$$

Un élève interrompt la dictée à cause de problèmes d'arrondi. Il propose d'écrire 5 pour arrondir 4,56 plutôt que 4 car 56 est plus près de 100 que de 0. L'enseignante confirme en disant, autrement, que c'est plus près de 60 que de 50. L'élève au tableau, à la demande de l'enseignante remplace quatre par cinq. Puis note sous la dictée d'autres élèves les produits suivants :

$$a \approx 12 \times 5$$

$$b \approx 1230 \times 0,5$$

$$c \approx 0,1 \times 456$$

$$d \approx 12 \times 46$$

$$e \approx 120 \times 5$$

Un élève pose une question : " 125 ce serait mieux que 120 ? " L'enseignante lui demande si 120 est une valeur arrondie de 123, l'élève répond non mais l'enseignante lui dit que si. Elle lui demande alors si 125 est une valeur arrondie de 123. Il répond par l'affirmative. Puis l'enseignante précise : si on veut arrondir à l'entier le plus proche, on dira 123, mais ce n'est pas faux d'avoir mis 120 ou 125.

Elle demande alors à l'élève qui a donné 120, si elle est d'accord pour arrondir plus précisément en prenant 123, l'élève accepte et l'élève au tableau corrige :

$$e \approx 123 \times 5$$

$$f \approx 1 \times 46$$

Madame Germain demande si tout le monde est bien d'accord avec tous les arrondis qui ont été écrits. Un élève prend la parole à propos du produit f . Il trouve qu'en multipliant par 1 ça ne va pas changer alors qu'en multipliant par 1,23 ça va augmenter donc il voudrait mettre par 1,5 ou 2. L'enseignante rappelle la consigne et que la réponse donnée respecte bien cette consigne : arrondir à l'unité ou au dixième si la valeur est inférieure à 1. Une élève ajoute qu'en prenant 46 au lieu de 45,6 on agrandit donc que ça l'augmente. Madame Germain fait remarquer que l'un ne compense pas tout à fait l'autre mais que les arrondis, c'est comme ça.

415. Des calculs de tête sur les valeurs arrondies

Madame Germain propose de compléter les calculs par ceux qu'on peut faire de tête, en écrivant une flèche au bout de la ligne de calcul.

L'enseignante demande si les élèves connaissent des techniques pour multiplier par 5. Un élève propose de calculer 10×5 puis 2×5 et d'ajouter, un autre de faire une addition répétée mais personne ne propose la méthode attendue par l'enseignante qui demande si personne n'a vu que pour multiplier par 5 on peut multiplier par 10 puis diviser par 2. Une élève dit que si, elle croit... Puis l'enseignante guide ce calcul et l'élève au tableau écrit le résultat :

$$a \approx 12 \times 5 \rightarrow 60$$

Pour multiplier par 0,5 un élève propose de diviser par 5. L'enseignante demande si les autres sont d'accord. Les avis sont partagés mais un élève dit que c'est peut-être plutôt par deux qu'il faut diviser. L'enseignante lui demande pourquoi. Il dit que c'est parce que 0,5 est la moitié de 1 qu'il faut prendre la moitié. Puis un élève propose 615 pour la moitié de 1230.

$$b \approx 1230 \times 0,5 \rightarrow 615$$

Un élève dit, et l'enseignante répète, que multiplier par 0,1 c'est comme diviser par 10. Il propose alors 45,6

$$c \approx 0,1 \times 456 \rightarrow 45,6$$

Madame Germain demande combien font 12×46 mais les élèves soupirent et l'enseignante admet que cela commence à être plus compliqué. Un élève propose d'arrondir encore une fois mais l'enseignante ne relève pas sa proposition. Une élève propose de faire 46×10 et 46×2 et d'ajouter. L'enseignante partage la tâche : certains mémorisent le premier produit pendant que d'autres mémorisent le second. Elle demande alors d'ajouter 460 et 92 ce qui donne 552.

$$d \approx 12 \times 46 \rightarrow$$

Un élève propose de préciser par un signe + ou - si le vrai résultat est plus grand ou plus petit que la valeur arrondie. L'enseignante accepte et l'élève au tableau écrit sous la dictée :

$$a \approx 12 \times 5 \rightarrow 60 -$$

$$b \approx 1230 \times 0,5 \rightarrow 615 -$$

$$c \approx 0,1 \times 456 \rightarrow 45,6 +$$

$$d \approx 12 \times 46 \rightarrow 552 -$$

Madame Germain lui fait remarquer que pour 552 on a mis moins que 12,3 avec 12 mais plus que 45,6 avec 46 et lui demande qui l'emporte. L'élève ne sait pas répondre et l'enseignante lui fait remarquer que ce problème a été rencontré dès la première ligne. L'enseignante fait remarquer que ce n'est pas si simple. Elle demande alors à l'élève au tableau d'effacer ces signes qui nous encombreront plutôt qu'autre chose. Puis elle passe à 123×5 en proposant de diviser par 2.

$$e \approx 123 \times 5 \rightarrow 615$$

$$f \approx 1 \times 46 \rightarrow 46$$

42. Exercice sur les produits égaux : passage des approximations aux valeurs exactes

421. Justification d'une méthode qui n'est pas généralisable

Madame Germain fait remarquer qu'on a arrondi mais on sait que quand on va multiplier (sous entendu, les valeurs exactes) on trouvera, à la fin, à la dernière ligne de la multiplication, exactement les mêmes chiffres puisque dans les multiplications il y a exactement les mêmes chiffres. Cela veut dire, ajoute-t-elle, que si on trouve des valeurs approchées à peu près les mêmes, cela veut dire que les valeurs exactes seront, elles, exactement les mêmes, puisqu'on trouve les mêmes chiffres. L'enseignante demande alors de mettre ensemble les multiplications.

422. Premiers résultats

Les élèves proposent successivement : b et e puis c et f puis a et f. Une élève fait remarquer que 46 et 60 sont, à son avis, assez éloignés mais elle accepte de garder l'association. Un élève propose d et b. Madame Germain propose de faire une liste, l'élève écrit, aidé par l'enseignante :

$$b, e, d$$

$$c, f, a$$

423. Difficultés avec la transativité de l'égalité : première rencontre

Mais certains élèves se manifestent, un pense que a n'est pas égal à c. L'élève pense que a, f et c ne donneront pas le même résultat. L'enseignante lui fait remarquer qu'on ne parle pas des valeurs approchées mais des "vraies valeurs" du début. Elle demande à la classe qui pense que a, f et c vont donner le même résultat. Puis elle pose la même question pour b, e et d. Enfin, elle demande d'expliquer pourquoi ils vont donner le même résultat.

Une élève dit qu'elle est gênée parce qu'on n'a pas "arrondi pareil". Madame Germain rappelle qu'on a dit, en commençant, que les chiffres des nombres étaient les mêmes, donc que les chiffres des résultats seront identiques et dans le même

ordre, seul l'emplacement de la virgule différenciera ces nombres. Elle conclut que si on trouve des valeurs approchées proches les unes des autres, c'est qu'on trouvera le résultat pour de bon. Puis elle pose la question : "est-ce que ce qui a été trouvé, ici, correspond avec ce qui a été trouvé en classe la dernière fois ?" Puis elle ajoute qu'elle sait que ce n'est pas le cas pour certains, certains n'avaient pas mis b avec e et d.

424. Le cas de la deuxième égalité

Elle interroge une élève qui avait mis b à part. Mais l'élève n'arrive pas à s'expliquer. L'enseignante interroge un autre élève mais qui n'y arrive pas non plus. Madame Germain demande alors aux élèves de dire comment ils avaient fait pour faire l'exercice quand ils étaient en classe.

43. Exercice sur les produits égaux : en utilisant les opérateurs

431. Première égalité : une multiplication et une division qui se compensent

Un élève explique que, par exemple, il a associé a et f parce que pour passer de 12,3 à 1,23 la virgule est décalée d'un rang vers la gauche mais que pour passer de 4,56 à 45,6 la virgule est décalée d'un rang vers la droite. L'enseignante reprend l'explication de l'élève en écrivant au tableau :

$$12,3 \times 4,56 = 1,23 \times 45,6$$

Puis elle ajoute : "pour passer de 12,3 à 1,23 on a divisé par 10 et pour passer de 4,56 à 45,6 on a multiplié par 10."

Elle demande aux autres s'ils sont d'accord sur cette façon de penser. Les élèves disent "oui" en chœur. Madame Germain demande s'il y en a d'autres pour lesquelles on pourrait faire la même chose.

432. Deuxième égalité établie avec la même méthode

Un élève dit et l'enseignante écrit :

$$1\,230 \times 0,456 = 123 \times 4,56$$

Il explique ensuite qu'entre 1 230 et 123 on a divisé par 10 et qu'entre 0,456 et 4,56 on a multiplié par 10. L'enseignante ajoute :

$$12,3 \times 4,56 = 1,23 \times 45,6 \rightarrow a = b$$

$$1\,230 \times 0,456 = 123 \times 4,56 \rightarrow b = e$$

433. Troisième égalité, même méthode

Puis Madame Germain demande d'autres exemples. Une élève propose et argumente l'égalité suivante que l'enseignante écrit :

$$0,123 \times 456 = 1,23 \times 45,6 \rightarrow c = a$$

434. Difficultés avec la transativité de l'égalité : deuxième rencontre

L'enseignante fait remarquer que $a = c$ et $a = f$ et demande si l'on peut en conclure que $c = f$. Certains disent oui et l'enseignante demande ce qui manque.

Elle fait remarquer à un élève qu'elle ne l'entend pas beaucoup aujourd'hui, l'élève répond "bof" et l'enseignante lui demande si ce qu'on fait ne lui plaît pas, il répond de façon évasive, l'enseignante en prend acte.

435. Quatrième égalité, même méthode

Une élève propose de continuer, elle dit et explique alors que l'enseignante écrit :

$$12,3 \times 45,6 = 123 \times 4,56$$

Madame Germain conclut qu'il y a seulement deux résultats.

44. *Bilan de l'exercice : de la décontextualisation à la généralisation*

Elle demande une conclusion au travail qui a été fait là.

441. Tentative de décontextualisation

Une élève dit : "on a pris deux chiffres, euh, deux nombres, on les a comparés, on les a regardés et on a pris par exemple 12,3 sur l'opération de 12,3..." L'enseignante la coupe en disant que là elle ne résume pas.

442. Une décontextualisation difficile

Un élève semble découragé, Madame Germain demande pourquoi, il répond qu'on n'arrivera jamais à résumer tout ça, l'enseignante lui répond qu'on peut y arriver en une phrase. Certains sont étonnés.

443. Tentative de généralisation

Un élève se propose : "pour prouver les égalités égaux, enfin les égalités égales, on a multiplié par 10 ou divisé par 10 les nombres..." L'enseignante dit que ça commence à venir mais que ce n'est pas encore tout à fait ça. Un élève veut reprendre le même début bien qu'il ne le retrouve plus et rajouter à la fin "qu'on multiplie et qu'on divise les nombres qui comportent les mêmes chiffres"

444. Généralisation sur un exemple

Madame Germain propose de partir seulement d'un exemple pour faire une phrase simple. Par exemple : $12,3 \times 4,56$. Elle ajoute : "on a deux nombres à multiplier, on trouve un certain résultat, on trouvera le même résultat si on fait, quoi ?" Un élève dit "si on déplace la virgule du rang vers la droite d'un côté on la déplace d'un rang vers la gauche de l'autre côté." L'enseignante demande ce que veut dire déplacer la virgule. Des élèves répondent que ça veut dire multiplier ou diviser. Madame Germain reprend : "on ne change pas le résultat si on multiplie un des deux nombres par 10 et si on divise l'autre par 10." L'enseignante demande comment on appelle les deux nombres qu'on multiplie dans un produit. Un élève répond qu'on les appelle les facteurs.

445. Première étape vers l'institutionnalisation

Madame Germain demande de faire une phrase bien belle pour en faire une règle qu'on utilisera quand on en aura besoin. Les élèves aident de l'enseignante

élaborer une phrase que l'enseignante écrit au tableau en précisant qu'on ne doit pas l'écrire sur le cahier :

On ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10.

Exemple

L'enseignante demande alors de prendre une feuille et d'écrire en titre (elle écrit le titre au-dessus de la phrase pour obtenir la disposition suivante) :

« Petites règles pour faciliter les multiplications »

* On ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10.

Exemple : $12,3 \times 45,6 = 123 \times 4,56$.

Madame Germain demande de mettre une petite étoile devant la phrase pour indiquer qu'on écrira d'autres petites règles pour faciliter les multiplications.

5. Déroulement de la séance n°5

51. *Quelques conclusions de la séance précédente :*

Madame Germain débute la séance en demandant aux élèves de rappeler ce qui a été vu la dernière fois. Une première élève demande la parole mais ne sait plus de quoi il était question. L'enseignante lui fait remarquer qu'elle fait perdre le temps de la classe.

511. Des ordres de grandeurs aux valeurs exactes

Un élève dit qu'on avait arrondi les nombres et qu'on avait calculé, on avait eu une valeur approchée du produit et il ajoute, aidé par l'enseignante, qu'on avait utilisé ces valeurs approchées, on a regardé si elles étaient du même ordre. L'enseignante termine en disant qu'on en avait conclu que ces calculs donneraient le même résultat parce qu'on avait remarqué au début qu'on aurait les mêmes chiffres. Elle répète : les mêmes chiffres et le même ordre de grandeur ça veut dire le même résultat.

512. Des règles pour simplifier une multiplication

Madame Germain continue, on avait fabriqué des petites règles pour rendre plus simples certaines des multiplications qu'on avait à faire même une fois qu'on avait remplacé les nombres compliqués par des ordres de grandeur ou des valeurs approchées.

513. Multiplier par moins que un

Un élève ajoute qu'il avait été dit que quand on multiplie par zéro virgule quelque chose on trouvait un résultat inférieur au nombre dont on était parti. L'enseignante note au tableau en élaborant la phrase avec les élèves :

Multiplier par un nombre inférieur à 1, ou dont la partie entière est zéro, donne un résultat inférieur au nombre de départ.

L'enseignante demande comment on peut dire qu'un nombre est de la forme zéro virgule quelque chose. Des élèves disent que le nombre est inférieur à 1. Elle demande comment on appelle le zéro dans ce nombre, elle les aide à dire qu'on l'appelle la partie entière du nombre. On pourrait donc remplacer la règle par "quand on multiplie par un nombre dont la partie entière est zéro..."

514. Confusion entre "multiplier par 0,2" et "diviser par 20"

Madame Germain propose d'étudier un exemple⁵⁸ $235 \times 0,2$ qu'elle note au tableau.

Exemple : $235 \times 0,2 =$

Un élève propose 15,52, l'enseignante note cette réponse au tableau ainsi que celles que proposent d'autres élèves : un deuxième propose 120, un troisième 11,25, un dernier 11,75. Le premier revient sur sa réponse pour dire qu'il a dit une bêtise il veut remplacer 15,52 par 11,75.

Madame Germain demande à la classe ce qu'elle pense des réponses proposées. La majorité penche pour 11,75.

515. Multiplier par 0,2 c'est multiplier par 2 puis diviser par 10

L'enseignante demande comment on peut lire le nombre 0,2. Des élèves répondent deux dixièmes, l'enseignante écrit :

$$235 \times 0,2 = 235 \times 2 \text{ dixièmes}$$

Puis elle demande comment on pourrait écrire autrement le nombre deux dixièmes. Un élève propose de l'écrire en forme de fraction c'est-à-dire $\frac{2}{10}$, un trait, et 10. Madame Germain écrit :

$$235 \times 0,2 = 235 \times 2 \text{ dixièmes} = 235 \times \frac{2}{10}$$

Puis l'enseignante demande ce qu'on fait quand on multiplie par deux dixièmes, elle précise que certainement on multiplie par 2 et elle les laisse continuer. Un élève propose de diviser par 20. L'enseignante répond que non, on ne divise pas par 20, ce n'est pas écrit divisé par 20 mais divisé par... Des élèves terminent la phrase : 10.

Madame Germain écrit au tableau :

$$235 \times 0,2 = 235 \times 2 \text{ dixièmes} = 235 \times \frac{2}{10} = 235 \times 2 \cdot \frac{1}{10}$$

Multiplier par 0,2 c'est multiplier par 2 puis diviser par 10.

⁵⁸ Exemple créé par le professeur.

Puis l'enseignante demande combien on trouvera si on fait comme ça. Une élève propose 24 puis se rétracte et dit 48, se rétracte encore et dit finalement 47. L'enseignante lui demande comment elle s'y prend. Elle répond que 235 multiplié par 2 ça fait 470, et 470 divisé par 10, on enlève le zéro et ça fait 47. L'enseignante demande à la classe si elle est d'accord. Des élèves répondent par l'affirmative.

Mais alors, Madame Germain fait remarquer que ce n'est pas le résultat pour lesquels de nombreux élèves étaient d'accord tout à l'heure et elle leur demande ce qu'ils avaient fait pour trouver 11,75. Certains répondent qu'ils ont divisé par 20. L'enseignante reprend : "vous avez divisé par 2 et encore par 10." Elle les met en garde, multiplier par 0,1 c'est diviser par 10 mais multiplier par 0,2 ce n'est pas diviser par 20. Puis elle écrit :

Multiplier par 0,1 c'est diviser par 10.

Madame Germain rappelle oralement au passage que multiplier par 0,01 c'est diviser par 100. Puis elle reprend en disant que 0,2 c'est deux fois un dixième donc multiplier par 0,2 c'est d'abord multiplier par 2 et ensuite diviser par 10.

516. De nouvelles petites règles

L'enseignante demande alors aux élèves de ressortir leur feuille sur laquelle ils avaient écrit la petite règle. Elle demande à une élève de lire ce qui est écrit.

L'élève lit : on ne change pas le résultat d'un produit si on multiplie un des facteurs par 10 et qu'on divise l'autre par 10.

Madame Germain demande de mettre une nouvelle petite étoile et d'écrire "multiplier par 0,1 c'est diviser par 10" puis "multiplier par 0,2 c'est multiplier par 2 puis diviser par 10." Elle demande de noter aussi la remarque de tout à l'heure : "multiplier par un nombre inférieur à 1, ou dont la partie entière est zéro, donne un résultat inférieur au nombre de départ." Puis elle laisse aux élèves le temps de copier des "petites règles". Un élève demande s'il faut aussi copier l'exemple, l'enseignante lui répond qu'il le faut et le dit à la classe. L'enseignante propose de rajouter des parenthèses à la ligne de l'exemple. De nombreux élèves approuvent :

$$235 \times 0,2 = 235 \times 2 \text{ dixièmes} = 235 \times \frac{2}{10} = (235 \times 2) \cdot \frac{1}{10}$$

52. Interprétation de la multiplication de deux décimaux

Pendant que les élèves recopient l'exemple, l'enseignante écrit une multiplication au tableau⁵⁹ $2,35 \times 7,2$. Quand ils ont terminé, elle dit qu'elle a écrit une multiplication au tableau, les deux facteurs de ce produit sont des nombres décimaux écrits sous forme de nombre à virgule : deux virgule trois cinq, et sept virgule deux. Elle dit qu'elle va les multiplier et pour ça elle voudrait utiliser ce qu'elle sait déjà sur les nombres entiers.

⁵⁹ Exemple créé par le professeur.

521. Réécriture des facteurs décimaux pour faire apparaître des entiers

Madame Germain demande si l'on peut remplacer 2,35 par 235 multiplié par quelque chose.

Un élève répond 235 multiplié par 72, l'enseignante en convient, puis elle écrit :

$$2,35 \times 7,2 = 235 \quad \times 72$$

tout en demandant ce qu'il faut mettre au début pour avoir les "deux virgule trois cinq" qu'on avait au départ. Des élèves répondent en chœur 0,01 mais l'effet de chœur fait qu'on ne peut pas être sûr que personne ne dit 0,1 ou 0,001 et l'enseignante écrit :

$$2,35 \times 7,2 = 235 \times 0,01 \times 72 \times 0,1$$

522. Peut-on modifier l'ordre des facteurs d'un produit ?

Madame Germain demande enfin si elle peut regrouper les facteurs du produit, en précisant que, maintenant, il y en a quatre. On est obligé de les laisser dans cet ordre là ? Elle formule à nouveau la question, est-ce qu'on trouvera le même résultat à la fin si on effectue la multiplication dans un autre ordre. Des élèves disent qu'on trouvera la même chose. Mais certains doutent.

L'enseignante propose de prendre un exemple pour lequel on peut calculer de tête. Elle écrit au tableau :

$$2 \times 3 \times 5 \quad \text{et} \quad 2 \times 5 \times 3$$

en demandant si on trouvera la même chose en effectuant $2 \times 3 \times 5$ et $2 \times 5 \times 3$. Les élèves disent qu'on trouvera la même chose, l'enseignante demande quel résultat, ils répondent 30.

523. Regrouper les facteurs pour multiplier les entiers

Puis Madame Germain reprend sa question, en montrant le calcul précédent, elle demande si on trouvera la même chose en changeant l'ordre des nombres qu'on a écrits, en voulant toujours trouver le même résultat.

Un élève propose et l'enseignante écrit :

$$\begin{aligned} 2,35 \times 7,2 &= 235 \times 0,01 \times 72 \times 0,1 \\ &= 235 \times 72 \times 0,01 \times 0,1 \end{aligned}$$

L'enseignante demande à nouveau aux élèves s'ils pensent toujours qu'on trouvera le même résultat en effectuant le calcul dans cet ordre là. Les élèves sont d'accord. L'enseignante demande s'ils savent combien font $0,01 \times 0,1$. Certains répondent non, une élève dit 0,1, d'autres disent 0,001.

L'enseignante explique le calcul : 0,01 c'est un centième, 0,1 c'est un dixième et un centième multiplié par un dixième c'est un millième qui s'écrit 0,001.

Elle récapitule : "pour multiplier 2,35 par 7,2, je peux commencer par multiplier 235 par 72, et ça je sais le faire, et vous aussi. Et après il me restera à

multiplier par un millième, et multiplier par un millième, c'est comme..." Diviser par 1 000 répondent les élèves. Elle dit en écrivant au tableau :

$$\begin{aligned} &= 235 \times 72 \times 0,001 \\ &= 235 \times 72 \cdot 1\ 000 \end{aligned}$$

Multiplier 2,35 par 7,2 c'est multiplier 235 par 72 puis diviser par 1 000
Puis Madame Germain demande si tout le monde est d'accord avec ça. Des élèves répondent oui.

53. Calcul du produit de deux décimaux

531. La multiplication des entiers

Madame Germain demande alors à un élève de venir au tableau pour effectuer la multiplication 235×72 . Une élève va au tableau, elle pose et elle effectue à haute voix la multiplication :

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 5 \\ \times 7\ 2 \\ \hline 4\ 7\ 0 \\ 1\ 6\ 4\ 5\ 0 \end{array}$$

L'enseignante demande si quelqu'un peut dire pourquoi elle a mis un zéro à côté du cinq. Un élève dit c'est à cause de la dizaine, une autre dit que c'est pour montrer qu'on multiplie 235 par 70. L'enseignante reprend cette explication et demande si tout le monde le sait. Des élèves répondent par l'affirmative. Puis l'élève effectue l'addition des produits partiels

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 5 \\ \times 7\ 2 \\ \hline 4\ 7\ 0 \\ 1\ 6\ 4\ 5\ 0 \\ \hline 1\ 6\ 9\ 2\ 0 \end{array}$$

532. Placer la virgule du produit en divisant

Madame Germain reprend, on a multiplié 235 par 72, pour multiplier 2,35 par 7,2, il faut maintenant qu'on divise par 1 000 le résultat. Alors elle demande d'écrire en dessous ou à côté : 16 920 divisé par 1 000... L'élève commence à poser l'opération et l'enseignante lui dit que cette fois elle peut, peut-être, se contenter de l'écrire en ligne.

$$1\ 6\ 9\ 2\ 0 \cdot 1\ 0\ 0\ 0 = 1\ 6,9\ 2\ 0$$

L'enseignante dit à la classe que l'élève a écrit 16,920 mais qu'elle n'est pas sûre. Des élèves disent que c'est ça mais l'enseignante demande comment on

pourrait vérifier ce résultat avec nos ordres de grandeurs. Elle demande ce qu'on devait multiplier, au début.

Un élève répond 2,35 par 7,2. Madame Germain lui demande s'il peut alors remplacer chacun des deux facteurs du produit par une valeur approchée. L'élève propose 2 et 7. L'enseignante lui demande combien fois 2 fois 7. L'élève répond 14. L'enseignante lui demande alors si le résultat peut convenir. Des élèves disent oui et l'enseignante confirme : 16,920 c'est bien du même ordre de grandeur que 14. L'enseignante demande si on peut donner un autre résultat que 16,920. Un élève propose 16,92. L'enseignante confirme en précisant que le zéro n'est pas indispensable.

533. Placer la virgule du produit en décalant

Un élève propose une autre manière de calculer parce qu'au départ il y avait trois chiffres après la virgule et que dans l'opération calculée au tableau il y en a trois aussi au résultat. Madame Germain confirme mais en précisant : "à condition qu'on laisse le zéro inutile, sinon on risque de faire une erreur." L'enseignante dit alors qu'on peut expliquer à quelqu'un que pour multiplier deux nombres à virgule on compte le nombre de chiffres après la virgule et on met au résultat le total du nombre de chiffres après la virgule des deux nombres qu'on multiplie. Puis elle ajoute que là on voit pourquoi c'est comme ça.

Puis elle reprend : "Pourquoi 2,35 compte pour deux chiffres après la virgule ? Parce que 2,35 c'est 235 multiplié par un centième. Pourquoi 7,2 compte pour un chiffre après la virgule ? Parce que 7,2 c'est 72 multiplié par un dixième. Et pourquoi il y aura trois chiffres après la virgule en tout dans le résultat ? Parce que un centième multiplié par un dixième, ça fait un millième." Puis elle ajoute qu'il ne faut pas oublier, quand on multiplie deux nombres à virgule de vérifier le résultat en regardant si l'ordre de grandeur convient.

534. Comment contrôler que la virgule est bien placée

Madame Germain demande si les élèves connaissent d'autre méthode pour contrôler le résultat d'une multiplication. Des élèves évoquent la preuve par neuf. L'enseignante demande si, dans ce cas là, la preuve par neuf peut nous servir. Certains élèves répondent oui, d'autres non. L'enseignante confirme le non, elle justifie : la preuve par neuf ne s'occupe pas du tout des virgules. Cette preuve ne suffit pas pour montrer qu'on a trouvé un résultat avec un bon ordre de grandeur.

Madame Germain demande d'écrire sur la feuille une nouvelle étoile et de recopier la phrase écrite au tableau : "multiplier 2,35 par 7,2 c'est multiplier 235 par 72 puis diviser par 1 000." Elle laisse aux élèves le temps de copier.

Puis l'enseignante demande de recopier les calculs qui donnent l'explication.

54. Du travail commencé en classe

Madame Germain laisse aux élèves le temps d'écrire, pendant ce temps elle distribue une feuille aux élèves où figurent deux exercices photocopiés⁶⁰ :

⁶⁰ Exercices n° 10 et 11 p. 103 du manuel *Découverte 6e* (1997), Paris : Belin.

10. Comparaison

a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

<i>a</i>	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
<i>b</i>	5,2	3	1,5	1	0,52
<i>a × b</i>	9,36				0,3

b. Dans quels cas le produit $a \times b$ est-il inférieur à *a* ?

11. Le solitaire

Recopier le tableau ci-dessous et barrer les paires de nombres dont le produit est 0,48. Un seul nombre reste, lequel ?

1,2	0,04	0,15	0,6	1,5
0,2	4	0,3	2	0,006
0,015	2,4	120	1,6	0,4
0,8	0,004	8	80	0,24
32	0,32	12	3,2	0,12

Exemple : $1,2 \times 0,4 = 0,48$; on barre 1,2 et 0,4.

Madame Germain demande de prendre le stylo habituel pour effectuer des corrections sur la feuille : dans l'exercice 10, à la place de petit *a*, écrire deuxièmement et à la place de petit *b*, écrire premièrement. Elle justifie : elle n'aime pas qu'on appelle les questions comme les nombres et elle veut inverser l'ordre des questions. Puis elle reprend les consignes de correction : barrer "reproduire et" comme ça il reste compléter le tableau suivant, elle justifie, comme elle l'a photocopié ce n'est pas la peine de le reproduire. Puis elle demande, pour répondre à la première question c'est-à-dire dans quels cas le produit $a \times b$ est-il inférieur à *a*, d'encadrer en rouge les cases qui correspondent à ça. Dans le numéro 11, elle demande également de barrer "Recopier le tableau ci-dessous et", puisque les élèves l'ont. L'enseignante relit la consigne. Elle précise qu'il y a un exemple sous le tableau, elle lit l'exemple et demande de barrer les deux nombres 1,2 et 0,4 car on ne voit pas bien, sur la photocopie, qu'ils sont barrés.

Madame Germain recopie l'exercice n°10 au tableau puis circule dans les rangs pour contrôler le travail des élèves en précisant qu'elle préférerait qu'on n'utilise pas les calculatrices. Elle précise qu'il faut coller la feuille dans le cahier puis demande de noter le travail à faire pour la séance prochaine.

59. Du travail à la maison pour la prochaine séance

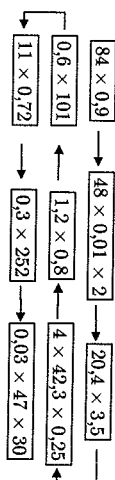
Terminer les exercices commencés en classe et deux exercices pour lesquels l'enseignante demande, dans la mesure du possible, d'éviter la calculatrice⁶¹ :

⁶¹ Exercices n° 15 et n° 16 p. 63 du manuel *Cinq sur Cinq 6e* (1997), Paris : Hachette.

Le message secret

Code	A	C	E	S	T	X
Secret	7,92	75,6	0,96	71,4	42,3	60,6

A l'aide de ce code, retrouver le message :



Le 110 mètres haies

Voici le règlement précis du 110 mètres haies : *Il y aura dix haies de 1,067 m de haut. La première haie sera à 13,72 m de la ligne de départ : les haies seront espacées de 9,14 m.*

Quelle est la distance de la dernière haie à la ligne d'arrivée ?
Conseil : Faire un schéma.

RESUME

Cette thèse présente quatre enseignements de la multiplication des décimaux, dispensés en sixième dans des conditions analogues. L'analyse repose sur les transcriptions des enregistrements des séances et sur des entretiens avec les professeurs. Elle porte sur la préparation et sur le déroulement effectif des cours. Elle utilise une approche double. La première se nourrit des résultats obtenus en didactique des mathématiques, les enseignements sont alors étudiés en fonction de leurs effets potentiels sur l'apprentissage. La seconde approche suppose, pour chaque professeur, la cohérence de ses pratiques d'enseignement, elle emprunte quelques éléments théoriques à la psychologie ergonomique qui permet l'étude du professeur comme un individu en situation de travail.

Les pratiques enseignantes analysées révèlent des contraintes communes liées aux prescriptions de l'institution scolaire et à l'exercice du métier, notamment la gestion de la classe et l'écoulement du temps. Ces contraintes expliquent, au niveau global, une grande convergence des quatre projets : durée des séquences, contenus abordés, présentation des savoirs...

Au-delà des contraintes, subsiste une marge de manœuvre que les enseignants investissent personnellement et qui explique, à un niveau plus local, la diversité des pratiques observées. Ainsi, les scénarios prévus se distinguent par la stratégie d'enseignement (place de la technique opératoire, méthodes de justification de la technique et des propriétés...), par les tâches proposées comme par l'organisation de l'institutionnalisation. Suivant les séquences, les activités des élèves varient sensiblement entre des objectifs de construction de connaissances et de simples applications de techniques, leurs interventions en classe diffèrent tout comme les interactions avec leurs professeurs. En de nombreuses occurrences, des analyses croisées ont cependant confirmé, pour chaque professeur, l'existence d'une cohérence de ses pratiques d'enseignement.

MOTS CLES

Adaptation - analyse de tâche et d'activité - décimaux -incident - multiplication- pratique enseignante - psychologie ergonomique - stratégie d'enseignement.

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2001
ISBN : 2-86612-219-4